

## Aufgabe 1

- a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x > 0$  gilt für die  $n$ -te Ableitung von  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  die Formel

$$\ln^{(n)} x = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}.$$

*Hinweis:* Sie können die aus der Vorlesung bekannten Ableitungsregeln für  $\ln x$  und  $x^{-n}$  verwenden. Beachten Sie, dass nach Definition  $0! = 1$  gilt.

- b) Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} ax^3 + b, & \text{für } x < 1 \\ \ln x, & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie  $a, b \in \mathbb{R}$  so, dass  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig und stetig differenzierbar ist.

## Aufgabe 2

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge  $(a_n)$  definiert durch

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{5 + a_n} \quad \text{für } n \geq 1.$$

- Zeigen Sie per Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$  die beiden Ungleichungen  $a_n > 0$  und  $a_n \leq 2$ .
- Zeigen Sie, dass  $(a_n)$  monoton fallend ist.
- Berechnen Sie den Grenzwert  $a$  von  $(a_n)$ .

## Aufgabe 3

Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind. Falls die Menge ein Untervektorraum ist, geben Sie die Dimension an, falls nicht, geben Sie eine Begründung dafür an.

Bei dieser Aufgabe wird nur Ihr Kreuz sowie die Dimension bzw. die Begründung im vorgesehenen Kästchen bewertet!

a)

$$U_1 = \{ (x^2, 2x, 0)^T \mid x \in \mathbb{R} \}$$

b)

$$U_2 = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 \}$$

- c) Es sei  $P_3$  der Raum aller Polynome vom Grad  $\leq 3$ .

$$U_3 = \{ p \in P_3 \mid p(1) = 2 \cdot p(2) \}$$

d)

$$U_4 = \{ \alpha \cdot (1, 1, 1)^T + (2, 2, 2)^T \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

## Aufgabe 4

- a) Für  $n \geq 2$  sei die Folge  $(a_n)$  gegeben durch  $a_n = n^3 - 2 - \sqrt{n^6 - 5n^3}$ . Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

- b) Es sei  $(a_n)$  definiert wie in Teil a). Begründen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil a), ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

konvergiert oder divergiert.

- c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^{2x}}.$$

Begründen Sie dabei, warum die Regel von l'Hospital anwendbar ist.

d) Untersuchen Sie, ob folgende Reihe konvergiert oder divergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}$$

e) Zeigen Sie, dass die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

den Konvergenzradius  $R = 1$  besitzt und untersuchen sie ihr Konvergenzverhalten an den Randpunkten  $x$  mit  $|x| = R$ :

### Aufgabe 5

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int \frac{x^3 - x^2 - 3x + 12}{x^2 + x - 6} dx$$

mit Hilfe von Polynomdivision sowie anschließender Partialbruchzerlegung.

### Aufgabe 6

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie  $\dim \text{Kern } A$  und  $\text{Rang } A$  in Abhängigkeit von  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine Basis des Zeilenraums  $Z_A$ .
- Für welche Werte von  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  ist das Gleichungssystem lösbar?
- Bestimmen Sie die Determinante  $\det A$  in Abhängigkeit von  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe 7

a) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  bilden die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ ? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Berechnen Sie für  $\alpha = 1$  die Darstellung des Vektors  $v_1$  als Linearkombination von  $v_2$  und  $v_3$ .