

PRINCIP PREBROJAVANJA

Odgovor:

Kod određivanja broja elemenata skupa S ili kardinalnosti skupa S ($\text{card } S$) nailazimo na tri vrste problema. Prvi je način određivanja $|S|$, drugi je poznavanje delova S a treći je poznavanje faktora od S . Ovo su i TRI PRINCIPA prebrojavanja: PRINCIP JEDNAKOSTI (po kom nije važno kako prebrojimo elemente skupa S), PRINCIP SUME (koji govori o tome da je celina jednaka sumi delova) i PRINCIP PRODUKTA (koji kaže da je veličina produkta jednaka produktu faktora)

PRINCIP JEDNAKOSTI (ili BJEKTIVNE KORESPONDENCIJE)

Ako su S i T konačni skupovi, Ako postoji bijekcija među njima onda je $|S| = |T|$

PRINCIP SUME

Ako je $n \in \mathbb{N}$, $S_1, S_2, \dots, S_n$ konačni skupovi, od kojih su svaka dva međusobno disjunktne ($S_i \cap S_j = \emptyset$ za $i \neq j$). Tada $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ je konačan skup i vredi

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + \dots + |S_n|$$

Ili, ako $S_1, S_2, \dots, S_n$ čine particiju konačnog skupa S , onda je

$$|S| = \left| \bigcup_{i=1}^n S_i \right| = \sum_{i=1}^n |S_i|$$

PRINCIP PRODUKTA

Ako je $n \in \mathbb{N}$, a $S_1, S_2, \dots, S_n$ konačni skupovi. Tada je i Kartezijev produkt $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ konačan skup i vredi

$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot |S_3| \cdot \dots \cdot |S_n|$$

2^o PERMUTACIJE SKUPOVA

Odgovor:

Postoji nekoliko tipova prebrojavanja:

I Prebrojavanje UREĐENIH različitih ili UREĐENIH izbora objekata

a) bez ponavljanja objekata

b) sa ponavljanjem objekata

II Prebrojavanje NEUREĐENIH različitih ili NEUREĐENIH izbora objekata

a) bez ponavljanja objekata

b) sa ponavljanjem objekata

Ove pod I zovemo PERMUTACIJAMA a pod II KOMBINACIJAMA

Neka je S skup od n elemenata a $r \in \mathbb{N}$. Tada je r -PERMUTACIJA skupa S uređena r -torka $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ kod koje su sve komponente $x_1, x_2, \dots, x_r$ međusobno različiti elementi S .

Oznaka je $P(n, r)$

Ako je $r > n$ onda pisemo $P(n, r) := 0$ ili $P(n, 0) = 1$ za $r = 0$

Ako je $r = n$ onda se naziva prosto PERMUTACIJA (a ne n -permutacije n -skupa S) ili n -PERMUTACIJA skupa S

Ponekad se r -permutacije n -skupa zovu i VARIJACIJE r -tog reda bez ponavljanja od n elemenata

Ⓐ Za $n, r \in \mathbb{N}$ $r \leq n$

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) = (n)_r$$

Ⓑ Želimo utvrditi koliko ima različitih r -torki elemenata n -skupa S pri čemu su svi različiti. Prvu komponentu možemo odabrati na n načina $p_1 = n$. Nakon toga, komponentu x_2 možemo odabrati od svih preostalih a njih je $n-1$ pa je $p_2 = n-1$. Nakon što smo izabrali $r-1$ komponenti,

r -tu odabiramo među preostalih a njih je $n-(r-1) = n-r+1$, što znači da je moguće izabrati na $n-r+1$ načina, i $p_r = n-r+1$. Prema principu produkta, uzetih r -torki $(x_1, \dots, x_r)$ u n -članom skupu S ima $P(n, r) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

A specijalno za $r=n$ $P(n, n) = n!$ jer $0! = 1$
 Važi $P(n) = n P(n-1)$

Uočimo da skup svih bijekcija n -članog skupa $N_n = \{1, \dots, n\}$ čini grupu tzv. simetričnu grupu S_n , koja je reda $|S_n| = n!$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n$$

ili

Stirlingova formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1$$

3° KOMBINACIJE SKUPOVA

Neka je S skup od n elemenata, a $r \in \mathbb{N}_0$. Tada je r -KOMBINACIJA SKUPA S naprosto r -člani podskup od S .
 Drugim rečima, r -kombinacija od S je (neuređeni) izbor od r elemenata u S .

Broj svih r -kombinacija skupa od n elemenata je $\binom{n}{r}$

Važi i $\binom{0}{0} = 1$

Ako je $r \geq n$ onda $\binom{n}{r} = 0$

Ako je $n = 0$ onda je $\binom{n}{r} = 0$

Ⓓ Za $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $r \leq n$, broj r -podskupova n -članova nekog skupa tj. broj r -kombinacija od n elemenata je

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{(n)_n}{r}$$

Ⓔ Neka je S skup od n elemenata a $A_1, \dots, A_p$ svi međusobno različiti r -podskupovi od S . Označimo sa B_i skup svih $(r-)$ permutacija skupa A_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Skupovi $B_1, \dots, B_p$ su međusobno disjunktni. Neka je $T = B_1 \cup \dots \cup B_p$. Skup T sadrži sve r -permutacije skupa S . $B_1 \cup \dots \cup B_p$ je particija skupa T i svaki B_i je skup svih permutacija r -članog skupa pa ima $r!$ elemenata. Prema principu suve sledi da je $|T| = p \cdot r!$ a kako je T skup svih r -permutacija od S , to je $|T| = n!/(n-r)!$ pa je

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Veza između r -permutacija i r -kombinacija: sve r -permutacije dobijamo tako što ispermutujemo sve r -kombinacije.

$\binom{n}{r}$ se još naziva i binomni koeficijent

4° OSOBINE BINOMNIH KOEFICIJENATA

Odgovor:

Ⓓ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Ⓔ $\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$

Ⓓ Broj podskupova n -članog skupa je

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

① Očigledno da je broj podskupova jednak broju podskupova sa fiksiranim elemente skupa formiramo karakterističnu f-ju koja ako $x \in$ odgovaražućem podskupu ima vrednost 1 a u suprotnom 0. Kako ima n elemenata ukupno je 2^n preslikavanja a samim tim i podskupova (kombinacija)

① $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

① $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$

① $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

① (Paskalova formula)

$$n, r \in \mathbb{N} \quad 1 \leq r \leq n-1$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

①

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r)!} \left(\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r} \right) =$$

$$\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r)!} \cdot \frac{n}{r(n-r)} = \binom{n}{r}$$

① $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$

①

$$\binom{n+r+1}{r} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r}{r-1} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-1}{r-2}$$

$$\binom{n+r+1}{r} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1}$$

$$\binom{n+r+1}{r} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-1}{r-2}$$

$$\binom{n+r+1}{r} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-2}{r-2} + \binom{n+r-2}{r-3} \\ \dots \text{ do } \binom{n}{0}$$

Posledica:

Čuova teorema

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

⑦ Ako je n parno onda je

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{n/2} > \binom{n}{n/2+1} > \dots > \binom{n}{n}$$

a ako je n neparno onda

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \dots > \binom{n}{n}$$

⑧

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{n-(k-1)}} = \frac{n-k+1}{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} n-k+1 \geq k \\ n+1 > 2k \\ k \leq \frac{n+1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n - \text{parno} \Rightarrow k \leq \frac{n}{2} < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ n - \text{neparno} \Rightarrow k \leq \frac{n+1}{2} \leq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \end{array}$$

5) BINOMNA FORMULA I POSLEDICE

$$\begin{aligned} \textcircled{T} \quad (x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \end{aligned}$$

$$\textcircled{D} \quad (x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ puta}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (x+y)^n \text{ je jednak zbiru izvesnih monoma nakon svih mnozenja.}$$

Grubi od tih monoma se dobija tako što se iz svakog od n faktora uzme po jedan član i tako dobijeni n faktora se pomnože. Ako je y uzet iz k faktora, onda je x uzet iz $n-k$ faktora i to je $x^{n-k} y^k$. To odgovara $\binom{n}{k}$ broju faktora

$\textcircled{T}$ Vandermondeova konvolucija

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad \binom{n}{0} \binom{m}{r} + \binom{n}{1} \binom{m}{r-1} + \binom{n}{2} \binom{m}{r-2} + \dots + \binom{n}{r} \binom{m}{0} &= \binom{m+n}{r} \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad \binom{n}{0} \binom{m}{0} + \binom{n}{1} \binom{m}{1} + \dots + \binom{n}{n} \binom{m}{m} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{k} = \binom{m+n}{n}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{D} \quad 1^\circ \quad (1+x)^n \cdot (1+x)^m &= (1+x)^{n+m} \\ \sum_{\alpha=0}^n \binom{n}{\alpha} x^\alpha \cdot \sum_{\beta=0}^m \binom{m}{\beta} x^\beta &= \sum_{\gamma=0}^{m+n} \binom{m+n}{\gamma} x^\gamma \\ &= \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \binom{n}{\alpha} \binom{m}{\beta} x^{\alpha+\beta} \\ \binom{n}{0} \binom{m}{r} + \binom{n}{1} \binom{m}{r-1} + \dots + \binom{n}{r} \binom{m}{0} &\text{ uz } x^r \text{ levo, } \binom{m+n}{r} \text{ uz } x^r \text{ desno} \end{aligned}$$

$$2^o (1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^n \left(\frac{x+1}{x}\right)^m = \frac{(1+x)^{n+m}}{x^m} = x^{-m} \cdot (1+x)^{n+m}$$

$$\sum \binom{n}{\alpha} x^\alpha \cdot \sum \binom{m}{\beta} x^{-\beta} = \sum_{(\alpha, \beta)} \binom{n}{\alpha} \binom{m}{\beta} x^{\alpha-\beta} = \sum_{r=0}^{n+m} \binom{n+m}{n} x^{r-m}$$

$$\alpha \in \{0, \dots, n\}$$

$$\beta \in \{0, \dots, m\}$$

uz x^0 levo $\binom{n}{0} \binom{m}{0} + \dots + \binom{n}{n} \binom{m}{n}$

uz x^0 desno $\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$

Binomni red

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

6° MULTISKUPNI OPERACIJE

$$M = (S, m)$$

S - konačan skup

$x \in S$

ℓ element

$m(x)$ - broj ponavljanja elementa x

$|M|$ - broj elemenata multisкупа

$$M \stackrel{\text{def}}{=} M' \Leftrightarrow m \Big|_{m^{-1}(X)} = m' \Big|_{m'^{-1}(X)}$$

$$f \Big|_{C^{(x)}} \rightarrow \text{restrikcija } f \text{ je } f \text{ na skupu } C$$

$$M = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$$

$$|M| = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

$$M = (S, m) \quad M' = (S', m')$$

M' - podmultiskup

$$M' \subset M \Leftrightarrow m'(x) \leq m(x), x \in S$$

$$M = M' \Leftrightarrow (M \subset M' \wedge M' \subset M)$$

$$M \cup M' \stackrel{\text{def}}{=} (S, \max_{x \in S} \{m(x), m'(x)\})$$

$$M \cap M' \stackrel{\text{def}}{=} (S, \min_{x \in S} \{m(x), m'(x)\})$$

$$M \oplus M' \stackrel{\text{def}}{=} (S, m(x) + m'(x))$$

7° Permutacije multiskupa

Odgovor:

Neka je M multiskup, $r \in \mathbb{N}$. Tada je r -permutacija od M uređena r -torka $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ elemenata iz M . Ako je broj elemenata od M jednak n , onda se n -permutacija od M zove naprosto permutacija ^{multi} skupa M .

