

I. Rappel:

A. Electrodynamique:

1. Densité de courant:

Si n est le nombre de charges mobiles par unité de volume et q la charge la densité volumique de charge est $\rho_m = nq$.

Si on suppose que ces charges mobiles se déplacent à la vitesse d'ensemble $\vec{v}$ dans le réf. d'étude, on définit le vecteur densité de courant

$$\vec{J}(M, t) = \rho_m \vec{v}(M, t) \quad (\text{A.m}^{-2})$$

2. Intensité de courant:

$$dI = \frac{dq}{dt} = \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

L'intensité totale I de courant qui traverse la surface S est le flux de la densité de courant volumique à travers cette surface.

$$I = \iint_S \vec{J}(M, t) \cdot d\vec{s}$$

Si la dist. de courant a l'aspect d'une nappe, elle est décrite par une densité de courant surfacique $\vec{J}_s$ exprimée en A.m^{-1} .

Pour un courant filiforme, l'intensité de courant traversant une courbe C tracée sur la nappe surfacique S et orientée par le vect. unitaire $\vec{u}$ normal à C et tangent à S est défini par

$$I = \int_C \vec{J}(M, t) \cdot d\vec{u} \, dl$$

3. Conductivité électrique:

3.1. Loi d'Ohm locale:

$$\vec{J}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$$

γ : conductivité (S.m^{-1})

$\gamma = \frac{1}{\rho_s}$ avec ρ_s : résistivité.

3.2. Loi d'Ohm intégrale:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\gamma \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (\text{ohm})$$

3.3. Effet Joule:

* Puissance volumique dissipée:

$$dP = \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv = \gamma E^2 \, dv \quad \text{on note}$$

$$P_{\text{vol}} = \frac{dP}{dv} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma}$$

* Puissance dissipée dans un tube conducteur:

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

B - Magnétostatique:

1) Champ d'induction magnétique - Loi de Biot Savart

1.1 - Circuit filiforme:

Soit $\mathcal{C}$ un circuit filiforme orienté parcouru par un courant permanent I . Il crée en un pt M de l'espace un champ magnétique $\vec{B}$ exprimé par:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \text{avec } r = \overrightarrow{PM}$$

1.2 - Circuit à distribution volumique de courant

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dV.$$

μ_0 = perméabilité magnétique = $4\pi \cdot 10^{-7}$

1.3 - Dist. surfacique:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{J}_s \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dS.$$

$\vec{J}_s$: densité surfacique de courant.

2) Propriétés du champ magnétique:

2.1. Propriétés de symétrie:

$\vec{B}(M) \perp$ plan de symétrie de la dist. de courant; $\vec{B}(M) \in$ plan d'antisymétrie.

2.2. Exemples de champ magnétique et calcul de circulation:

* Fil infini (Oz)

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad ; \quad \mathcal{C} = \mu_0 I \quad \text{si } \mathcal{C} \text{ enlace le fil}$$
$$= 0 \quad \text{si } \mathcal{C} \text{ n'enlace pas le fil}$$

* Spire circulaire d'axe (Oz); $M \in (Oz)$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \quad ; \quad \mathcal{C} = \mu_0 I.$$

* Solénoïde infini d'axe (Oz); $\vec{u}_z$ n = nbre de spires par unité de longueur

À l'intérieur du solénoïde: $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z$

À l'extérieur du solénoïde: $\vec{B}(M) = \vec{0}$

$$\mathcal{C} = \mu_0 N I \quad \text{avec } N = \text{nbre total de spires.}$$

2.3. Théorème d'Ampère:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}}$$

Pour une dist. volumique:

$$\mathcal{C} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{J} d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} d\vec{\ell}$$

Δ valable que pour les circuits fermés et un courant permanent.

C. Les équations locales de la magnéto-statique:

① $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 3^{ème} loi de Maxwell

Δ. $\text{div} \vec{J} = 0$

3^{ème} loi de Maxwell n'est valable que pour des courants permanents. Elle n'est valable qu'en régime stationnaire.

$\text{div} \vec{B}(M) = 0$ 4^{ème} équation de Maxwell

Δ Cette équation montre que $\vec{B}$ est à flux conservatif
 $\text{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

② Potentiel vecteur:

a. Jauge de Coulomb:

On a $\text{div} \vec{B}(M) = 0 \Rightarrow \vec{B}(M)$ est un champ rotationnel $\Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tq } \vec{B}(M) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M)$.
On note $\vec{A}(M)$ le potentiel vecteur.

