Aufgabe 26

Über das Wesen der Distribution – Eine heuristische Einführung

„Heuristik, bezeichnet die Kunst, mit begrenztem Wissen und wenig Zeit zu guten Lösungen zu kommen"

a)

Um den Begriff Distribution einzuführen müssen wir zuerst das mathematische Vorgeplänkel durchführen:

Wir führen die Testfunktion (G(x), F(x),…) ein. Diese hat die Eigenschaften, dass alle Ableitungen existieren und im Unendlichen verschwinden, stärker als jede Potenz $\frac{1}{|x|}$, z.B. e^{-x^2}.

Sei nun:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{i\omega x'} F(x')$$

Wir vertauschen die Reihenfolge der Integration. Das dürfen wir wegen dem Satz von Lebesgue.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, F(x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(x'-x)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, F(x')\delta(x'-x)$$

Offensichtlich wirkt die Distribution auf eine Testfunktion und hat den Charakter:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(x'-x)} = \delta(x'-x) = \{\begin{matrix} 0\; für\; x' \neq x \\ \infty\; für\; x' = x \end{matrix}$$

Diese „Funktion" von x' hat also die Eigenschaft, für alle $x' \neq x$ zu verschwinden und für $x' = x$ den Wert Unendlich anzunehmen. Sie stellt also für Integrale das Analogon zum Kronecker- δ für Summen dar

$$\sum_{n'} K_{n'} \delta_{nn'} = K_n$$

b)

Für die Delta-Distribution speziell heißt das:

Die Delta-Distribution ist eine stetige lineare Abbildung von einem Funktionenraum der Testfunktionen ε in den zugrunde liegenden Körper K:

$$\delta: \varepsilon \to K, \qquad f \to f(0)$$

Die Delta-Distribution ordnet jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion f eine reelle bzw. komplexe Zahl δ(f)=f(0) zu, nämlich die Auswertung der Funktion an der Stelle 0.

Die Begründung, weswegen die Delta-Distribution keine Funktion im klassischen Sinne ist, liegt schon in der Definition. Hier werden nämlich Funktionen auf Zahlen(R oder C)) abgebildet. Dies definiert ein Funktional.

c)

Die Delta-Distribution hat jetzt aber ein Problem, sie ist eine irreguläre Distribution. Das heißt, es gibt kein Funktional δ, welches der obigen Definition genügt. Abhilfe schafft nur eine Approximation. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, wobei wir uns hier auf die Dirac-Folge von Gaußfunktionen beschränken.

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$$

Um nun zu zeigen, dass diese Approximation hinreichend gut ist, müssen wir prüfen, dass:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$$

Beweis:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}\varphi(x)dx$$

<u>Bemerkung:</u> An dieser Stelle ist es essentiell den Limes <u>nicht</u> in das Integral zu ziehen. Andernfalls wäre δ_ε „fast überall" Null, nur nicht bei x=0. Ein einzelner Punkt hat jedoch das Lebesgue-Maß Null und das ganze Integral würde verschwinden.

<u>Hinweis:</u> Wir drücken $\varphi(x)$mit der Taylorentwicklung um den Punkt x=0 aus:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n(0)}{n!} x^n$$

<u>Bemerkung:</u> Es genügt den ersten Term der Entwicklung zu betrachten, weil Terme höherer Ordnung nach dem Integrieren Epsilons zurücklassen mit dem Grad >1, welche nach dem ausführen des Limes wegfallen würden. Hier ohne Beweis um die Übersichtlichkeit beizubehalten, jedoch „leicht" nachzurechnen. Es folgt also für die Taylorentwicklung:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(0)}{0!} x^0 = \varphi(0)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}\varphi(0)dx \underbrace{=}_{Gaußintegral} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{\epsilon}\sqrt{2\pi}\,\epsilon\,\varphi(0)\right] = \varphi(0)$$

Naja, und genau das zeichnet ja die Delta-Distribution aus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

q.e.d

Quellen:

Schwabl „Quantenmechanik" 7. Auflage und Wikipedia (jaja, nicht wissenschaftlich aber trotzdem hilfreich)