⊕ Neka multiskup ima tačno n različitih elemenata od kojih se svaki ponavlja beskonačno puta. Tada je broj r -permutacija od M jednak $\boxed{n^r}$

$$|S| = n \quad m(x_i) = \infty \quad (i = 1, \dots, n)$$

ⓓ Tražimo uređenu r -torku $(x_1, x_2, \dots, x_r)$. Svaku komponentu možemo birati na n različitih načina (jer se elementi ponavljaju ∞ puta)

$$\Rightarrow \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_r = n^r$$

⑦ Neka je M multiskup koji ima k različitih elemenata koji se ponavljaju $n_1, n_2, \dots, n_k$ puta, te $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Tada je broj permutacija od M jednak

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{D} \quad & \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot \cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2! \cdot \cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}}{n_k! \cdot \cancel{(n-n_1-\dots-n_k)!}} \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \end{aligned}$$

8° POLINOMNA FORMULA I POSLEDICE

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

① pomnožiti sve. (k^n množenja)

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_k)^n &= (x_1 + \dots + x_k)(x_1 + \dots + x_k) \dots (x_1 + \dots + x_k) \\ &= \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} x_{i1} x_{i2} \dots x_{in} = \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} \cdot \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \end{aligned}$$

Posledice:

$$1) \quad x_1 = \dots = x_k = 1 \Rightarrow k^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Problem postavljanja skupa od n elemenata na najviše k delova (pružer) na koliko načina se $S = \{a, b\}$ od 2 kuglice može rasporediti u 3 kutije (oznacen) k_1, k_2, k_3

$$\sum \binom{n}{k_1, k_2, k_3} = (1+1+1)^n = 3^n$$

2) ako je $n=p$ - prost broj onda $\frac{p!}{p! \cdot 0! \cdot 0! \dots 0!} y_1^p$

svaki koeficijent je 1 a nema kombinovanih
 $(x_1 + \dots + x_k)^p = x_1^p + x_2^p + \dots + x_k^p$

→ orde ako je $x_1 = \dots = x_k = 1 \Rightarrow k^p \equiv k \pmod{p}$
 ————— Fermatova teorema

9 KOMBINACIJE MULTISKUPOVA. MAC MAHON TEOREMA

Odgovor:

Neka je M multiskup, $r \in \mathbb{N}_0$. r -kombinacija multiskupa M je r -člani ~~podskup~~ podmultiskup od M .

Drugim rečima, r -kombinacija multiskupa M je izbor od elemenata iz M

(T) Neka je M multiskup od k različitih elemenata koji se ponavljaju ~~ili~~ konačno n broj puta i to $n_1, n_2, \dots, n_k$. Tada je ukupni broj svih mogućih kombinacija odnosno podmultiskupova od M jednak

$$(n_1+1)(n_2+1) \dots (n_k+1)$$

(D) $M = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$
 $a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_k$ $\{r_1 a_1, r_2 a_2, \dots, r_k a_k\}$

$$0 \leq r_1 \leq n_1$$

$$0 \leq r_2 \leq n_2$$

$$\vdots$$

$$0 \leq r_k \leq n_k$$

Skup svih podmultiskupova $\mathcal{M}(M)$ je u bijekciji sa skupom $\{0, 1, \dots, n_1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, n_k\}$ pa sledi $(n_1+1)(n_2+1) \dots (n_k+1)$ prema principu množenja

Označimo sa $\mathcal{M}_r(M)$ skup svih r -kombinacija multiskupa M , a ako M ima n različitih elemenata, od kojih se svaki ponavlja ∞ puta, definišemo $\langle n \rangle_r := |\mathcal{M}_r(M)|$.
Elementi od $\mathcal{M}_r(M)$ se ponekad zovu kombinacije r -tog reda s ponavljanjem od n elemenata

(T) Neka multiskup M ima tačno n različitih elemenata od kojih svaki ~~se~~ se beskonačno ponavlja. Neka $r \in \mathbb{N}$.
Tada $\langle n \rangle_r$ je broj svih r -kombinacija od M i jednak je $\binom{n+r-1}{r}$ tj

$$|\mathcal{M}_r(M)| = \langle n \rangle_r = \binom{n+r-1}{r}$$

(D) Neka je $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$
Tipična r -kombinacija A od M izgleda

$$A = \{k_1 a_1, k_2 a_2, \dots, k_n a_n\}$$

$$\forall_1, k_2, \dots, k_n \geq 0 \text{ i } k_1 + k_2 + \dots + k_n = r$$

$$\psi : A \rightarrow \psi(A) = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{k_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_2}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{k_n} \right)$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{array}$$

n -kutija r -kuglica $n-1$ -pregrada

$n-k+1$ ima objekata od kojih su n različitih

i $k-1$ jednakih.

$$\Rightarrow \frac{(n+k-1)!}{n! (k-1)!} = \boxed{\binom{n+k-1}{k-1}}$$

⊕ (Mac Mahon)

Neka je $M = \{n_1 a_1, n_2 a_2, \dots, n_k a_k\}$, $r \in \mathbb{N}$

Tada je broj r -kombinacija od M jednak

$$\left\langle n_1 n_2 \dots n_k \right\rangle_r = \sum_{s=0}^k (-1)^s \sum_{k-1} \binom{k+r-n_{i_1}-\dots-n_{i_s}-s-1}{k-1}$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq k$$

10^o FORMULA UKLJUČENJA I ISKLJUČENJA
EULEROVA FUNKCIJA

Odgovor:

Ⓣ FUI: Neka je S konačan skup a $A_1, A_2, \dots, A_n$
 $\subseteq S$, $\bar{A}_i = S \setminus A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ Tada je
 $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j|$
 $- \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$

gde je prva suma uzeta po svim $i \in \{1, \dots, n\}$
druga suma po svim 2-kombinacijama $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$
itd...

Stoga na desnoj strani formule uključivanja i isključivanja imamo
 $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ suma

Eulerova f-ja je primer FUI-a

Za $n \in \mathbb{N}$ označimo sa $\phi(n)$ broj onih prirodnih
brojeva koji ne dele broj n i koji su relativno prosti
s n . Ova f-ja ϕ se zove Eulerova f-ja

Za $n = 24$ relativno prosti su 24, 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

pa je $\phi(24) = 8$

Za svaki prirodan broj $n > 1$ postoje jedinstveni prosti brojevi $p_1, p_2, \dots, p_k$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ i prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ tako da je

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

/ ovo je kanonsko rastavljanje broja na proste činioce

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

⑦ Neka je $A = \{1, \dots, m\}$ i $A_i = \{j \in A \mid j \text{ djeli } p_i\}$

$$|A_i| = \left| \left\{ p_i, 2p_i, \dots, \frac{m}{p_i} p_i \right\} \right| = \frac{m}{p_i}$$

$$A_i \cap A_j = \{\text{multipli su } p_i p_j\}$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{m}{p_i p_j}$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}| = \frac{m}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}$$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \dots \cap \bar{A}_n| = m - \sum \frac{m}{p_i p_j} - \dots + (-1)^n \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_n}$$

$$= m \left(1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} + \dots + (-1)^n \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n} \right)$$

$$= m \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n} \right)$$

11 RAZBIVANJE BROJEVA NA SABIRKE

Particija π čega n , $n \in \mathbb{N}$ u k delova, $k \geq 1$ je
familija $\pi = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ tako da važi $n_i \in \mathbb{N}$ za
svako $i = 1, 2, \dots, k$ i $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Ako particija $\pi = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ sadrži d_i delova jednakih
 i , $i = 1, 2, \dots, k$ tada particiju zapisujemo na sledeći
način $\pi = [1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}]$

Neka je $p(n)$ ukupan broj particija čega n , $n \in \mathbb{N}$.

Funkcija generatrisa niza brojeva $p(n)$ jednaka je

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)^{-1}$$

12. IZRACUNAVANJE BROJA SURJEKCIJA

⑦ Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. Tada je broj svih surjekcija $X_n \rightarrow X_m$ jednak

$$\begin{aligned} m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} &= \binom{n}{0} m^n - \binom{n}{1} (m-1)^n + \binom{n}{2} (m-2)^n - \dots \\ &\quad + (-1)^{m-1} \binom{n}{m-1} 1^n = \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{n}{r} (m-r)^n \end{aligned}$$

⑧ Neka je S skup svih preslikavanja $f: X_n \rightarrow X_m$.
 Znamo da je $|S| = m^n$. Neka je $A_i = \{f \in S \mid i \notin \text{Im} f\}$
 gdje je $\text{Im} f = f(X_n) \subset X_m$, za $i = 1, 2, \dots, m$.
 A_i je dakle skup f za $f: X_n \rightarrow X_m$ koje „preskaču“
 element $i \in X_m$. Komplement od A_i u S je skup

$\bar{A} = \{f \in S \mid i \in \text{Im} f\}$ pa je broj svih surjekcija
 $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m|$. Za $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset X_m$
 skup $\bigcap_{i \in I} A_i = A_I$ je skup svih preslikavanja sa

X_n u $(m-r)$ -člani skup $X_m \setminus I$, pa je
 $|A_I| = (m-r)^n$. Kao takvih r -članih podskupova
 I u X_m ima $\binom{m}{r}$ obilježeno da je broj surjekcija

$$m! \left\{ \begin{matrix} m \\ r \end{matrix} \right\} = \sum_{I \in X_m} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} (m-r)^n$$

Prema FVI

$$\begin{aligned} |F| &= |A_1^c \cap \dots \cap A_m^c| = |A| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \dots \\ &= m^n - m(m-1)^n + \binom{m}{2} (m-2)^n - \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} 1^n \end{aligned}$$

Ako je $n < m$ onda nema surjekcija sa X_n na X_m .

