MAT - 1. a 2. opravný termín 2011/2012

created by Hadza [tpc, Vagabund, SimenEw a spol.]
v1.1

1. opravný termín 2011/2012, Skupina D

Příklad 1 (10b)**.** Buď S symetrická grupa na množině $R-\{0,1\}$, tj. grupa všech permutací na množině $R-\{0,1\}$ s operací skládání. Určete podgrupu grupy S generovanou permutací $\{f_1, f_2\}$, kde $f_1(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{x-1}{x}$.

Řešení

Generování množiny permutací $< \{f_1, f_2\} >$ z permutací f_1, f_2 nad operací $\circ$ se systematicky provede postupným vyplňováním Caleyho tabulky. Pokud se při vyplňování tabulky vypočte nová permutace f_n, je tabulka rozšířena o tuto permutaci a dopočteny příslušné buňky.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_2	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_4	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_5	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1
f_6	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2

postupný výpočet tabulky:
$f_1 \circ f_1 = f_1(f_1(x)) = x$ ...je nová permutace, takže $f_3 = x$.
$f_2 \circ f_1 = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{x}$ ...je nová permutace, takže $f_4 = \frac{1}{x}$.
$\vdots$
pozn. jelikož operace $\circ$ není komutativní $f \circ g \neq g \circ f$, je nutné poctivě vypočítat vždy obě varianty $f_2 \circ f_1$ i $f_1 \circ f_2$.

Po vypočtení tabulky jsme dostali 6 permutací, které tvoří podgrupu generovanou permutacemi f_1, f_2:
$f_1(x) = \frac{x}{x-1}$
$f_2(x) = \frac{x-1}{x}$
$f_3(x) = x$ (je neutrálním prvkem)
$f_4(x) = \frac{1}{x}$
$f_5(x) = 1 - x$
$f_6(x) = \frac{-1}{x-1}$

Výsledek $< \{f_1, f_2\} >= \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.

Příklad 2 (15b)**.** Najděte všechny rozklady množiny $M = \{x, y, z\}$ takové, že jim odpovídající ekvivalence jsou kongruence na algebře $A = (\{x, y, z\}, f)$, kde $f(x) = y$, $f(y) = f(z) = z$.

Řešení

1. Relace odpovídající kongruencím na algebře A, kde kongruence: $a, b \in M, (a, b) \in R \Rightarrow (f(a), f(b)) \in R$.
   $R_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, y)\}$
   $R_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$
   $R_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, x), (x, z), (z, x), (y, z), (z, y)\} = M \times M$

2. Nalezení rozkladů množiny M indukované relacemi R, M/R.
   $M/R_1 = \{\{x\}, \{y, z\}\}$
   $M/R_2 = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$
   $M/R_3 = \{\{x, y, z\}\}$

Výsledkem jsou tedy tři rozklady množiny M.

Příklad 3 (15b)**.** V Euklidovském prostoru R^4 nalezněte ortonormální bázi podprostoru W generovaného vektory $u_1 := (1, 1, 1, 1)$, $u_2 := (1, 1, 1, -1)$, $u_3 := (1, -1, -1, 1)$, $u_4 := (-1, 1, 1, 1)$.

Řešení

1. Nejpřímočařejším postupem je napsat si vektory jako řádky matice a provést Gaussovu eliminaci. Nenulové řádky pak tvoří bázi (el. transformace nemění lineární obal).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{gauss. elim.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{gauss. elim.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   $B_1 = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ není ortogonální, není ortonormání.
   $B_2 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ je ortogonální, není ortonormální.

2. Provedení ortonormalizace, vstupem je báze (tvořena linearně nezávislými vektory), která bude převedena na ortonormální bázi.

   Ortonormalizace např. pro B_2:
   $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 0, 1)$
   $\boldsymbol{\varphi_1} = \frac{f_1}{|f_1|} = \frac{(1,0,0,0)}{\sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2}} = \frac{(1,0,0,0)}{\sqrt{1^2}} = (1, 0, 0, 0)$
   $h_{21} = (f_2, \varphi_1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$
   $h_2 = f_2 - h_{21} \cdot \varphi_1 = (0, 1, 1, 0) - 0 \cdot (1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 0) - (0, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 0)$
   $\boldsymbol{\varphi_2} = \frac{h_2}{|h_2|} = \frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2+0^2}} = \frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{2}} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
   $h_{31} = (f_3, \varphi_1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$
   $h_{32} = (f_3, \varphi_2) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 = 0$
   $h_3 = f_3 - h_{31} \cdot \varphi_1 - h_{32} \cdot \varphi_2 = (0, 0, 0, 1) - 0 \cdot (1, 0, 0, 0) - 0 \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (0, 0, 0, 1)$
   $\boldsymbol{\varphi_3} = \frac{h_3}{|h_3|} = \frac{(0,0,0,1)}{\sqrt{(0^2+0^2+0^2+1^2)}} = \frac{(0,0,0,1)}{\sqrt{(1^2)}} = (0, 0, 0, 1)$

Výsledná ortonormální báze je $B = \{(1,0,0,0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0,0,0,1)\}$, prostor W je 3-dimenzionální .

Příklad 4 (15b)**.** Uvažujte jazyk L s rovností, jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním funkčním symbolem f. Buď $\mathcal{R}$ realizace jazyka L, jejímž univerzem je množina $\boldsymbol{R}$ všech reálných čísel a v níž platí: $p_{\mathcal{R}}(a,b) \Leftrightarrow a \leq b$, $f_{\mathcal{R}}(a,b) = a+b$. Uvažujte teorii $T = \{p(f(x,y), f(y,z)) \Rightarrow (p(x,z)), p(x, f(y,x))\}$ a formuli $\varphi = p(x, f(x,y))$.

