Zadanie 212. Wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze p, że liczba $7p^2+8$ też jest pierwsza.

Rozwiązanie:
Dla $p = 3$ wyrażenie $7p^2 + 8$ przyjmuje wartość 71 (liczba pierwsza). Wykażemy, że 3 jest jedyną liczbą pierwszą spełniającą warunki.
Istotnie dla $p = 2$ wyrażenie $7p^2+8$ jest liczbą parzystą. Z drugiej strony każda liczba pierwsza większa niż 3 ma postać $6k \pm 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Stąd mamy:

$$7p^2 + 8 = 7(6k \pm 1)^2 + 8 = 7(36k^2 \pm 12k + 1) + 8 = 252k^2 \pm 84k + 15 = 3(84k^2 \pm 28k + 5)$$

Zatem żadna liczba pierwsza większa niż 3 nie może spełniać warunków.

Zadanie 213. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich, że suma $\sum a_n$ jest liczbą wymierną, a suma $\sum a_n^2$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie:
Niech $a_n = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{e}\right)^n$. Mamy wówczas:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1-(1-\frac{1}{e})} = \frac{1}{e}\cdot e = 1 \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2}\left(1-\frac{1}{e}\right)^{2n} = \frac{1}{e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{e}\right)^2\right)^n = \frac{1}{e^2}\cdot\frac{1}{1-(1-\frac{1}{e})^2} = \\
&= \frac{1}{e^2}\cdot\frac{1}{\frac{2}{e}-\frac{1}{e^2}} = \frac{1}{2e-1}
\end{aligned}$$

Zadanie 214. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^8+1} + \frac{8}{n^8+8} + \frac{27}{n^8+27} + \frac{64}{n^8+64} + \frac{125}{n^8+125} + \ldots + \frac{k^3}{n^8+k^3} + \ldots + \frac{n^3}{n^8+n^3}\right).$$

Rozwiązanie:
Za pomocą indukcji można udowodnić prawdziwość wzoru $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Wobec czego prawdziwe jest następujące oszacowanie:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^8+k^3} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^8+n^3} = \frac{1}{n^8+n^3}\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^2(n^6+n)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^6+4n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Z drugiej strony mamy natomiast

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^8+k^3} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n^3}{n^8+k^3} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n^3}{n^8} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^5} = \frac{1}{n^4} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Zatem z obu powyższych nierówności oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że ciąg $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^8+k^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny i jego granica wynosi 0.

Zadanie 215. Wyznaczyć kres górny zbioru wszystkich liczb postaci $ab+bc+ca$, gdzie a, b, c przebiegają wszystkie trójki liczb rzeczywistych spełniających warunek $a+b+c=3$.

Rozwiązanie:
Z warunków zadania $a+b+c=3$. Stosując nierówność Cauchy'ego-Schwartza otrzymujemy

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \qquad \Rightarrow \qquad a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Skąd w prosty sposób dostajemy oszacowanie z góry wartości wyrażenia $ab+bc+ca$:

$$ab+bc+ca = \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2} = \frac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2} \leq \frac{9-3}{2} = 3$$

W ten sposób dowiedliśmy, że liczba 3 jest ograniczeniem górnym zbioru wartości wyrażenia $ab+bc+ca$. Jednak dla $a=b=c=1$ mamy $ab+bc+ca=3$, a więc 3 jest poszukiwanym kresem górnym.

Zadanie 216. Wskazać liczby naturalne $m < n \leq 97$, dla których prawdziwy jest następujący wzór na sumę kwadratów wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego 97-wyrazowego $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{97}$:

$$\sum_{i=1}^{97} a_i^2 = 97 \cdot \frac{a_m^2+a_n^2}{2}\ .$$

Rozwiązanie:
Zapiszmy wyraz ogólny ciągu arytmetycznego (a_i) w postaci $a_1+(i-1)r$, gdzie r jest różnicą ciągu. Rozpisując lewą stronę wzoru mamy:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{97} a_i^2 &= \sum_{i=1}^{97}(a_1+(i-1)r)^2 = \sum_{i=1}^{97}\Big(a_1^2+a_1(i-1)r+(i-1)^2r^2\Big) = \\
&= a_1^2\sum_{i=1}^{97}1 + a_1r\sum_{i=1}^{97}(i-1) + r^2\sum_{i=1}^{97}(i-1)^2 = a_1^2\sum_{i=1}^{97}1 + a_1r\sum_{i=1}^{96}i + r^2\sum_{i=1}^{96}i^2 = \\
&= 97\cdot a_1^2 + \frac{96\cdot 97}{2}\cdot a_1r + \frac{96\cdot 97\cdot 193}{6}\cdot r^2 = 97\cdot a_1^2 + 97\cdot 96\cdot a_1r + 97\cdot 3088\cdot r^2
\end{aligned}$$

Podobnie, rozpiszmy prawą stronę wzoru:

$$\begin{aligned}
97\cdot\frac{a_m^2+a_n^2}{2} &= \frac{97}{2}\Big((a_1+(m-1)r)^2+(a_1+(n-1)r)^2\Big) = \\
&= \frac{97}{2}\Big(a_1^2+2a_1(m-1)r+(m-1)^2r^2+a_1^2+2a_1(n-1)r+(n-1)^2r^2\Big) = \\
&= \frac{97}{2}\Big(2a_1^2+2a_1r(m+n-2)+r^2((m-1)^2+(n-1)^2)\Big)
\end{aligned}$$

Po przyrównaniu obu stron

$$97\Big(a_1^2+96\cdot a_1r+3088\cdot r^2\Big) = \frac{97\,(2a_1^2+2a_1r(m+n-2)+r^2((m-1)^2+(n-1)^2))}{2}$$

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} m+n=98 \\ (m-1)^2+(n-1)^2=6167 \end{cases}$$

który ma wyłącznie jedno rozwiązanie zgodne z warunkami zadania $m=21$, $n=77$.