Ako je $n = m$ onda je svaka surjekcija i bijekcija
 i njih je m^n

13. STIRLINGOVI BROJEVI DRUGE VRSTE

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(n, k) \stackrel{\text{def}}{=} \text{broj}$ neuređenih razbijanja n -elementarnog skupa na k blokova (ne praznih delova)

Drugim rečima, Stirlingovi brojevi druge vrste su koeficijenti prelaza iz baze (x^n) u bazu $((x)_n)$ vektorskog prostora polinoma

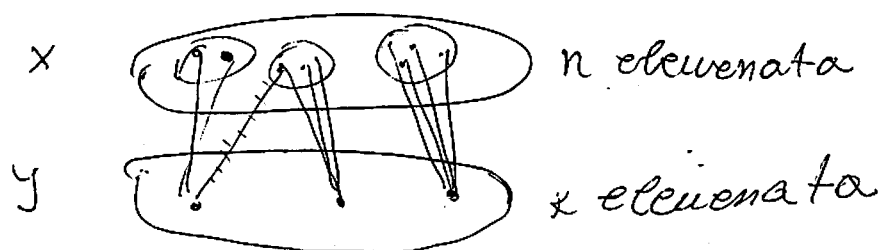
$$S(n, 1) = 1$$

$$S(0, 0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

$$S(n, n) = 1$$

$$S(n, 0) \stackrel{\text{def}}{=} S(0, n) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$S(n, k) = 0 \text{ za } k > n$$



$$|F_{n,k}| = k! \cdot S(n, k)$$

$$* S(n, k) = \frac{|F_{n,k}|}{k!} = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n}{k!} *$$

$$\rightarrow S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^n (-1)^{k-i} \binom{k}{k-i} i^n = \frac{(-1)^{k,k}}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} i^n$$

$k-j \stackrel{\text{def}}{=} i$

$$\textcircled{T} S(n, k) = S(n-1, k-1) + k S(n-1, k)$$

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ $\{x\}$, $X \setminus \{x\}$ - razbijena
 $x \in X$ fiksni elem. $S(n-1, k-1)$

$$S(n, k) = \sum_{e=1}^{n-(k-1)} S(n-e, k-1) \binom{n-1}{e-1}$$

$1, x, x^2, \dots, x^n \rightarrow$ baza svih polinoma

$1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \dots, x(x-1)\dots(x-n+1)$

↳ takođe baza

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) \cdot \underbrace{x(x-1)\dots(x-k+1)}_{k(x)} \quad (x)_k = \begin{cases} x(x-1)\dots(x-k+1), & k=1, 2, \\ 1, & k=0 \end{cases}$$

x^n je broj svih preslikavanja iz $\{1, 2, \dots, n\}$ u $\{1, 2, \dots, x\}$

15. Stirlingovi brojevi prve vrste

$$|F| = S(n, k) k!$$

preslikavanja sa k razlicitih vrednosti ima $\sum_{k=0}^x \binom{x}{k} S(n, k) k! =$

$$= \sum_{k=0}^x \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} S(n, k) k! = \sum_{k=0}^x S(n, k) \cdot (x)_k$$

ali maće i $x(x-1)\dots(x-n+1) = \sum_{k=0}^n S(n, k) \cdot x^k$

$S(n, k)$ - Stirlingovi brojevi I vrste

⑦ $S(n, k) = S(n-1, k-1) - (n-1)S(n-1, k)$

$$(x)_n = (x)_{n-1} |x - (n-1)| \quad 0 < k \leq n$$

$$\sum_{k=0}^n S(n, k) x^k = \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1, k) x^k \cdot (x - n + 1)$$

$$S(n, n) = 1$$

$$S(n, k) = 0 \quad \text{za } k > n$$

14. BELOVI BROJEVI

1) Neka je $|S|=n$. Tada broj particija n S, a što je isto kao i broj relacija ekvivalencije na S jednak je

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

Broj B_n se naziva n-ti Belov broj

Po definiciji $B_0 = 1$

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) \rightarrow \text{Stirlingov broj}$$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i \rightarrow \text{rekurentna f-la}$$

$$\{x\} = B_{n-1}$$

$$\{x, *y\} = \binom{n-1}{1} B_{n-2}$$

$$\{x, \underbrace{*, *, \dots, *}_i y\} = \binom{n-1}{i} B_{n-i-1}$$

$0 \leq i \leq n-1$

$$B_n = B_{n-1} + \binom{n-1}{1} B_{n-2} + \dots + \binom{n-1}{i} B_{n-i} + \dots + \binom{n-1}{n-1} B_0$$

B_n - broj nerazdanih različitih i. e. f-ja

17. GENERATORNE F-FUNKCIJE I NJIHOVO KORIŠĆENJE PRI PREOBRAŽAVANJU

Neka je $a_0, a_1, \dots, a_n$ niz realnih ili kompleksnih brojeva. Njegova generatorna f-ja je

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Sad kada znamo generatornu f-ju, članovi niza su potpuno određeni formulom $a_n = \frac{a^{(n)}}{n!}$

1° Definicija jednakosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \iff a_n = b_n, n \geq 0$$

2° Definicija sume

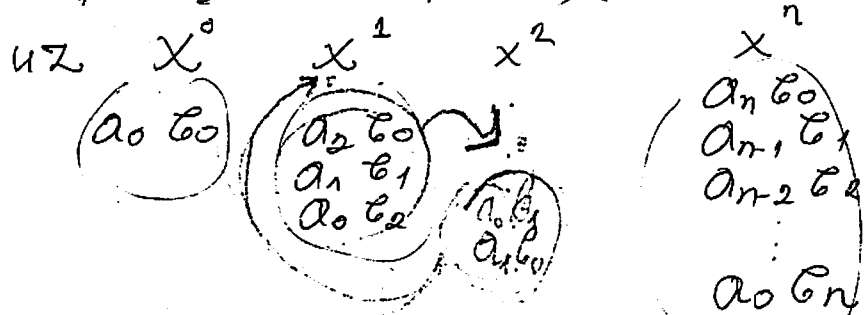
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, n \geq 0$$

3° Definicija produkta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n x^n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots) =$$



Izvod generatriše: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k, k = n-1, n = k+1$$

Integral generatriše: $\int f(t) dt = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$

primer $1, 1, 1, \dots$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

① ~~E~~ g Generatorska f-ja za niz Brojera $p(0), p(1), \dots, p(n) \dots$ je $P(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$

Koeficijent uz x^n u proizvodu

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^m} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}, \quad m \geq n$$

Jednak je broju particija $p(n)$ od n

particije broja n (prikaz broja kao sume prirodnih brojeva)

② Neka su $a, b, c, \dots$ različiti brojevi. Tada je koeficijent uz x^n razvoja u redu od $(1+x^a)(1+x^b)(1+x^c) \dots$

Jednak broju načina da se n zapiše kao suma brojeva $a, b, c, \dots$ tako da se svaki od tih brojeva pojavi kao sumand najviše jednom

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots; \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n; \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\textcircled{1} (1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)(\dots) \dots (1+x+x^2+\dots) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^r = (1-x)^{-r}$$

$$x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_r} = x^{k_1+k_2+\dots+k_r} \text{ puta}$$

$$k_1+k_2+\dots+k_r = n \quad \text{koeficijent uz } x^n \text{ je } \binom{r}{n}$$

$$\sum \binom{r}{n} x^n / \left(\frac{1}{1-x}\right)^r = (1-x)^{-r} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-r}{h} (-x)^h = \sum \frac{(-r)(-r-1)\dots(-r-(h-1))}{h!} (-1)^h x^h = \sum \frac{r(r+1)\dots(r+h-1)}{h!} x^h = \sum \binom{r}{h} x^h$$

17. HOMOGENE LINEARNE DIFERENCNE JEDNAČINE S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

$$0 \cdot a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n = f(n), \quad c_k \neq 0 \quad n=0,1,2,\dots$$

PRIMER: fibonacciov niz

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2 \dots$$

Homogena linearna jednačina je ona kod koje važi da je $f(n)=0$

- homogena znači da nema konstantnih članova
- linearna + homogena znači da skup rešenja čini linearni (vektorski) prostor

1° ako su (a_n') i (a_n'') dva rešenja $\Rightarrow a_n' + a_n''$ je takođe rešenje (ADITIVNOST)

2° ako je (a_n) rešenje $\Rightarrow (\lambda \cdot a_n)$ takođe rešenje (HOMOGENOST)

TRAŽENJE ~~REŠENJE~~ BAZE VEKT. PROSTORA

$$a_n = q^n, \quad q \neq 0$$

$$q^{n+k} + c_1 q^{n+k-1} + \dots + c_k q^n = 0 \quad | : q^n$$

$$q^k + c_1 q^{k-1} + \dots + c_k = 0$$

$$x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_k = f(x) \quad \leftarrow \text{karakteristični polinom}$$

$$(q - q_1)^{r_1} (q - q_2)^{r_2} \dots (q - q_s)^{r_s} \quad \leftarrow \text{može se napisati i u obliku gde su } q_1, \dots, q_s \text{ nule, a } r_1, \dots, r_s \text{ brojevi tih nula}$$

1 važi $r_1 + r_2 + \dots + r_s = k$
 $r_i > 0$

① Pretpostavimo da su svi karakteristični koreni (rešenja)

$x_1, x_2, \dots, x_r$ rekurzivne relacije (lin. jednačine)

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}, \quad c_r \neq 0$$

$n \geq r$, međusobno različiti. Tada je opšte rešenje dat

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \dots + \lambda_r x_r^n$$

② a_n je neko rešenje rekurzivne relacije. Tada je a_n potpuno određeno početnim uslovima $a_0 = c_0, a_1 = c_1, \dots, a_{r-1} = c_{r-1}$. Stoga možemo odabrati

Konstante $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ tako da važi:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = C_0$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r = C_1$$

$$\lambda_1 x_1^{r-1} + \lambda_2 x_2^{r-1} + \dots + \lambda_r x_r^{r-1} = C_{r-1}$$

stavljamo u matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \dots & x_r^{r-1} \end{bmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$$

(Vandermondeova matrica)

primer

~~$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3}, \quad a_0 = -1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4$$~~

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6)(x-2) = x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + x + 6 \\ - x^3 + 2x^2 \\ \hline -2x^2 + x + 6 \\ + 2x^2 - 4x \\ \hline -3x + 6 \\ + 3x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3)(x-2)$$

$$x_0 = 2, \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

$$a_n = \lambda_1 \cdot (-1)^n + \lambda_2 \cdot 2^n + \lambda_3 \cdot 3^n$$

$$-1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (\text{Gauss})$$

$$2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$$

$$4 = \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1$$

$$\Rightarrow a_n = 3^n - 2^n - (-1)^n$$

Ukoliko koreni nisu ^{svi} međusobno različiti, onda opšte rešenje rekurzivne relacije ima drugačiji oblik

npr. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

ima dvostruko rešenje 2

stoga je opšte rešenje jednačine

$$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot \underline{n \cdot 2^n}$$

