Correction DM n° 6

Exercice 81 page 103

1.a. On a $f_1(x) = xe^{-x}$ soit $f_1(x) = \dfrac{x}{e^x}$

* On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc (*passage inverse*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0}$.

$$\left.\begin{array}{l} * \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}\ e^x > 0 \text{ donc } \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty \\ \text{De plus } \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \text{Donc } \boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty}.$$

b. * La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$ soit $\boxed{\mathbf{f_1'(x) = (1 - x)e^{-x}}}$.

* $f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow (1 - x)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0$ (car $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x < 1$.

* Variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	–	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

c. * Les variations de $\mathcal{C}_k$ ne correspondent pas à celle de $\mathcal{C}_1$ et k est un entier supérieur à 1,donc $\underline{\boldsymbol{k \geqslant 2}}$.

* On a vu que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} -\infty & \text{si } k \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$.

Comme (*<u>d'après le graphique</u>*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = +\infty$ on en, déduit que <u>***k* est impair**</u>.

2.a. On peut observer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{e}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.

<u>Remarque</u> : Sans observation … on peut déterminer ses deux points !

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B(a, b) \in \mathcal{C}_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(a) = b$

Donc ceci est vrai pour n = 1 et n = 2. Donc $f_1(a) = b$ et $f_2(a) = b$ soit $f_1(a) = f_2(a)$ (= b).

On obtient alors : $xe^{-x} = x^2e^{-x} \Leftrightarrow xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x(1 - x)e^{-x} = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ *ou* $1 - x = 0$ *ou* $e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 1$

Reste alors à vérifier que cela est vrai pour tout n …. Et on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{e}$.

b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f_n'(x) = n\,x^{n-1} \times e^{-x} + x^n \times (-e^{-x}) = n\,x^{n-1} \times e^{-x} + x \times x^{n-1} \times (-e^{-x})$ soit $\boxed{f_n'(x) = x^{n-1}(n - x)e^{-x}}$.

3. * D'après la question précédente, on a $f_3'(x) = x^2(3 - x)e^{-x}$.

* Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $x^2 \geqslant 0$. Donc f_3' est du signe de $3 - x$.

*

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f_3'(x)$		+	0	–	
$f_3(x)$		↗		↘	

<u>Donc, d'après le tableau de variations,</u>
<u>f_3 admet un maximum en 3</u> et $\boxed{\mathbf{f_3(3) = \dfrac{27}{e^3}}}$.

4.a. * Équation de T_k : $y = f_k'(1)(x - 1) + f_k(1)$.

Or $f_k'(1) = \mathbf{1}^{k-1}(k - \mathbf{1})e^{-\mathbf{1}}$ soit $f_k'(1) = \dfrac{k-1}{e}$. Et $f_k(1) = \dfrac{1}{e}$

D'où l'équation de T_k : $\boxed{y = \dfrac{k-1}{e}(x - 1) + \dfrac{1}{e}}$.

* M(x , y) appartient à l'intersection de la droite T_k et de l'axe des abscisses équivaut à résoudre :

$$\begin{cases} y = \dfrac{k-1}{e}(x-1) + \dfrac{1}{e} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{k-1}{e}(\mathbf{0}-1) + \dfrac{1}{e} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{k-1}{e} \times (-1) + \dfrac{1}{e} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2-k}{e} \\ x = 0 \end{cases}$$

<u>Donc la droite T_k coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées</u> $\left(0, \dfrac{2-k}{e}\right)$.

b. D'après les données de l'énoncé, T_k coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\left(0, -\dfrac{4}{e}\right)$, donc :

$\dfrac{2-k}{e} = -\dfrac{4}{e}$ soit $2 - k = -4$ soit $\boxed{\boldsymbol{k = 6}}$.

c. * D'après la question 2.b, on a : $f_6'(x) = x^5(6 - x)e^{-x}$.

* Or pour tout $x \geqslant 0$, $e^{-x} > 0$ et $x^5 \geqslant 0$. Donc f_6' est du signe de $6 - x$.

