Álgebra Lineal y Geometría	Curso 2011-2012
T1.-Sistemas Ecuaciones Lineales	**Lecturas** AL_LEF: Capítulo 1 (Excepto Análisis de Redes Eléctricas)

Objetivo: El objetivo de esta sección es el estudio de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), determinar si existen soluciones para un SEL y encontrar dichas soluciones.
T1_L1 Resolver un SEL por el Método de Gauss
T1_L2 Identificar si un SEL es compatible (determinado o indeterminado) o incompatible
T1_L3 Hallar una expresión paramétrica del conjunto de soluciones de un SEL

Ejercicios Recomendados: AL_LEF Sección 1.1 (1-20, 39, 43, 45, 59-62) Sección 1.2 (29, 31, 32, 43, 44, 53, 54), Sección 1.3 (1,3,11,12)

PROBLEMAS

Problema SEL. 1

Discutir y resolver según los valores de m el sistema:

$$\begin{array}{llllll} x & +2y & +z & = & 1 \\ -x & & +2z & = & 3 \\ 3x & +2y & +mz & = & 1 \end{array}$$

Problema SEL. 2

Discutir y resolver según los valores de k el sistema:

$$\begin{array}{llllll} -x & +ky & +z & = & 2 \\ 2x & -y & +2z & = & 0 \\ -x & & -3z & = & -2 \end{array}$$

Problema SEL. 3

Discutir, en función de a y utilizando el método de Gauss, el siguiente sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & ay & - & 3z & = & 0 \\ 5x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN:

1.- $a \neq 8$. Sistema COMP. y DET., $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
2.- $a = 8$. Sistema COMP. e INDET., $(x, y, z) = (\frac{1}{19}t, \frac{7}{19}t, t)$

Problema SEL. 4

Discutir, en función de k y utilizando el método de Gauss, el siguiente sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ kx & + & (k-1)y & + & z & = & k \\ x & + & y & + & z & = & k+1 \end{array}$$

SOLUCIÓN:

1.- $k \neq 1$. Sistema COMP. y DET., $(x, y, z) = (\frac{-k^3-k^2+2k-1}{k-1}, -k(1+k), \frac{k}{k-1})$.
2.- $k = 1$. Sistema INCOMPATIBLE.

Problema SEL. 5

Los beneficios, en millones de euros, de una empresa en los últimos 4 años han sido

año	2001	2002	2003	2004
beneficios	11	34	99	230

Ajustar un polinomio de tercer grado (puesto que se dispone de 4 puntos) a los beneficios obtenidos y estimar los beneficios esperados para el año 2005. Se recomienda hacer un cambio de variable año, usando como nueva variable $x = \text{año} - 2000$ para manejar números más sencillos.

Problema SEL. 6

Demostrar, razonando sobre sistemas de ecuaciones, que el único polinomio de segundo grado $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ que se anula en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, es el polinomio nulo ($a_0 = a_1 = a_2 = 0$).

Problema SEL. 7

1. Discutir para todos los valores de a y b el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & -x_2 & & -3x_4 & -x_5 & = & 2 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & & +2x_5 & = & 6 \\ & x_2 & +2x_3 & +ax_4 & +x_5 & = & b \end{array}$$

2. Resolver en el caso $a = 3$, $b = 2$.

SOLUCIÓN:

1. Por el método de Gauss se obtiene:
   - $a \neq 1$. Sistema Compatible indeterminado $\forall b \in R$
   - $a = 1$, $b = 1$. Sistema Compatible indeterminado
   - $a = 1$, $b \neq 1$. Sistema Incompatible
2. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2 - \alpha, -3 - 2\alpha, \alpha, 1/2, 7/2)$

Problema SEL. 8

Se considera la familia de matrices dependientes de 2 parámetros

$$A_{ab} = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ a & 1 & b \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales en función de los valores de los parámetros a y b

$$A_{ab} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Por el método de Gauss se obtiene:

- $b = 1$, $a = 0$: S.C.I. $(x, y, z) = (\alpha, \beta, 1 - \beta)$
- $b = 1$, $a \neq 0$ S.C.I.$(x, y, z) = (\dfrac{1 - \alpha - \beta}{a}, \beta, \alpha)$
- $b \neq 1$, $a \neq 0$ S.C.D. $(x, y, z) = (\dfrac{b+2}{a}, -1, -1)$
- $b = -2$, $a = 0$ S.C.I. $(x, y, z) = (\alpha, -1, -1)$
- $b \neq -2$, $b \neq -1$, $a = 0$ S.I.

Problema SEL. 9

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y - z &= 1 \\ z - t &= 1 \\ t - x &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.-
Se comprueba facilmente que que el sistema es incompatible pues al sumar todas las ecuaciones resulta 0=4.

Problema SEL. 10

Discutir en función de a el sistema (no hace falta resolver):

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & az & = & 5 \end{array}$$

SOLUCIÓN.-
Aplicando el método de Gauss $a = \frac{-9}{5}$ INCOMPATIBLE si $a \neq \frac{-9}{5}$ COMPATIBLE DETERMINADO.

Problema SEL. 11

Resolver el sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & & & = & 4 \\ 3x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ 4x & - & 2y & - & 4z & = & -2 \end{array}$$

Interpretar geométricamente el sistema y la solución.

SOLUCIÓN.-
Resolviendo por el método de Gauss se obtiene la solución

$$\begin{array}{rcr} x & = & -3+2t \\ y & = & -5+2t \\ z & = & t \end{array}$$

Los tres planos se intersecan en la recta solución.

Problema SEL. 12

Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & -a & -1 \end{pmatrix}$$

Discutir el sistema $MX = B$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de a y b, resolviendo en el caso $a = 2, \quad b = -2$.

SOLUCIÓN.-
Trabajando por el método de Gauss: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & -a & -1 & b \end{array}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & -6 & -a-4 & -1-4a & | & b-4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2-a & 8-4a & | & b+2 \end{pmatrix}$$

Se obtiene directamente: Si $a = 2$, el sistema será compatible indeterminado en el caso $b = -2$ e incompatible si $b \neq 2$.

Si $a \neq 2$, el sistema será compatible indeterminado en cualquier caso.

La solución pedida será $\vec{x} = (-2 + 2\alpha + \frac{5}{2}\beta, 1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \beta)$.