⑦ Neka su $x_1, x_2, \dots, x_t$ svi različiti koreni karakteristične ~~re~~ jednačine rekurzivne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}, \quad c_r \neq 0, \quad n \geq r$$

i neka se x_i koren ponavlja $1, 2, \dots, t$ puta

Tada je partikularno rešenje te rekurzije, koja odgovara korenu x_i , $i = 1, 2, \dots, t$ dato sa

$$\begin{aligned} a_n^{(i)} &= \lambda_1^{(i)} x_i^n + \lambda_2^{(i)} n x_i^n + \dots + \lambda_{v_i}^{(i)} n^{v_i-1} x_i^n = \\ &= (\lambda_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)} n + \dots + \lambda_{v_i}^{(i)} n^{v_i-1}) x_i^n \end{aligned}$$

$\lambda_j^{(i)}$ - konstante

opšte rešenje je dato sa $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \dots + a_n^{(t)}$

18. NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCNE JEDNAČINE

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n = f(n)$$

nehomogena $\Leftrightarrow \underline{f(n) \neq 0}$

$$(C_n) \quad C_{n+k} + c_1 C_{n+k-1} + \dots + c_k C_n = f(n)$$

$$(a_n - C_n) \cdot (a_{n+k} - C_{n+k}) + c_1 (a_{n+k-1} - C_{n+k-1}) + \dots + c_k (a_n - C_n) = 0$$

$\Rightarrow$ rešenja nehomogene jednačine = rešenja homogene + partikularno rešenje

tablica partikularnih rešenja za neke slučajeve:

$f(n)$	partikularno rešenje a_n
$d = \text{const}$	A
$d \cdot n$	$A_1 n + A_0$
$d \cdot n^2$	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$d \cdot n^k$	$A \cdot d^n$

* konstante A, A_0, A_1, A_2 se određuju preko početnih uslova

PRIMER

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 2a_{n-1} - 1$$

$$a_n^n = \lambda \cdot 2^n - \text{homog.}$$

$$a_n' = A - \text{part.}$$

$$A = a_n' = 2a_{n-1}' + 1 = 2A + 1$$

$$A = 2A + 1 \Rightarrow A = -1$$

$$a_n' = -1$$

$$a_n = a_n^n + a_n' = \lambda \cdot 2^n - 1$$

$$1 = \lambda \cdot 2 - 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \boxed{a_n = 2^n - 1}$$

19. GRAF, PODGRAF, GEOMETRIJSKA REPREZENTACIJA, KOMPLEMENT

$G(V, E)$ V - konačan skup vrhova (čvorova)

$v_1, v_2, \dots, v_n$

E - skup grana (ivica)

$e_1, e_2, \dots, e_n$

- Graf je uređen par (V, E)

$e_i = \langle v_j, v_k \rangle$ neuređen par čvorova

čvorovi v_j i v_k su susedni

ukoliko je $e_i = \langle v_j, v_k \rangle$ uređen par čvorova
onda je graf orijentisan (digraf)

- Za grane se kaže da su PARALELNE ukoliko spajaju
isti par vrhova

$e = \langle v, v \rangle \rightarrow$ PETLJA (grana koja vrh spaja sa
samim sobom)

- PRAZAN GRAF je onaj koji nema grane

- MULTI GRAF je onaj koji nema vrhova

- Graf je PROST ukoliko nema ni petlje ni paralelne grane

PODGRAF $G' = (V', E')$ grafa $G = (V, E)$

Graf $G' = (V', E')$ je podgraf grafa $G = (V, E)$ ako važi:

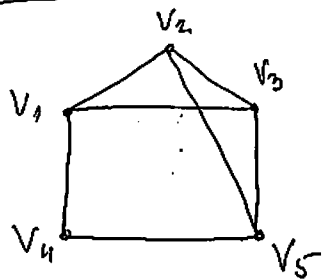
$$V' \subseteq V \text{ i } E' \subseteq E$$

$$(v_i, v_j) \in E' \Leftrightarrow v_i, v_j \in V'$$

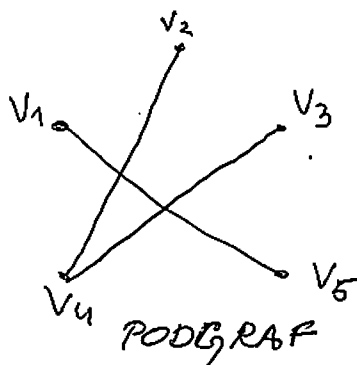
- Graf se predstavlja tako što se svaki čvor
predstavi kao tačka u ravni, a svaka grana
kao luk koji spaja dve tačke

- Ako je $G = (V, E)$ zadan prost graf, onda je $\bar{G} = (V, \bar{E})$
njegov komplement ukoliko je $(u, v) \in \bar{E} \Leftrightarrow (u, v) \notin E$

Primer



GRAF



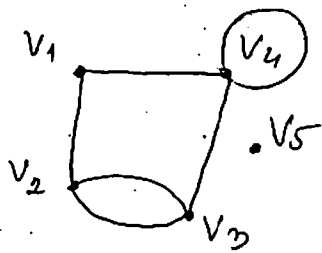
PODGRAF

Linija grafa i komplementa je KOMPLETAN GRAF

20. STEPEŇ VRHA GRAFA, TEOREME O STEPE-
NIMA VRHOVA

Stopen vrha je število $d_G(v_i)$ krogov, ki predstavljajo število incidentnih ~~vezi~~ robov vrha v_i .

$e_i = \langle v_j, v_k \rangle$ kažemo da je e_i incidentan vektorima v_j, v_k .
Isotivan vektor ima stepen 0. Svaka petlja se čezgodi dva puta



$$d(u_i) = 2$$

$$\text{cl}(U_2) = 3$$

$$d(v_3) = 2$$

$$d(v_4) = 4$$

$$d(V_5) = 0$$

$$d(9) = 2 + 3 + 3 + 4 + 0 = 12$$

Ukupan stepen grafa je jednak zbiru stepena svakog od rebo-
va datog grafa

(T1) Zbir stepena svih vrhova grafa jednak je dvostrukom broju greana (pa je stoga i broj čvorova neparnog stepena paran)

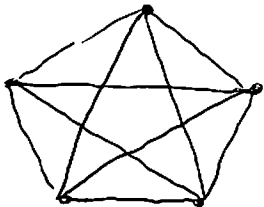
(T2) Broj vechora neparnog stepena je paran

⑦ $\underbrace{V_1, V_2, \dots, V_r}_{\text{veľovi paenog stepena}}, \underbrace{V_{r+1}, \dots, V_n}_{\text{veľovi nepaenog stepena}}; m\text{-beg geana.}$

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

$$\underbrace{d(U_1) + \dots + d(U_r)}_{\text{paeno}} + \underbrace{d(U_{r+1}) + \dots + d(U_n)}_{\text{paeno}} = 2m$$

Ukoliko je stepen svih vrhova u grafu isti on da se
takav graf zove REGULARNI graf

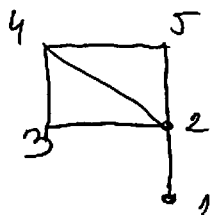
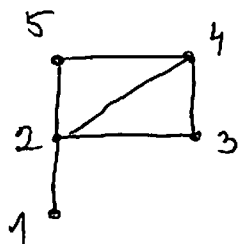


21. |IZOMORFIZAM GRAFA

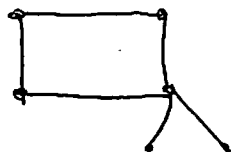
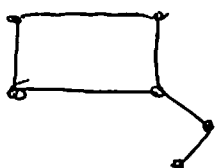
Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su **IZOMORFNI** ako postoji „1-1“ ; „na“ preslikavanje $f: V_1 \rightarrow V_2$ tako da $(u_i, u_j) \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u_i), f(u_j)\} \in E_2$
tj. postoje grane koje čuvaju incidentnost

Ako su grafovi G_1 i G_2 izomorfni onda pišemo

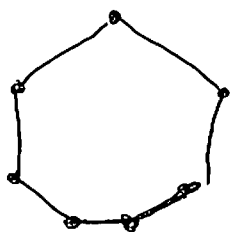
$$G_1 \equiv G_2 \quad \text{ili} \quad G_1 \sim G_2$$



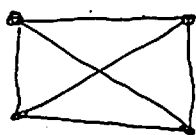
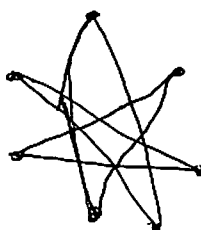
- primer kada su dva grafa izomorfna



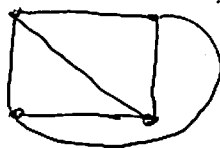
- primer kada dva grafa nisu izomorfna



$\equiv$



$\equiv$



22. ŠETNJE, STAZE, CIKLI U GRAFU

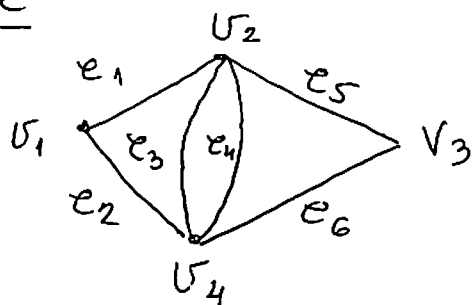
Šetnja: dužine k u grafu $G = (V, E)$ je niz $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ čvorova i grana tako da je $e_i = v_{i-1} v_i$ za $i = 1, 2, \dots, k$. Čvorovi v_0 i v_k su krajnji čvorovi šetnje, i kaže se da je to šetnja između čvorova v_0 i v_k . Šetnja je zatvorena ukoliko je $v_0 = v_k$.

Staza je šetnja u kojoj se nijedna grana ne ponavlja.

Put je šetnja u kojoj se nijedan čvor ne ponavlja.