*

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f_6'(x)$		+	0	–	
$f_6(x)$		↗		↘	

<u>Donc, d'après le tableau de variations,</u>
<u>les conjectures sont fausses</u> .

Exercice 83 page 104

1.a. On a $f^{(1)}(x) = (2x + 1) \times e^x + (x^2 + x + 1) \times e^x$ soit $\boxed{f^{(1)}(x) = (x^2 + 3x + 2)\, e^x}$.

b. Soit p_n la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)\, e^x$ où a_n et b_n sont des entiers.

→ *Initialisation* : $n = 1$. On a : $f^{(1)}(x) = (x^2 + 3x + 2)\, e^x$ donc $a_1 = 3 \in \mathbb{N}$ et $b_1 = 2 \in \mathbb{N}$.
Donc p_1 est vérifiée.

→ *Hérédité* : Supposons que p_n soit vérifiée pour un entier $n \geqslant 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)\, e^x$ où a_n et b_n sont des entiers

On dérive $f^{(n)}$: $f^{(n+1)}(x) = (2x + a_n) \times e^x + (x^2 + a_n x + b_n) \times e^x$
Soit $f^{(n+1)}(x) = (x^2 + (2 + a_n)x + a_n + b_n)e^x$

Soit $f^{(n+1)}(x) = (x^2 + a_{n+1} x + b_{n+1})e^x$ où $a_{n+1} = 2 + a_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

Or $a_n \in \mathbb{N}$ et $2 \in \mathbb{N}$ donc $2 + a_n \in \mathbb{N}$ soit $\boldsymbol{a_{n+1} \in \mathbb{N}}$.

Et $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$ donc $b_n + a_n \in \mathbb{N}$ soit $\boldsymbol{b_{n+1} \in \mathbb{N}}$.

Donc p_{n+1} est vérifiée.

→ *Conclusion*. Donc par récurrence, la propriété p_n est vérifiée pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2.a. * Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_{n+1} = 2 + a_n$ soit $a_{n+1} - a_n = 2$.
Donc (a_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 3$.

* Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 3 + 2(n - 1)$ soit $\boxed{a_n = 1 + 2n}$.

b. Soit p_n la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$.

→ *Initialisation* : $n = 1$. On a $b_1 = 2$ or $\sum_{i=1}^{\mathbf{0}-1} a_i = 0$ (somme non définie) donc $b_1 = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$.
Donc p_1 est vérifiée.

→ *Hérédité* : Supposons que p_n soit vérifiée pour un entier $n \geqslant 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a $b_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 2 + a_1 + \dots + a_{n-1}$.

Or $b_{n+1} = a_n + b_n$ donc $b_{n+1} = a_n + 2 + a_1 + \dots + a_{n-1}$ soit $b_{n+1} = 2 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$

Soit $b_{n+1} = 2 + \sum_{i=1}^{n} a_i$. Donc p_{n+1} est vérifiée.

→ *Conclusion*. Donc par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $b_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$.

* Comme (a_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 3$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i = (n-1) \times \frac{a_1 + a_{n-1}}{2}$$

Rappel : Si (u_n) est arithmétique, alors $\sum_{i=1}^{n} u_i =$ (nombre de termes de la somme) $\times \left(\dfrac{1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$

soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i = (n-1) \times \frac{3 + (1 + 2(n-1))}{2} = (n-1) \times \frac{4 + 2n - 2}{2} = (n-1) \times (n+1) = n^2 - 1$.

* Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2 + n^2 - 1$ soit $\boxed{b_n = n^2 + 1}$.

c. On déduit de la question 1.b que $f^{(2012)}(x) = (x^2 + a_{2012}\, x + b_{2012})\, e^x$.

Or $a_{2012} = 1 + 2\times2012 = 4025$ et $b_{2012} = 1 + 2012^2 = 1 + 4048144 = 4048145$

Donc $\boxed{f^{(2012)}(x) = (x^2 + 4025x + 4048145)\, e^x}$.