Δ $\vec{A}(M)$ est déterminé à un grad près.
i.e: si $\vec{A}(M)$ est une solⁿ de M, alors

$\{\vec{A}' \mid \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{grad}} f \text{ avec } f \text{ fonction scalaire}\}$ est l'ensemble des solutions.

Δ Parmi les solutions infinies du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$, on choisira les solutions à flux conservatif: $\text{div}(\vec{A}(M)) = 0$. C'est la Jauge de Coulomb.

b. Propriétés du potentiel vecteur:

1. Circulation: $\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$ tq Σ est la surface s'appuyant sur γ .

2. Équation de Poisson en magnéto-statique:

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0}$$

• Pour une dist. volumique de charge,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(P)}{\|\vec{PM}\|} dv$$

Δ En coord. cartésiennes seulement

• Pour une dist. surfacique de courant,
Pour une nappe de courant:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{J}_s(P)}{\|\vec{PM}\|} ds$$

• Pour une dist. linéique de courant:
Pour les circuits filiformes

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{I d\vec{\ell}}{\|\vec{PM}\|}$$

3. Propriétés de symétrie:

- Si D est invariante dans une symétrie % P alors $\vec{A}(M)$ est contenu dans P .
- Si D est changée en son opposée dans une symétrie % P , alors $\vec{A}(M) \perp P$.

③ Étude d'un champ magnétique à la traversé d'une nappe de courant :

Composante normale :

La composante normale de $\vec{B}$ est continue à la traversé d'une nappe de courant.

Composante tangentielle :

$$\vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t} = \mu_0 (\vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12})$$

La composante tangentielle de $\vec{B}$ subit une discontinuité à la traversé d'une nappe de courant.



D. Travail des forces de Laplace :

1. Effet Hall :

Les charges du conducteur sont soumises

à $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = -q v B \vec{u}_y$, on déduit l'apparition de $\vec{E}_H$ en régime permanent on a $q \vec{E}_H + q \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

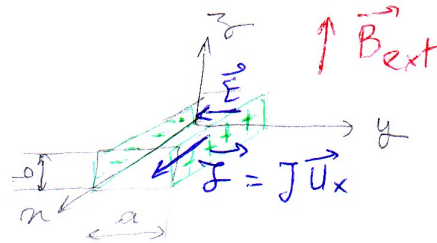
$$= \frac{1}{nq} \vec{B} \wedge \vec{J}$$

$\vec{E}_H$ est appelé champ de Hall.

avec $\frac{1}{nq} = A_H$: constante de Hall.

$\vec{E}_H = A_H \vec{J} \wedge \vec{B} \vec{u}_y$ À ce champ on associe une tension de Hall

$$U_H = \frac{-IB}{nqb} = -\frac{a}{nq} \vec{J} \wedge \vec{B}$$



2. Force de Laplace :

• Pour un élément de courant $d\vec{l}$ placé en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, on assiste à l'apparition d'une force de Laplace

$$d\vec{F}_{lap} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_{lap} = \int \vec{F}_{lap}$$

• Pour une distribution volumique de courant et en présence d'un champ $\vec{B}$:

$$d\vec{F}_{lap} = \vec{J} d\tau \wedge \vec{B}$$

• Pour une nappe de courant de densité $\vec{J}_s$ et en présence de $\vec{B}$,

$$d\vec{F}_{lap} = \vec{J}_s ds \wedge \vec{B}$$

3. Déplacement d'un circuit indéformable en présence d'un champ permanent

Travail des forces de Laplace : Théorème de Maxwell :

8 W = $\int I d\Phi$ ← Flux magnétique.

Énoncé du théorème de Maxwell :

Le travail des forces de Laplace appliquées à un circuit filiforme, rigide parcouru par un courant permanent et se déplaçant dans un champ magnétique constant est le produit de l'intensité du courant par la variation du flux magnétique à travers ce circuit

4. Energie potentielle d'interaction d'un circuit rigide en présence d'un champ permanent

Soient : I : courant permanent

$\vec{B}$: champ magnétique permanent

$\Delta\phi$: ne dépend pas de l'état initial et de l'état final du circuit.

ΔW : est indépendant du chemin suivi.