Ciklus je zatvorena staza u kojoj se nijedan čvor ne ponavlja, izuzev prvog i poslednjeg.

primer



šetnja : $v_1, e_2, v_4, e_3, v_2, e_4, v_4, e_2, v_2$

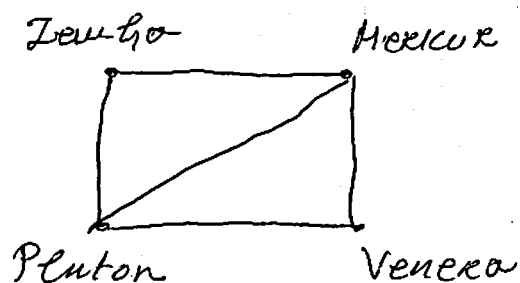
staza : $v_1, e_2, v_4, e_3, v_2, e_5, v_3, e_6, v_4, e_4, v_2, e_1, v_1$

put : v_1, e_2, v_4, e_3, v_2

ciklus : $v_1, e_2, v_4, e_3, v_2, e_1, v_1$

23. POVEZANOST, KOMPONENTE POVEZANOSTI, ALGORITAM ZA UTVRĐIVANJE POVEZANOSTI

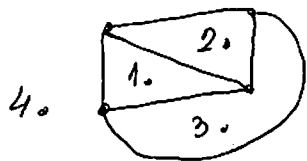
- Čvorovi u_i i u_j grafa G su povezani ako u G postoji put čiji su krajnji čvorovi u_i i u_j . Graf G je povezan ako su svaka dva njegova čvora povezana.
- Komponente grafa G su njegovi maksimalni povezani podgrafovi.
- Graf je nepovezan ako G nije povezan
 $u_i \not\sim u_j \Leftrightarrow \nexists$ put koji počinje u u_i a završava u u_j
 $\uparrow$
 relacija ekvivalencije
- Graf $G = (V, E)$ je povezan ako i samo ako za svaku particiju $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$ postoji grana $e \in E$ koja spaja čvor iz V_1 sa čvorom iz V_2 tj. za koju je $|e \cap V_1| = 1$ i $|e \cap V_2| = 1$
- Klase ekvivalencije na koje ova relacija razbija čvorove jesu KOMPONENTE POVEZANOSTI



Zemlja - Merkur
 Pluton - Venere
 Zemlja - Pluton
 Pluton - Merkur

24. PLANARNI GRAFOVI

Planarni (ravni) grafovi su oni grafovi koji imaju takvu reprezentaciju u ravni da im se ivice ne seku. Oni razlikuju ravan na pljosni i to po Ojlerovoj teoremi



Kod planarnih grafova uvek važi Euler-ova teorema

$$t - i + p = 2$$

t - temena i - ivice p - pljosni

Dokaz: Indukcijom po broju ivica

$$t = 2 \quad i = 1 \quad p = 1$$

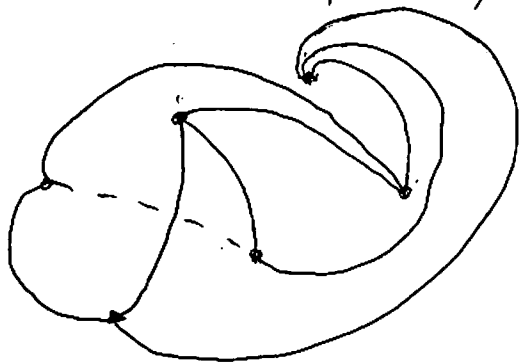
Pretpostavimo da je T tačkan grafa sa i ivica
 (koliko uklonimo ivicu koja razdvaja oblast, suojiće se i broj pljosni)
 $t - (i - 1) + (p - 1) = 2$ tj $t - i + p = 2$

Primer ne planarnog grafa

$K_{3,3}$ kompletan bipartitivni graf

Kompletan - svaki vrh ima k veza sa ostalim vrhovima

Bipartitivni - postoje 2 podskupa vrhova pri čemu unutar sebe ~~niko~~ nisu povezani a između podskupova jesu



3 kuće i 3 čunara

$$t = 6$$

$$i = 9$$

$$6 - 9 + p = 2$$

$$p = 5 - \text{da bi bio ravan}$$

$$4p \leq 2i$$

$$4 \cdot 5 \leq 2 \cdot 9 \quad \text{fals}$$

$\Rightarrow$ nije ravan graf

25. Euler - ova FORMULA

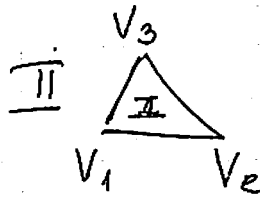
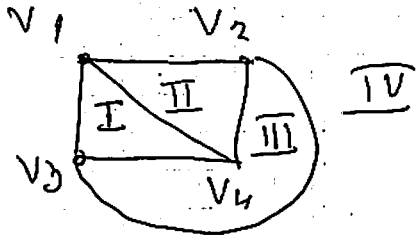
① $t - i + p = 2$

t - teмена

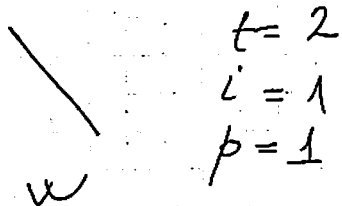
i - ivice

p - plosni

- Uvek važi za ravne grafove



② Indukcijom po broju čvorova



$t = 2$

$i = 1$

$p = 1$



$t = 3$

$i = 3$

$p = 2$

Slučaj kada uklonimo ivicu koja razgrta oblast na dva dela

$t - (i - 1) + (p - 1) = 2$ tj. $t - i + p = 2$

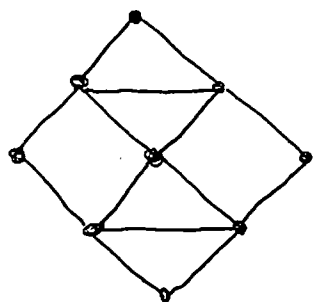
26. Euler-ovi grafovi, crtanje u jednom potezu

Zatvorena staza koja prolazi kroz sve grane grafa G naziva se **Eulerova kontura**.

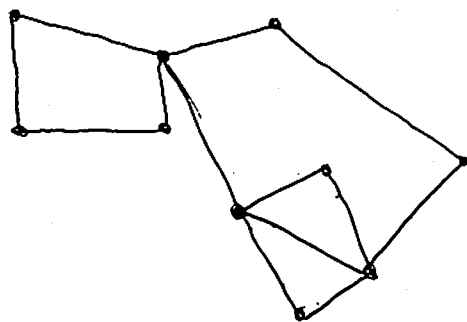
Staza koja nije zatvorena i koja prolazi kroz sve grane grafa G , naziva se **Eulerov put**. Graf G je **Eulerov** ako sadrži Eulerovu konturu.

① Graf G je Eulerov ako je povezan i ako su svi vrhovi parni

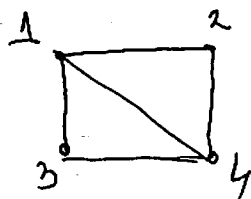
② Graf ima Eulerov put sa krajevima A i B ako je povezan i ako su A i B jedini neparni čvorovi grafa



Eulerov graf



Eulerov graf



Eulerov put 1-4

27. NAJKRACI, PUTEVI, DIJKSTRA ALGORITAM

Mreže su grafovi u kojima su zadate dužine grana

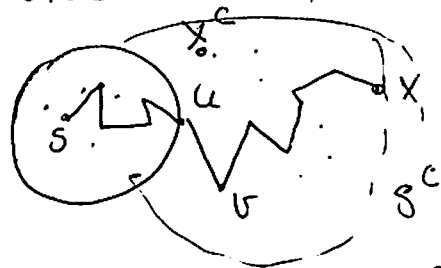
Put od čvora S do svih ostalih čvorova u grafu

ULAZ: orijentisani graf $G=(V,E)$ $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

$$\ell(i,j) \geq 0$$

IZLAZ: dužina najkrace putanje od fiksnog vrha S do ostalih vrhova

DIJKSTRA ALGORITAM



$$d(S, x) \text{ ili } d(x)$$

$$d(x) = d(u) + \ell(u, v) + d(v, x)$$

$$\geq d(u) + \ell(u, v)$$

$$\min_{x \in S^c} d(S, x) = \min_{u \in S} \min_{v \in S^c} \{d(u) + \ell(u, v)\}$$

$$= \min_{v \in S^c} \min_{u \in S} \{d(u) + \ell(u, v)\}$$

$$= \min_{u \in S} \{d(u) + \ell(u, \hat{x})\}$$

prva tačka iz S^c
koja se direktno
spaja sa poslednjom
iz S

$I_S(x)$ - dužina najkraceg puta od S
do x , preko vrhova iz S

$$x \in S, I_S(x) = d(x)$$

$$I_S(x) = \min (d(u) + \ell(u, x)) ; \min_{x \in S^c} I_S(x) = d(\hat{x})$$

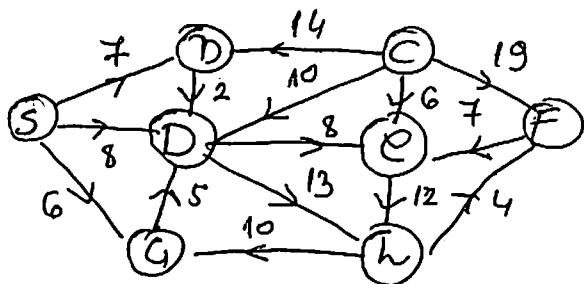
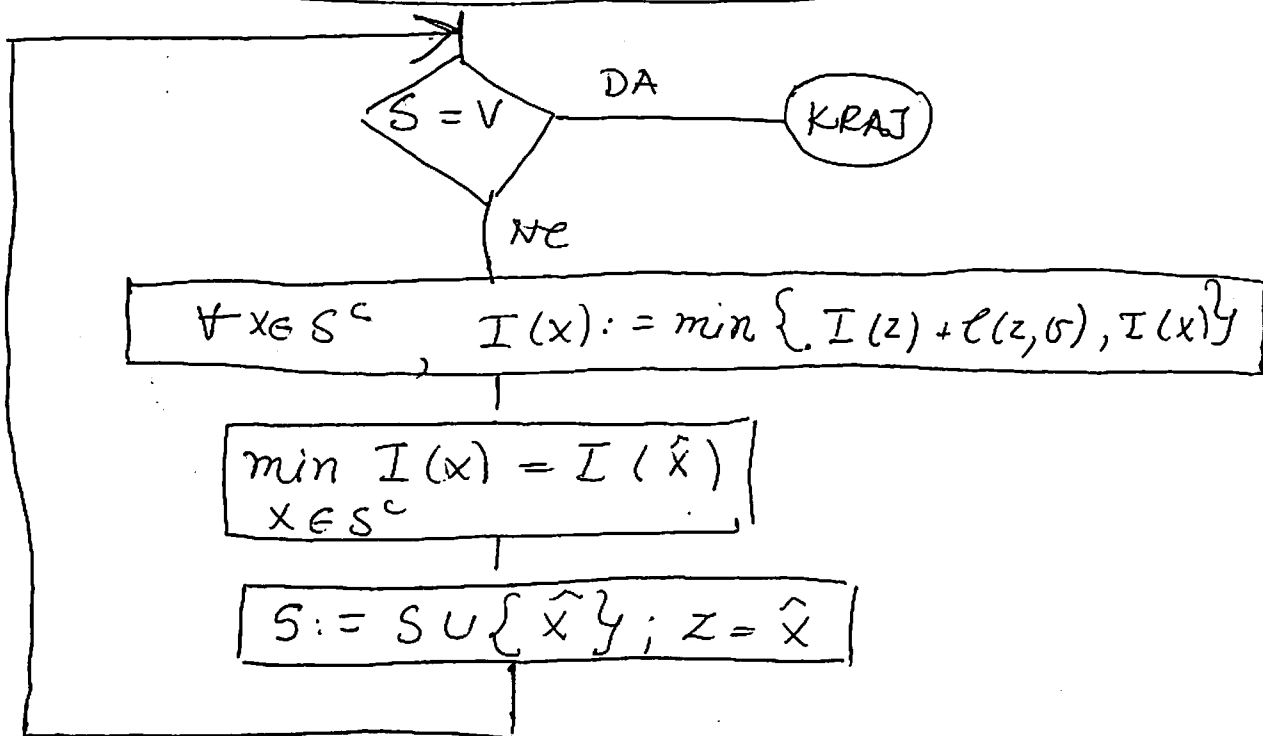
$$S' = S \cup \{\hat{x}\}$$

