Vysoké učení technické v Brně
Fakulta informačních technologií

Teoretická informatika

Třetí úkol

2011

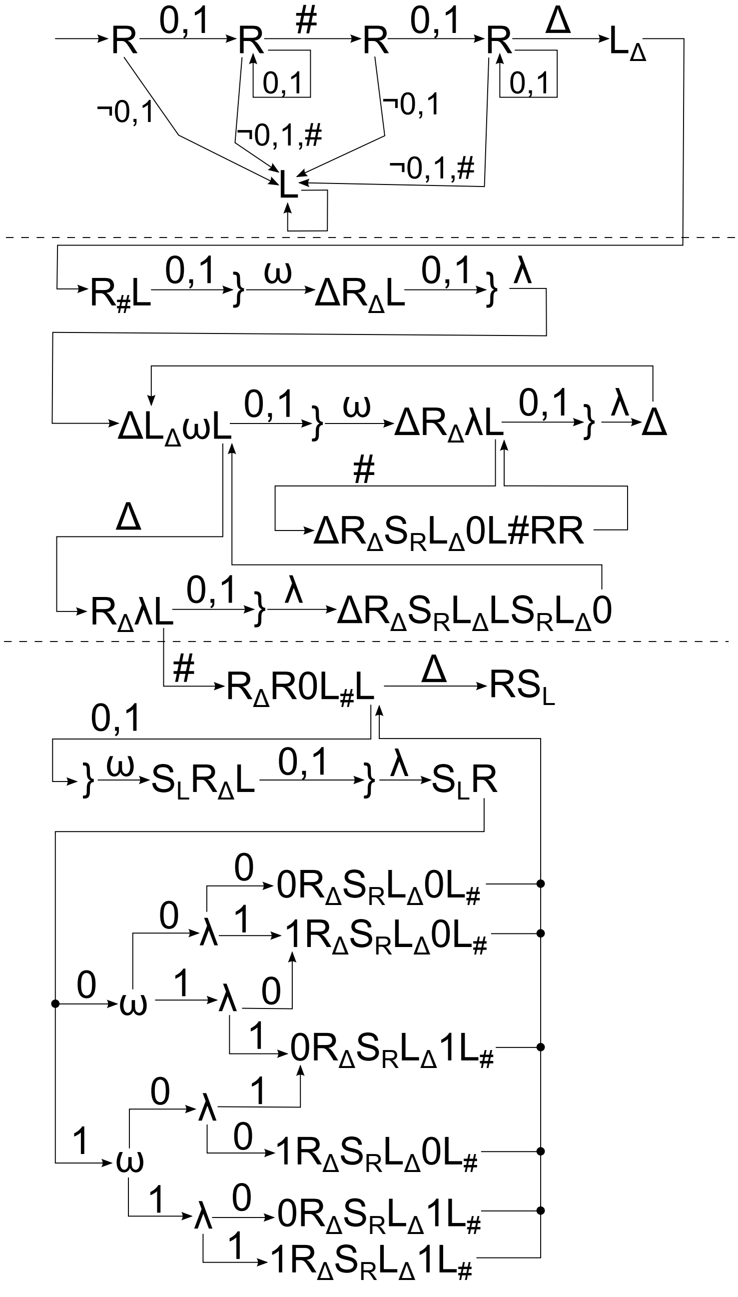
Jan Trávníček

1.

Tato úloha je řešena Turingovým strojem, který je zobrazen na obrázku 1, který si můžeme rozdělit na tři samostatné části. Jednotlivé části jsou v obrázku naznačeny přerušovanými čarami. V první části se provádí pouze kontrola, zda je na vstupní pásce validní vstup ve tvaru $\underline{\Delta} A\#B\Delta^\omega$, kde $A, B \in \{0,1\}^+$.

Ve druhé části je vstup zarovnán tak, aby oba operandy byly zobrazeny na stejném počtu bitů. Tímto si zjednodušíme následné sčítání, které můžeme provádět obecněji a nemusíme tuto skutečnost ošetřovat při samotném sčítání.

Ve třetí části je pak již provedeno pouze samotné sčítání dvou binárních čísel stejné délky. Výsledek sčítání je pak uložen na pásce dle zadání.



Obrázek 1: Turingův stroj reprezentující sčítání dvou binárních čísel.

2.