$E_{pi} = U = I\phi$: énergie potentielle d'interaction à courant permanent.

$$\Rightarrow \delta W = -dU$$

5. Torseur des forces de Laplace :

$$\delta W = \vec{F}_L d\vec{r} + \vec{\gamma}_L d\vec{\theta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{F}_L = \begin{pmatrix} F_{Lx} \\ F_{Ly} \\ F_{Lz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ I \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ I \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \vec{\gamma}_L = \begin{pmatrix} \gamma_{Lx} \\ \gamma_{Ly} \\ \gamma_{Lz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \frac{\partial \phi}{\partial \theta_x} \\ I \frac{\partial \phi}{\partial \theta_y} \\ I \frac{\partial \phi}{\partial \theta_z} \end{pmatrix} \end{cases}$$

6. Dipôle magnétique :

Définition : Le dipôle magnétique est un courant permanent décrivant un circuit fermé de distance microscopique dont les effets sont étudiés à une distance macroscopique. $\|\vec{OP}\| \ll \|\vec{OM}\|$

Moment dipolaire magnétique :

soit $\vec{S}$: vecteur surface s'appuyant sur le circuit $\mathcal{C}$ fermé parcouru par I , alors le moment dipolaire magnétique est

$$\vec{M} = I \vec{S}$$

- Pour une boucle de courant (circulaire) : $\vec{M} = I \pi R^2 \vec{n}$
- Pour une dist. linéique de courant : $\vec{M} = \frac{1}{2} \oint \vec{OP} \wedge I d\vec{\ell}$
- Pour une dist. surfacique de courant : $\vec{M} = \frac{1}{2} \int \vec{OP} \wedge \vec{J}_s dS$
- Pour une dist. volumique de courant : $\vec{M} = \frac{1}{2} \int \vec{OP} \wedge \vec{J} dV$

6.1. Potentiel vecteur produit par un dipôle magnétique :

$$\vec{A}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$$

6.2. Champ créé par un dipôle magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right) \\ &= -\vec{\text{grad}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\vec{\text{grad}}(V^*) \quad \text{ou } V^* : \text{potentiel scalaire magnétique} \end{aligned}$$

Expression de $\vec{B}$ et $\vec{A}$ en coordonnées sphériques :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^2} \vec{U}_\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{2M \cos \theta}{r^3} \vec{U}_r + \frac{M \sin \theta}{r^3} \vec{U}_\theta \right]$$

Ligne de champ magnétique :

$$\vec{B} \wedge d\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{B_r}{B_\theta} d\theta \Rightarrow r = r_0 \sin^2 \theta.$$

⚠ Le travail à fournir est l'opposé du travail du couple pour faire tourner un dipôle de $\theta \rightarrow \theta + d\theta$
 * Le travail du couple : $dW = \gamma d\theta$
 $\Rightarrow$ Le travail à fournir : $dW' = -dW$

Action d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique rigide :

① Cas d'un champ uniforme $\vec{B}$:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \oint \vec{I} d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \vec{I} \left(\oint d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

⚠ La résultante des forces étant nulle, ce qui se manifeste par un couple dont le moment $\vec{\gamma}_0 \neq \vec{0}$ est défini par $\oint \vec{OP} \wedge (\vec{I} d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$
 On montre que $\vec{\gamma}_0 = \vec{M} \wedge \vec{B}$

② Cas d'un champ extérieur quasiment uniforme :

En supposant que $\vec{B}_{ext}$ varie très peu, la résultante $\vec{R} \neq \vec{0}$, mais suffisamment faible pour que l'effet principal de ce champ reste assimilable à un couple défini par $\vec{\gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

$$\text{On montre que } \vec{R} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B} = \text{grad}_0 (\vec{M} \cdot \vec{B})$$

$$\text{avec } \vec{M} \cdot \text{grad} () = \left(M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z} \right) ()$$

⚠ ssi le sys. de coord. est cartésien!!!

7. Energie potentielle magnétique d'un dipôle magnétique en présence d'un champ $\vec{B}$ permanent :

$$E_{pm} = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

⚠ Si $\vec{B}(M)$ est uniforme alors le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ est déduit directement à partir de la relation :

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{2} (\vec{B}(M) \wedge \vec{r}) \quad \text{avec } \vec{r} : \text{vecteur position}$$