$$I_{S'}(x) = \begin{cases} I_S(x) & \text{ako put } \text{ide} \text{ ne ide preko } \hat{x} \\ d(\hat{x}) + \ell(\hat{x}, x) & \text{ako put ide preko } \hat{x} \end{cases}$$

$$= \min \{I_S(x), I_S(\hat{x}) + \ell(\hat{x}, x)\}$$

Složenost algoritma je $O(n^2)$

$$S = \{s\} \quad I(s) = 0 \quad I(x) = \infty, x \neq s, z = s$$



$$I(s) + l(s, b) = 0 + 7 = 7$$

$$\min \{ \infty, 7 \} = 7$$

$$I(s) + l(s, c) = 0 + \infty = \infty$$

=

$$\min \{ 8, 6 + 5 \} = 8$$

$$\min \{ 8, 7 + 2 \} = 8$$

$$\min \{ \infty, 8 + 8 \} = 16$$

$$\min \{ \infty, 8 + 13 \} = 21$$

$$\min \{ 21, 16 + 12 \} = 21$$

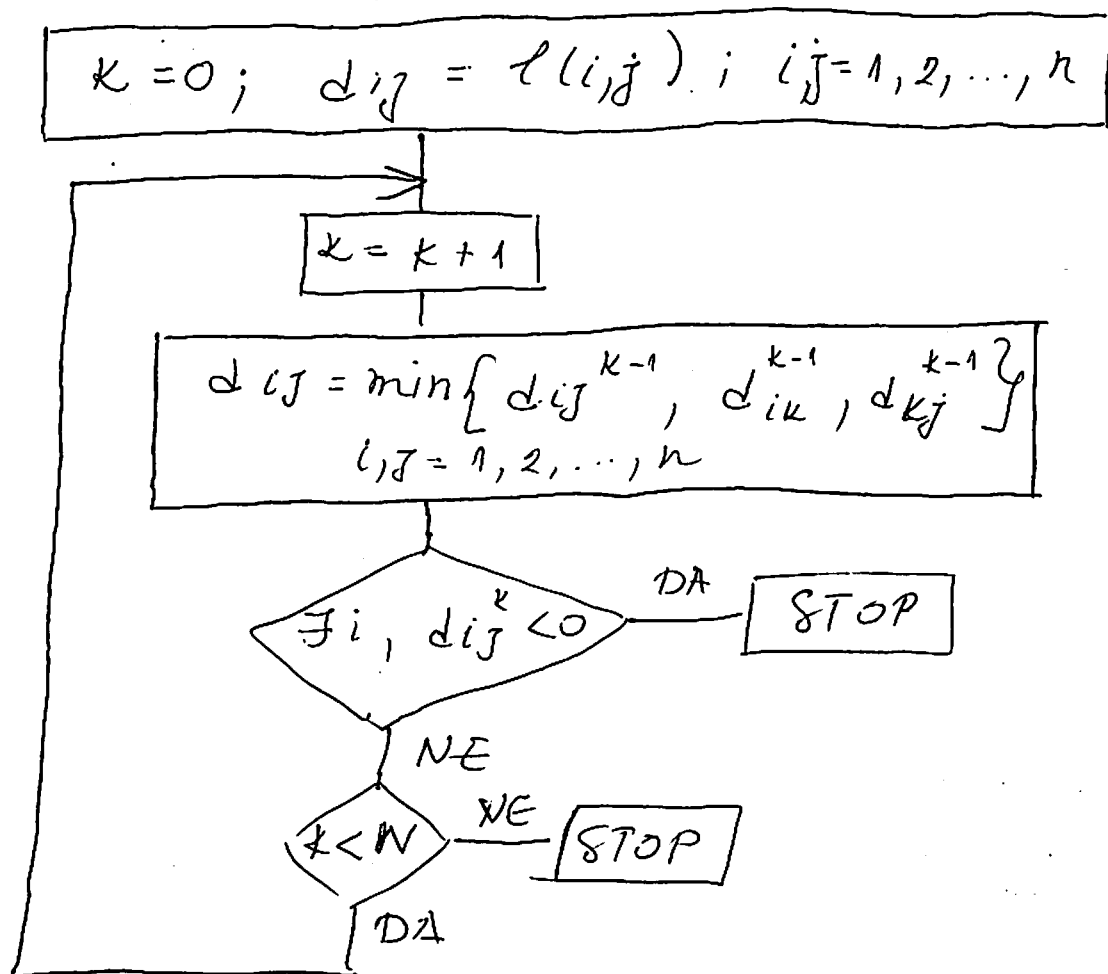
$$\min \{ \infty, 21 + 4 \} = 25$$

	S	B	C	D	E	F	G	H
(S)*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
(B)	7	∞	8	∞	∞	6*	∞	∞
(C)	7*	∞	8	∞	∞	(6)	∞	∞
(D)	(7)	∞	8*	∞	∞	(6)	∞	∞
(E)	(7)	∞	(8)	18*	∞	(6)	21	∞
(F)	(7)	∞	(8)	(16)	∞	(6)	21*	∞
(G)	(7)	∞	(8)	(16)	25*	(6)	(21)	∞
(H)	(7)	∞	(8)	(16)	(25)	(6)	(21)	(21)

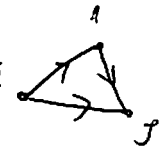
28. NAJKRAĆI PUTEVI, FLOYD-WARHELL-ov ALGORITAM

ULAZ: orijentisani graf sa rastojanjima $\ell(i,j) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
i važi $\ell(i,i) = \infty$

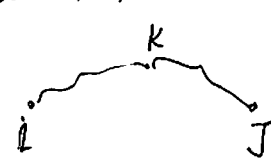
IZLAZ: matrica najkraći k rastojanja parova vrhova
za $k=0$ početna matrica ima originalna zadata
rastojanja $d_{ij} = \ell(i,j)$



⑦ d_{ij}^k je najkraće rastojanje od i do j preko vrhova čiji je indeks $k \in \{1, 2, \dots, k\}$

⑧ $k=1$ $d_{ij}^1 = \min\{d_{ij}^0, d_{i1}^0 + d_{1j}^0\}$ i 

pp. za $n-1$

$$d_{ij}^k = \min\{d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\}$$


e_{ij}^k - najveći indeks vrha na najkraćem putu od i do j preko vrhova iz $\{1, \dots, k\}$

$$e_{ij}^k = \begin{cases} k_{k-1} & \text{ako put ide preko } k \\ e_{ij}^{k-1} & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

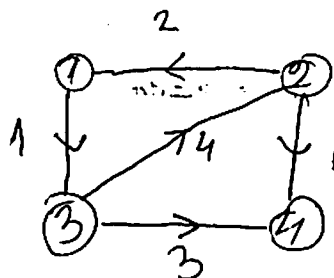
$$e_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$i - 1 - 2 - 3 - 4$$

$$e_i^n = 1 \quad e_j^n = 8$$

Stoženost algoritma je $O(n^3)$

PRIMER



$k=0$

∞	∞	1	∞	0	0	0	0
2	∞	∞	1	0	0	0	0
∞	4	∞	3	0	0	0	0
∞	∞	∞	∞	0	0	0	0

$k=1$

∞	∞	1	∞	0	0	0	0
2	∞	3	1	0	0	1	0
∞	4	∞	3	0	0	0	0
∞	∞	∞	∞	0	0	0	0

$k=2$

∞	∞	1	∞	0	0	0	0
2	∞	3	1	0	0	1	0
6	4	7	3	2	0	2	0
∞	∞	∞	∞	0	0	0	0

$$e_{14}^3 = 3$$

$$e_{13}^4 = 0$$

$$e_{34}^4 = 0$$

k	7	5	1	4	3	3	0	3
	2	7	3	1	0	3	1	0
	6	4	7	3	2	0	2	0
	∞	∞	∞	∞	0	0	0	0

1-3-4

29. DRVO, KARAKTERISTIČNA SVOJSTVA

Drvo je povezani graf bez ciklusa

Suma je graf koji ne sadrži cikluse tj. graf čija je svaka komponenta povezanosti drvo

① Sledeći izrazi su ekvivalentni:

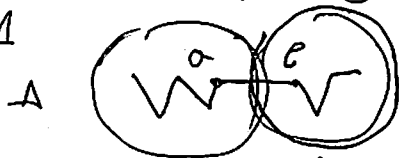
- 1° T je drvo sa n vrhova.
- 2° T je acikličan i ima $n-1$ granu
- 3° T je povezan i ima $n-1$ granu
- 4° T je povezan i svaka grana je most (njegovim uklanjanjem graf postaje nepovezan)
- 5° Svaka dva vrha spoja tačno 1 prost put za n , tj. dolazi se iz jednog vrha do drugog tačno 1 putom
- 6° T je acikličan i dodavanjem bilo koje nove grane pravi tačno 1 ciklus

② Izvodi se po principu $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$ pp. da je broj vrhova $1 \Rightarrow$ broj grana je $n-2$ 1 grana

pp. da za sva drveća sa manje od n vrhova važi da imaju 1 granu manje nego vrhova

$n \geq 1$



Uočimo skup A onih vrhova do kojih se može doći iz a ne koristeći b i slično skup B ... ne koristeći a