Třídu jazyků přijímaných turingovým strojem označme $\mathcal{L}_{TS}$. Třídu jazyků přijímaných dvojzásobníkovým automatem označme $\mathcal{L}_{DA}$. Jsou-li tyto dvě třídy jazyků ekvivalentní, je třeba dokázat obě inkluze $\mathcal{L}_{TS} \subseteq \mathcal{L}_{DA}$ a $\mathcal{L}_{DA} \subseteq \mathcal{L}_{TS}$.

- První inkluzi $\mathcal{L}_{TS} \subseteq \mathcal{L}_{DA}$ dokážeme algoritmem, který k turingovu stroji sestrojí odpovídající dvojzásobníkový automat. Idea tohoto algoritmu je popsána slovně.
  - Zvolme $Z_0 = \#$. Bez ujmy na obecnosti můžeme prohlásit, že $\# \notin \Sigma$. Symbol # je tedy dno zásobníku.
  - Vstup dvojzásobníkového automatu odpovídá řetězci w, který odpovídá řetězci neblankových symbolů počáteční konfigurace pásky turingova stroje, která je ve tvaru $\underline{\Delta} w \Delta^{\omega}$.
  - Na první zásobník vložíme symbol Δ. Vrchol prvního zásobníku odpovídá pozici hlavy simulovaného turingova stroje.
  - Dále je třeba definovat operace, které umožňuje turingův stroj, tedy zápis, posun doprava a posun doleva.
  - Při posunu doprava je třeba rozlišovat tři možné varianty, které mohou nastat. Pokud je na druhém zásobníku pouze symbol # (dno zásobníku) a vstup dvojpáskového zásobníku obsahuje ještě neprázdný řetězec, přečteme symbol z pásky a uložíme jej na vrchol prvního zásobníku. Pokud je na druhém zásobníku pouze symbol # a na vstupu automatu je již prázdný řetězec, vložíme na vrchol prvního zásobníku symbol Δ. Pokud je na druhém zásobníku mimo symbol # ještě jiný symbol, vezmeme symbol z vrcholu druhého zásobníku, odebereme ho z druhého zásobníku a uložíme ho na vrchol prvního zásobníku.
  - Při posunu doleva se přečte symbol z vrcholu prvního zásobníku a přesune se na druhý zásobník. Pokud je na vrcholu prvního zásobníku symbol dna zásobníku #, představuje to situaci, kdy běh odpovídajicího turingova stroje posunul čtecí hlavu doleva před začátek pásky.
  - Při zápisu znaku na místo čtecí hlavy (vrchol prvního zásobníku) je znak z vrcholu odebrán a nahrazen novým zpět na vrchol prvního zásobníku.
  - Při simulaci TS při přechodu mezi stavy se znak z prvního zásobníku přečte a vrátí zpět.
  - Při řádne formalizaci popsaného algoritmu pak není težké ukázat, že výsledný dvojzásobníkový automat simuluje turingův stroj.
- Druhou inkluzi $\mathcal{L}_{DA} \subseteq \mathcal{L}_{TS}$ dokážeme slovním popisem algoritmu simulace dvojzásobníkového automatu pomocí turingova stroje.
  - Použijeme třípáskový turingový stroj, kde na první pásku položme vstupní řetězec dvojzásobníkového automat. Druhou a třetí pásku budeme považovat za dva zásobníky. Již bylo dokázáno, že vícepáskové turingovy stroje nezvyžují sílu a tudíž jsou ekvivalentní s jednopáskovými turingovy stroji.
  - Druhou a třetí pásku, budeme používat tak, jak jsme zvyklí z práce se zásobníky. Budeme tedy vždy pracovat pouze s posledním symbolem, který představuje vrchol zásobníku. „Zásobníkové“ operace jistě lze provádět pomocí turingova stroje.
  - Při řádné formalizaci popsaného postupu můžeme dokázat, že dvojzásobníkový automat lze simulovat třípáskovým turingovým strojem, tedy i jednopáskovým turingovým strojem.
- Třídy jazyků $\mathcal{L}_{TS}$ a $\mathcal{L}_{DA}$ jsou tedy ekvivalentní, jak bylo dokázano neformálním popisem obou stran inkluze.

3.