1) Rozhodněte, zda $\mathcal{R} \models T$, tj. zda $\mathcal{R}$ je modelem teorie T. (10b)

2) Dokažte, že $T \models \varphi$, tj. že φ je důsledkem teorie T. (5b)

Řešení

1. Realizace $\mathcal{R}$ je modelem teorie T, pokud každá formule ψ z T je pravdivá v realizaci $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \models \psi$).

   vyšetření formule: $p(x, f(y,x))$
   $x \leq y + x$
   $0 \leq y$ tato formule neplatí pro y, která jsou menší jak nula, tudíž formule je nepravdivá v realizaci $\mathcal{R}$, tím pádem realizace $\mathcal{R}$ není modelem teorie T.

2. Formule φ je důsledkem teorie T, pokud je formule φ pravdivá v každé realizaci $\mathcal{R}$, která je modelem teorie T.
   ...

Příklad 5 (10b)**.** Dokažte zapsáním formálního důkazu (s použitím věty o dedukci), že platí: $A \to B, B \to C \vdash A \to C$

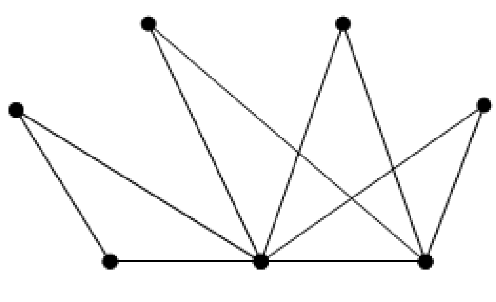
Řešení

1. axiom 1: $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$
2. VD: $B \to C \vdash A \to (B \to C)$
3. axiom 2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
4. MP: $B \to C \vdash (A \to B) \to (A \to C)$
5. VD: $A \to B, B \to C \vdash (A \to C)$

Příklad 6 (15b)**.** Jaký je nejmenší počet hran grafu se 7 uzly, jehož každý uzel má stupeň 2, 4 nebo 6 a každý z těchto stupňů je zastoupen? Nakreslete takový graf.

Řešení

$2|H| = 2 + 4 + 6 + 4n$
pro $n = 2 \Rightarrow |H| = 10$
Nejmenší počet hran grafu je 10.



2. opravný termín 2011/2012, Skupina A

Příklad 1 (15b)**.** Dokažte, že platí $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$. Zvolte si dva předpoklady. Na předpoklad aplikujte axiom substituce a potom metodu odloučení. Stejný postup aplikujte na druhý předpoklad. Poté aplikujte metodu odloučení na předchozí výsledky, a poté použijte dvakrát větu o dedukci.

Řešení

1. předpoklad: $\forall x\varphi \vdash \forall x\varphi$
2. axiom subst.: $\vdash \forall x\varphi \to \varphi$
3. MP: $\forall x\varphi \vdash \varphi$
4. předpoklad: $\forall x(\varphi \to \psi) \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$
5. axiom subst.: $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$
6. MP: $\forall x(\varphi \to \psi) \vdash \varphi \to \psi$
7. MP 3,6: $\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi \vdash \psi$
8. VD: $\forall x(\varphi \to \psi \vdash \forall x\varphi \to \psi$
9. VD: $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$

Příklad 2 (15b)**.** Převeďte formule do prenexního tvaru a rozhodněte, zda jsou ekvivalentní. Formule jsou dvě následující: ...

Řešení

...

Příklad 3 (15b)**.** Je dán grupoid s tří prvkovou množinou a s jednou operací $\circ$, která splňuje zákon o krácení. Sestavte tabulku pro tuto operaci. Zároveň grupoid není grupou, ukažte, že neplatí asociativní zákon.

Řešení

$\circ$	A	B	C
A	A	C	B
B	B	A	C
C	C	B	A

asociativni zákon: $\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$\begin{aligned} (A \circ B) \circ C &= A \circ (B \circ C) \\ (C) \circ C &= A \circ (C) \\ A &= B \end{aligned}$$

$A \neq B \Rightarrow$ neplatí asoc. zákon pro operaci $\circ$.

Příklad 4 (10b)**.** Je dána grupa $(\mathbb{Z}, 1, 2, f)$, kde $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel, 1, 2 jsou konstanty a f je unární operace definována $f(x) = 3x$. Určete podgrupu $< 6 >$ generovanou prvkem 6.

Řešení

$< 6 >=< \{1, 2, 6\} >= \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 \ldots\} = \{3^n, 2 \cdot 3^n |$ kde $n \in \mathbb{N}_0\}$

pozn. $\mathbb{N}_0$ značí množinu přirozených čísel včetně nuly

Příklad 5 (15b)**.** V obci Skorošice se koná amatérský fotbalový turnaj, kterého se účastní 9 týmů. V dopolední části turnaje každý tým odehrál 2 zápasy. Kolik zápasů v odpolední části musí každý tým odehrát, aby si zahráli co nejvíce zápasů, avšak celkový počet odehraných zápasů musí být menší jak 32.

Řešení

$2|H| = 9n$

pro $n = 6$ rovnice platí $32 > \frac{9 \cdot 6}{2}$

Stupeň uzlu vyšel 6, tedy odpoledne každý tým odehraje 4 zápasy.