$V = A \cup B$ je skup svih vrhova i $A \cap B = \emptyset$

Skupovi A i B su ustvari drveća (i povezani su) sa po p odnosno q vrhova. Neka je p broj vrhova A i q broj vrhova B ($p+q=n$). I p i q su manji od n pa skup A ima $p-1$ granu a B $q-1$ granu, a u celom $A \cup B$ ima $p-1+q-1+1 = p+q-1 = n-1$ grana od a do b

$$2^{\circ} \Rightarrow 3^{\circ} \quad p_1 + \dots + p_k$$

$$(p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \dots + (p_k - 1) = \underbrace{(p_1 + \dots + p_k)}_n - k = n - k$$

$$n - k = n - 1 \Rightarrow k = 1$$

$3^{\circ} \Rightarrow 4^{\circ}$ pp. da postoji grana čijim se uklanjanjem graf ne raspada, ostaje povezan. Nastavimo sa skidanjem 1 po 1 grane i tako skinemo k grana, i graf je i dalje povezan ali kad skinemo $k+1$ grana graf postaje nepovezan. To znači da su preostale grane mostovi $\Rightarrow$ to što preostaje je drvo $\Rightarrow$ acikličan graf. Prvo je broj grana bio $n-1$ i skinuli smo k grana pa je $n-1-k = n-1 \rightarrow$ drvo mora imati $n-1$ vrhova

$\Rightarrow k=0$. Znači, ne postoji grana koju možemo da skinemo a da graf ostane povezan

$4^{\circ} \Rightarrow 5^{\circ}$ trivijalno, jer ako bi dva vrha spojena 2 puta graf bi imao ciklus

$5^{\circ} \Rightarrow 6^{\circ}$ jasno je da je graf acikličan, a što se tiče tačno jednog cikla to je zato što imamo n vrhova i svata 2 spoja tačno jedan prst put, dodavanjem nove grane moramo spojiti već spojene vrhove a time napravimo ciklus. Ne mogu se napraviti dva cikla dodavanjem 1 grane ukoliko ranije nije bilo cikla

$6^{\circ} \Rightarrow 1^{\circ}$ trivijalno

- Čvor stepena 1 ~~je~~ drveća naziva se LIST
- CENTAR stabla se sastoji od jednog ili dva susedna čvora a dobija se istovremenim uklanjanjem svih listova stabla i ponavljanjem ovog postupka dok ne ostanu najviše dva čvora početnog stabla.

30. KRUSKALOV ALGORITAM - minimalni skelet

ULAZ: graf sa težinama grana (∞ ako nema grana)
graf mora biti povezan

K1. treba odabrati najlakšu granu od ponuđenih

K2. ako su izabrane $e_1, \dots, e_{k-1}$ grana, birati
onda e_k najlakšu granu koja sa ostalim granama
ne gradi cikl

Ponavljati dok je moguće

IZLAZ: razapinjajuće drvo sa minimalnom težinom

31. PRIMOV ALGORITAM - minimalni skelet

ULAZ: povezan graf sa težinama grane

K1. izabere se vrh $v \in G$ $T = \{v\}$

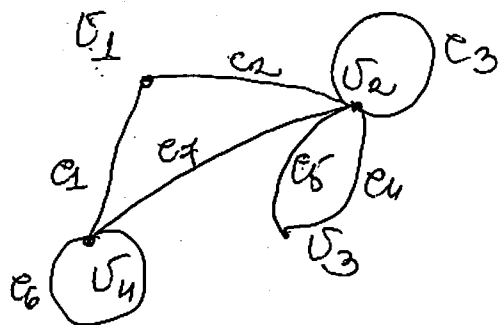
K2. $V = G \setminus \{v\}$

K3. for $i=1$ to $i=n-1 \rightarrow$ naći granu $e \in E$ koja
spaja T sa V i najmanje je težine među takvim.
Neka je w drugi kraj od e ($w \in V$)
Dodati e i w u grane odnosno vrhove od T
a izbaciti w iz V
next i

IZLAZ: minimalni skelet T

22. Predstavljanje grafa matricama, preobrazovanje šetnji

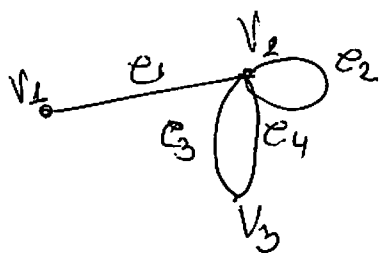
Neka je $G = (V, E)$ graf sa vrhovima $v_1, v_2, \dots, v_n$.
Matrica susedstva grafa G je $A = (a_{ij})$ gde je a_{ij} broj grana koje spajaju vrhove v_i i v_j .



$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

Preko matrice susedstva tako možemo naći broj šetnji različitih dužina između svaka dva vrha.

Treba samo nekoliko puta pomnožiti matricu susedstva samu sa sobom i dobijene vrednosti a_{ij} predstavljaju broj šetnji željene dužine među vrhovima v_i i v_j .



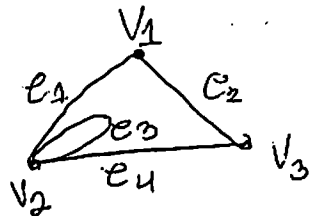
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

šetnje dužin 2 $\rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

provjerimo za šetnje od v_2 do v_2 dužine 2

$$\left. \begin{array}{l} v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \\ v_2 \xrightarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_2} v_2 \\ v_2 \xrightarrow{e_3} v_3 \xrightarrow{e_3} v_2 \\ v_2 \xrightarrow{e_3} v_3 \xrightarrow{e_4} v_2 \\ v_2 \xrightarrow{e_4} v_3 \xrightarrow{e_3} v_2 \\ v_2 \xrightarrow{e_4} v_3 \xrightarrow{e_4} v_2 \end{array} \right\} 6$$

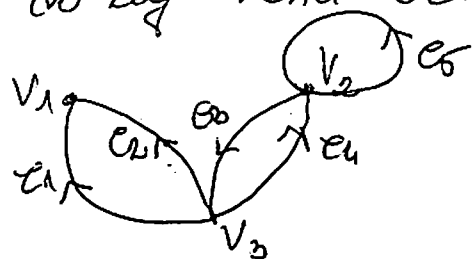
Matrica incidencije B je matrica koja nam govori o povezanosti između vechova v_i o odnosu grana i vechova. Ukoliko grana e_1 povezuje vechove v_1 i v_2 onda u matricu upisujemo 1 na ta dva mesta. Ukoliko je e_k petlja vechu v_k onda na to mestu u matricu upisujemo 2 .



$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

33. Predstavljajte orijentisanoq grafa

Orijentisani grafovi se kao i neorijentisani mogu predstaviti pomoću matrica susjedstva i matrice incidencije. Ali mora se voditi računa koja grana polazi iz kog vrha i do kog vrha vodi.



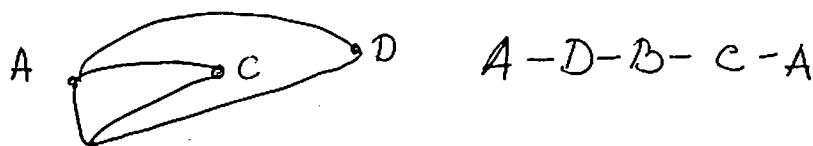
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Kod matrice incidencije upisujemo 2 tamo gde je petlja, -1 tamo gde grana uvire, 1 gde grana izvire a 0 za ostalo

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

34. Hamiltonovi grafovi

Hamiltonov graf je graf koji ima Hamiltonov cikel tj. cikel koji prolazi kroz sve vrhove tačno 1.



[T] (Opre-ova) Graf je Hamiltonov ako zadovoljava.

$$\underbrace{s(u) + s(v)}_{\text{stepen čvorova}} \geq n, \quad \forall u, v \text{ koji nisu susjedni}$$

u gornjem primjeru $s(A)=3$ $s(D)=2$

$$\frac{n=4}{3+2 \geq 4 \quad \checkmark}$$

Do Diraka graf je Hamiltonov ako je $s(v) \geq \frac{n}{2}, \forall v \in V$

Problem trgovatelkog putnika

Trgovatelki putnik polazeći iz matičkog grada treba da poseti tačno jedanput svaki grad iz zadatog spiska i da se vrati kući. On treba da odabere i najkraći put

$e = (i, j)$ dužine c_{ij}

ukla je $x_{ij} \in \{0, 1\}$ indikator koji je postavljen na 1 ako je put koristio granu e_{ij} , a 0 ako nije

$$(\forall i) \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{sve što ulazi iz } i$$

$$(\forall j) \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{sve što ulazi u } j$$

ali ovo nisu dovoljni uslovi jer se mogu zaviti više Hamiltonovih putanja (moguć) pa nam treba i uslov $\forall S \subset V$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1$$

$$F = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \quad \text{(kaži se da bude minimalna)}$$

Ovaj problem traži minimum f. je (dužine predanog puta)
definisan na konačnom skupu (skup permutacija gradova)

- o Današnji algoritmi mogu efikasno da reše problem za nekih
80 gradova ali stakim obzirom povećanjem broja gradova

35. Simplex metoda

Služi za minimizovanje linearnih sistema

Dobro je za dimenzije matrice $A_{m \times n}$ $n, m \leq 200$

$$\min \sum_{i=1}^n C_i x_i$$

$$Ax = b, x \geq 0$$

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - D_i = b_i$$

x_i - proizvoljno znato

$$x_i = x_i'' - x_i'$$

$b \geq 0$ mora biti (ako je $b < 0$ pomnožimo jednačinu sa -1); rešimo problem

matrica A mora da ima jediničnu podmatricu matkevalnog ranga

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\min \sum_{i=1}^n C_i x_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{bmatrix} = b$$

$$x \geq 0, x_n = 0, x_B = b$$

x_n - ne bazisne promenljive

x_B - bazisne promenljive

ALGORITAM SIMPLEX METODE

$$a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}$$

$$a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn}$$

$$C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n$$

K1. Da li je za $\forall j \ C_j > 0$? ako jeste idemo na K5.

K2. $J_0 : C_j < 0$

$\forall i$ ispitujemo da li su svi $a_{ij} < 0$? ako jeste idemo na

K3. $\min \left\{ \frac{C_{j_0}}{a_{ij_0}} \mid a_{ij_0} > 0 \right\} = \frac{C_{j_0}}{0.1_{j_0}}$ / tražimo naj manju

K4. Svaku vrednost dodajemo u vrstu pomnoženju sa

$\left(-\frac{a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}}\right)$ Vrstu i_0 podelićmo sa $a_{i_0j_0}$. Vrsti C dodamo
vrstu i_0 pomnoženu sa $\left(-\frac{C_{j_0}}{a_{i_0j_0}}\right)$ Nakon ovog
idećmo na K1.

K5. STOP! došli smo optimalno rešenje $x_n=0, x_b=6$

K6. STOP! problem je neograničen $\min \langle C, x \rangle = -\infty$

Primer max $4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$$

$$\min -4x_1 - x_2 - 5x_3 - 3x_4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + u_1 = 1$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 + u_2 = 55$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 + u_3 = 3$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \quad u_j \geq 0 \quad j = \overline{1, 3}$$

37. Cerčova teza, izračunljivost f -ja

U teoriji izračunljivosti Cerčova teza je hipoteza koja govori pravo di računanja. Ova teza tvrdi da se za svako moguće izračunavanje može napraviti algoritam koji će ga izračunavati na računaru, pod uslovom da je dovoljno dobro prosto na računaru ~~i da je~~ kao i računalo za izračunavanje.