1. Nerozhodnutelnost

   - Redukcí z problému zastaveni TS.
   - Problém zastavení lze charakterizovat jazykem $HP = \{<M>\#<w>|M$ je TS takový, že zastaví, je-li spuštěn na řetězci $w\}$.
   - Problém, zda jazyk daného TS obsahuje alespoň jedno slovo z jazyka $L_3 = \{ww|w \in \{a,b\}^*\}$, lze charakterizovat jazykem $P = \{<M>|(L(M) \cap L_3) \neq \emptyset\}$.
   - Sestrojíme redukci $\sigma : \{0,1,\#\}^* \to \{a,b\}^*$ z jazyka HP na jazyk P.
   - TS M_σ vyčíslujicí σ přiřadí každému vstupu $x \in \{0,1,\#\}^*$ řetězec $<M_x>$, kde M_x je TS, který na vstupu $w \in \{a,b\}^*$ pracuje tatko:
     (a) M_x smaže řetězec w ze svého vstupní pásky.
     (b) Na vstupní pásku zapíše řetězec x.
     (c) M_x ověří, zda x má strukturu $x_1\#x_2$, kde x_1 je kód TS a x_2 kód jeho vstupu. Nemá-li tuto strukturu, odmítne.
     (d) M_x odsimuluje na své pásce běh TS s kódem x_1 na řetězci s kódem x_2 . Vede-li simulace k zastavení, přijme, jinak cyklí.
   - M_σ lze zřejmě realizovat jako úplný TS – jedná se o výpis předpřipravených komponent TS (body a, c, d) a o kód TS, tkerý přepíše zadaný řetězec x na pásku (bod b).
   - Pro jazyk TS M_x platí:
     - $L(M_x) = \emptyset \Leftrightarrow (L(M_x) \cap L_3) = \emptyset \Leftrightarrow x$ není platnou instancí problému zastavení nebo pokud $x = x_1\#x_2$ a TS s kódem x_1 nezastaví na řetězci s kódem x_2 ($x \notin HP$).
     - $L(M_x) = \{a,b\}^* \Leftrightarrow (L(M_x) \cap L_3) \neq \emptyset \Leftrightarrow x = x_1\#x_2$ a TS s kódem x_1 zastaví na řetězci s kódem $x_2 \Leftrightarrow x \in HP$.

2. Částečnou rozhodnutelnost není ze zadání třeba dokazovat.

4.

Turingovu stroji M_4 odpovídá gramatika $G_4 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde P je konečná množina pravidel definováných následovně

P: $S \longrightarrow a \mid aA$
$A \longrightarrow bB$
$B \longrightarrow bB \mid aS$

Mějme řetězec $w = abbbaabaa$, pro který jistě platí, že $w \in L(M_4)$. Běh stroje M_4 pro tento řetězec po té vypadá následovně pro počáteční konfiguraci pásky $\underline{\Delta} w \Delta^\omega$.

$(0, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 1) \vdash (1, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 2) \vdash (2, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 3) \vdash$
$(3, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 4) \vdash (3, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 5) \vdash (3, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 6) \vdash$
$(1, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 7) \vdash (2, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 8) \vdash (3, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 9) \vdash$
$(1, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 10) \vdash (2, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 11) \vdash (5, \Delta abbbaabaa\Delta^\omega, 10) \vdash$
$(6, \Delta abbbaaba\Delta^\omega, 10) \vdash (5, \Delta abbbaaba\Delta^\omega, 9) \vdash (6, \Delta abbbaab\Delta^\omega, 9) \vdash$
$(5, \Delta abbbaab\Delta^\omega, 8) \vdash (6, \Delta abbbaa\Delta^\omega, 8) \vdash (5, \Delta abbbaa\Delta^\omega, 7) \vdash (6, \Delta abbba\Delta^\omega, 7) \vdash$
$(5, \Delta abbba\Delta^\omega, 6) \vdash (6, \Delta abbb\Delta^\omega, 6) \vdash (5, \Delta abbb\Delta^\omega, 5) \vdash (6, \Delta abb\Delta^\omega, 5) \vdash$
$(5, \Delta abb\Delta^\omega, 4) \vdash (6, \Delta ab\Delta^\omega, 4) \vdash (5, \Delta ab\Delta^\omega, 3) \vdash (6, \Delta a\Delta^\omega, 3) \vdash$
$(5, \Delta a\Delta^\omega, 2) \vdash (6, \Delta\Delta^\omega, 2) \vdash (5, \Delta\Delta^\omega, 1) \vdash (7, \Delta\Delta^\omega, 2) \vdash (8, \Delta Y\Delta^\omega, 2) \vdash (8, \Delta Y\Delta^\omega, 1)$

Dané slovo w je generováno gramatikou G_4 následující posloupností derivací:
$S \Rightarrow aA \Rightarrow abB \Rightarrow abbB \Rightarrow abbbB \Rightarrow abbbaS \Rightarrow abbbaaA \Rightarrow abbbaabB \Rightarrow abbbaabaA \Rightarrow abbbaabaa.$