Teza nije dokazana matematički, niti se može dokazati.

Usvaja se kao fizički zakon ili definicija.

Neformalno, Cerčova teza tvrdi da se algoritmi mogu precizno napraviti i da računari mogu da izvršavaju te algoritme.

Računari teoretski mogu da izvršavaju bilo koji algoritam, ili drugim rečima, svi računari su međusobom jednaki kada je u pitanju teoretska snaga izračunavanja, i nemoguće je napraviti mašinu za računanje koja je brža i bolja od jednostavnog računara (ovde je zanemareno brzina računara, memorijski kapacitet).

Formalno Cerčova teza tvrdi da:

* Svaka f -ja koja ^{se popravi posmatra kao} ~~je~~ izračunljiva, može se izračunati preko Turingove mašine.

Svaki neinteraktivni računarski program se može prevesti u Turingovu mašinu, i svaka Turingova mašina se može prevesti u bilo koji Turing kompletan programski jezik, tj. Bilo koji Turing kompletan programski jezik je dovoljan za izračunavanje bilo kojeg algoritma.

Mažna Cerčova teza:

Svaki "razuman" model izračunavanja može se ^{efikasno} simulirati na probabilističkoj Turingovoj mašini.

38. Primitivno rekurzivne f-je

$$f: N^n \rightarrow N$$

1) Sve konstantne f-je su primitivno rekurzivne

2) Sve projekcije su rekur. f-je

$$p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$$

3) $S: N \rightarrow N$

$$S(n) = n+1$$

sledbenik od n

4) Sve f-je koje su kompozicije primitivno rekurzivnih su primitivno rekurzivne

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

h, g - bazične

5) Svaka f-ja dobivena primitivnom rekurzijom od primitivne rekurzivne f-je je primitivno rekurzivna
 f sa k promenljivih nastaje od g sa $k-1$ promenljivom i h sa $k+1$ promenljivom rekurzijom ako važi

$$f(0, n_2, \dots, n_k) = g(n_2, \dots, n_k)$$

$$f(n+1, n_2, \dots, n_k) = h(f(n, \dots, n_k), n_1, n_2, \dots, n_k)$$

6) nema drugih ovako formiranih

Primer sabiranja

$$\Sigma(x, y) = x+y$$

$$\Sigma(x, 0) = x$$

$$\Sigma(x, y+1) = x+y+1$$

$$= \Sigma(x+y) + 1 = S(\Sigma(x, y))$$

$$h(x, y, z) = S(z) = z+1 \quad \hookrightarrow \text{sledbenik}$$

130 STIRLINGOVI BROJEVI DRUGE VRSTE

Odgovor:

Stirlingovi brojevi druge vrste $S(n, k)$ def broj razbi-
janja n -elementarnog skupa na k grupa (nepraznih)

$$S(6, 2) = \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \frac{1}{2} \binom{6}{3} = 31$$

$$S(n, 1) = 1$$

$$S(n, n) = 1$$

$$\text{za } k > n \quad S(n, k) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$S(0, 0) = 1$$

$$S(n, 0) = S(0, n) = 0$$

39. Rekurzivne f-je

Rekurzivna f-ja ima osobinu da je vrednost f-je izražena preko iste te f-je samo sa manjim argumentom.

$M: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ (McCarty-eva f-ja)

$$M(n) = \begin{cases} n-10 & \text{ako } n > 100 \\ M(M(n+11)) & \text{ako } n \leq 100 \end{cases}$$

$$M(99) = M(M(110)) = M(100) = M(M(111)) = M(101) = 91$$

...
- za sve pozitivne brojeve ≤ 101 ova f-ja ima vrednost 91

36. Turingova mašina

Alan Turing je napravio Turingovu mašinu koja je primitivna preteča računara i sastoji se

- 1) spolašnje memorije u to od jedne trake koja je izdeležena na ćelije i beskonačna je s obe strane, odnosno ima prebrojivo mnogo ćelija i samo na konačno mnogo mesta su utisnute simboli neke azbuke.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a ostala mesta su prazna (popunjena simbolima $\Lambda, \square$) i na nju se upisuju i ulazni podaci i izlaz

- 2) upravljački mehanizam ima konačan broj stanja $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_z\}$
 q_1 - početno
 q_z - završno

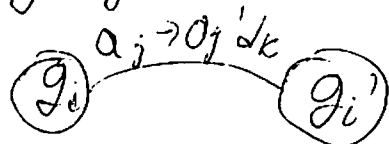
- 3) glava; čita i piše sadržaj u ćelije, pomerena se 1 polje levo ili desno ili ostaje u mestu. f-za prelaska iz stanja u stanje se može zadati

A) tablična

a_i

$q_i \quad q_i' \quad a_j' \quad d_k$

b) grafom



c) konfiguracijom

$\alpha \quad q_i \quad \beta \quad \alpha, \beta \in \Sigma^*$

Dve Turing mašine su ekvivalentne samo ako za iste
ulaze imaju iste izlaze

40. AKERMANOVA F-JA

U teoriji izračunljivosti, Ackermanova f-ja je jednostavan primitivno rekurzivni f-je koja nije primitivno rekurzivna. Kao argument uzima dva prirodna broja, a vraća takođe prirodan broj. Njene vrednosti rastu ekstremno brzo, čak i za male inpute (4, 3) ~~te~~ vrednosti Ackermanove f-je su folio to velike da se ne mogu izračunati u praksi. Decimalni zapis ovih vrednosti ima više cifara nego što postoji čestica u poznatom svemiru.

Ackermanova f-ja je definisana rekurzivno za ^{NE NEGATIVNE} ~~rekurzivne~~ cele brojeve m i n na sledeći način:

$$A(m, n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m=0 \\ A(m-1, 1) & \text{if } m>0 \text{ and } n=0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{if } m>0 \text{ and } n>0 \end{cases}$$

Izračunavanje ovih f-ja se uvek završava. Rekurzija je ograničena jer se u svakom koraku ili m smanjuje, ili n ostaje isto ali se n smanjuje. Svaki put kada n dođe do nule - m se smanjuje tako da će i ono jednaku doći do nule.

Međutim, ako se m smanjuje onako ne postoji gornja granica do koje se n može povećati - i često ono raste jako brzo.

Ako definisemo f-ju $f(n) = A(n, n)$, koja povećava m i n isto vreme, dobijamo f-ju sa jednakim primitivizmom, u odnosu na koje sve primitivno rekurzivne f-je jedva da rastu (uključujući i eksponencijalni faktorijel, multi- i superfaktorijel...). Ovaj ekstremni rast se može iskoristiti da se pokaže da f , koja je izračunljiva na uvaženo neograničenom memorizovanju (Turingova mašina) i stoga je ona izračunljiva f-ja, i raste brže od bilo koje primitivno rekurzivne f-je $\Rightarrow$ da nije prim. rek. f-ja

Jedine operacije koje se koriste kod Ackermanove f-je su sabiranje i uzimanje jedinice. A njena svojstva idu do

neograničene rekurencije.

$$A(1, 2)$$

$$A(1, 2) = A(0, A(1, 1))$$

$$= A(0, A(0, A(1, 0)))$$

$$= A(0, A(0, 2))$$

$$= A(0, 3)$$

$$= 4$$

Akermanova f-ja, usled svoje definicije preko ekstremno duboke rekurencije, moze da koristi za uporedjivanje sposobnosti razlicitih kompjutera da optimizuju rekurenciju.

4.1. Primeri neodlučivih problema

U teoriji izračunljivosti, neodlučivi problemi su oni problemi čiji jezik ne pripada rekurzivnom setu. Neformalno to su oni problemi koji se generalno ne mogu rešiti korišćenjem računara.

Takvi su:

- Halting problem
- Rice-ova teorema ~~tz.~~
- Određivanje da li ~~je~~ kontekst slobodne gramatike generiše sve moguće stringove (nizove) ili je ipak dosuđen
- Wang-ove pločice

* Halting problem tj. problem zaustavljanja programa
Za dati opis programa i konačni input, odrediti da li se u konačnom broju koraka program zaustavlja (tj. završava) ili ostaje zauvek da radi!

Turing je 1936. dokazao da generalni algoritam koji bi rešio halting problem za sve moguće ulazne programe i podatke ne postoji. Točnije ovo je neodlučiv problem. (i to prvi u istoriji koji se pokazao kao takav)

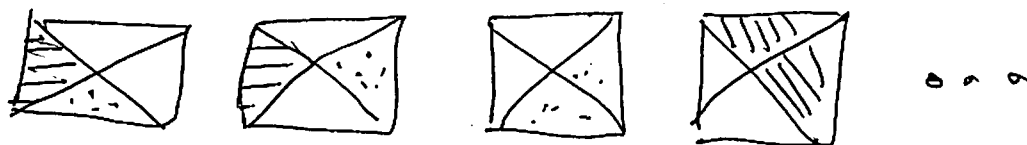
* Rice-ova teorema je važan rezultat u oblasti izračunljivih f-za.

Pretpostavimo da imamo set jezika S . Postavlja se pitanje da li je jezik date Turingove mašine u sklopu S neodlučiv tj. da li postoji Turingova mašina koja prepoznaje da li je jezik iz S ili ne prepoznaje. Ali ne postoji mašina koja će uvek tačno uoći da odluči da li jezik date Turingove mašine ima partikularnu netrivijalnu

nu osolima. Specijalni slučajevi uključuju neodlučivost da li Turingova mašina prihvata određeni string, da li prepoznaje ceo nekoj jezik i da li jezik koji prepoznaje T.M. prepoznaju i netrivialne simplex mašine.

Rice-ova teorema govori o osolimanu f-ja i jezika a ne mašina.

Wang-ove pločice su klasa formalnih sistema koji se sastoje od kvadrata jednakih veličina sa obogenim ivicama koji se slože tako (jedan kraj drugog) da susede ivice dva kvadrata (dve pločice) budu iste boje; pločice se ne smeju rotirati ili reflektovati



Osnovno pitanje oko seta Wang pločica jeste da li one mogu da „popločaju“ ~~ravnu~~ ^{ravan} ili ne. Odnosno da li se kopije ovih pločica mogu smestiti tako da popune ~~ravnu~~ ^{ravan} a da ni jedna ivica (tako koje počinje) ne odudara od Wang-ovog zahteva. Wang je predstavio algoritam za rešavanje ovog problema ali Berger je pokazao da je Wangova pretpostavka pogrešno. Ne postoji takav algoritam koji bi odredio da li dati set pločica može pravilno da poploča ravan.

$$\left(\frac{1}{v} - 1 \right) \left(\frac{1}{v} - 1 \right) u = (u) a$$