Laboratorium 3.

Obliczanie przepływów maksymalnych rocznych $Q_{max,p}$ o zadanym prawdopodobieństwie przewyższenia p

A. Zadania do wykonania:

1. **Dane**
   a) Ściągnąć do swojej kartoteki plik Excela **QmaxXXX.xls** z numerem **XXX** zgodnym ze swoim przydziałem. Plik ten zawiera próbę losową przepływów maksymalnych rocznych $Q_{max,i}$, i = 1,2,...,n, n = 30, konkretnej rzeki w danym przekroju wodowskazowym.
   b) W układzie współrzędnych (rok, Q_{max}) przedstawić swoje dane, oznaczyć **Rys. 1** i odpowiednio podpisać.

2. **Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa**
   Uporządkować **malejąco** ciąg $Q_{max,i}$, tworząc ciąg uporządkowany $Q_{max,(i)}$, i = 1,2, ...,n, a następnie każdej z wartości $Q_{max,(i)}$ przyporządkować empiryczne prawdopodobieństwo przewyższenia $\hat{p}_i$:

$$\hat{p}_i = \hat{P}(Q_{max} \geq Q_{max,(i)}) = \frac{i}{n+1},\ i = 1,2,...,n \tag{1}$$

   Uzyskane wyniki przedstawić w układzie współrzędnych ($\hat{p}_i$,$Q_{max,(i)}$), ($\hat{p}$ w %, wartości w układzie odwrotnym) oznaczyć **Rys. 2** i podpisać *Empiryczna funkcja prawdopodobieństwa przewyższenia przepływów maksymalnych rocznych rzeki ...... w przekroju wodowskazowym ......*

3. **Teoretyczny rozkład prawdopodobieństwa: rozkład Pearsona, typ III; obliczanie wartości jego parametrów**
   Zakładamy, że zmienna losowa Q_{max} podlega trójparametrowemu rozkładowi Pearsona III typu:

$$f_\Gamma(x;\epsilon,\alpha,\lambda) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}(x-\epsilon)^{\lambda-1}e^{-\alpha(x-\epsilon)} \tag{2}$$

   Funkcja $\Gamma(\lambda)$ nosi nazwę gamma Eulera[1]. Liczby: $\epsilon > 0$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ (parametry rozkładu) oznaczają kolejno: dolne ograniczenie, parametr skali, parametr kształtu.

   Korzystając z rys. 2 znaleźć wartość $\hat{\epsilon}$ poprzez ekstrapolację empirycznej funkcji prawdopodobieństwa przewyższenia do wartości 100%, po czym w kolejnej kolumnie obliczyć wartości ln(Q_{max}–$\hat{\epsilon}$).

   Niech x oznacza nową zmienną: $x = Q_{max}-\hat{\epsilon}$. Znając wartość $\hat{\epsilon}$ dolnego ograniczenia ϵ i stosując metodę największej wiarygodności obliczyć wartości $\hat{\alpha}$ i $\hat{\lambda}$ parametrów α, λ rozkładu (2), poprzez kolejne obliczanie następujących wartości:

$$A_\lambda = \ln\overline{x} - \overline{\ln x}, \qquad \hat{\lambda} = \frac{1+\sqrt{1+4A_\lambda/3}}{4A_\lambda}, \qquad \hat{\alpha} = \frac{\hat{\lambda}}{\overline{x}} \tag{3}$$

   Pod rys. 2 utworzyć tabelę (nazwać Tabela 1 i odpowiednio podpisać) zawierającą wartości $\hat{\epsilon}$, $\overline{x}$, A_λ, $\hat{\alpha}$ i $\hat{\lambda}$.

   Mając już znane wartości $\hat{\epsilon}$, $\hat{\alpha}$ i $\hat{\lambda}$ parametrów ϵ, α i λ rozkładu (2), obliczyć teoretyczne wartości kwantyli Q_{max,p_i} dla zadanych wartości p_i (i = 1,2,..., m) prawdopodobieństwa przewyższenia korzystając ze statystycznej funkcji **`ROZKŁAD.GAMMA.ODW(...)`** arkusza kalkulacyjnego Excel:

$$Q_{max,p_i} = \hat{\epsilon} + \text{ROZKŁAD.GAMMA.ODW}(1-p_i;\text{Alfa};\ \text{Beta}) \tag{4}$$

   gdzie:

$$\text{Alfa} = \hat{\lambda},\quad \text{Beta} = \frac{1}{\hat{\alpha}} \tag{5}$$

   Wykorzystać równanie (4) do obliczeń Q_{max,p_i} dla prawdopodobieństwa przewyższenia p_i w zakresie od 100% do 1%. Skopiować rys. 2, oznaczyć **Rys. 3** i zmienić oś prawdopodobieństwa na logarytmiczną. Wykreślić na rys. 3 teoretyczny rozkład prawdopodobieństwa przewyższenia.

---

[1] Czasami mówi się, że jest to uogólniona silnia, gdyż prawdziwa jest równość $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, co oznacza, że dla dowolnej liczby naturalnej n mamy $\Gamma(n+1) = n!$

4. Test zgodności λ Kołmogorowa

Określić (może być graficznie z rys. 3) maksymalną wartość D_{max} różnic pomiędzy empiryczną a teoretyczną funkcją prawdopodobieństwa przewyższenia (**koniecznie zaznaczyć D_{max} na rys. 3**), po czym obliczyć wartość λ statystyki testu Kołmogorowa:

$$\lambda = D_{max}\sqrt{n} \tag{6}$$

i porównać z 5% wartością krytyczną $\lambda_{kryt} = 1.36$. Zapisać wniosek pod rys. 3.

5. Ocena niepewności kwantyli teoretycznych za pomocą 95% jednostronnego obszaru ufności dla kwantyla $Q_{max,p}$

a) Obliczyć odchylenie standardowe $DQ_{max,p}$ teoretycznego kwantyla $Q_{max,p}$:

$$DQ_{max,p} = \varphi(p,\lambda)\frac{1}{\alpha\sqrt{n}} \tag{7}$$

gdzie wartości $\varphi(p,\lambda)$ dla prawdopodobieństwa przewyższenia p od 50% do 1% i znanej wartości λ należy odczytać z tabeli zawartej w pliku **fi(p,lambda).xls** (może być potrzebna interpolacja).

b) Dla ustalonych wyżej wartości p obliczyć $Q_{max,p}$ i górną granicę $Q_{max,p}^{u_{95\%}}$ 95% jednostronnego obszaru ufności dla kwantyla $Q_{max,p}$:

$$Q_{max,p}^{u_{95\%}} = Q_{max,p} + u_{95\%}\cdot DQ_{max,p} \tag{8}$$

gdzie $u_{95\%} = 1.645$. Wynik wykreślić na rys. 3.

c) Odczytać z rys. 3 wartości przepływu 10-, 20-, 50- i 100-letniego oraz odpowiadające im wartości $Q_{max,p}^{u_{95\%}}$. Wyniki zamieścić w tabeli, oznaczyć ją **Tabela 2** i odpowiednio opisać.

6. Gwarancja Gw(T,T_0) (niewystąpienia) przepływu T-letniego w okresie czasu T_0 lat:

$$Gw(T,T_0) = \exp\left(-\frac{T_0}{T}\right)100\% \tag{9}$$

oznacza prawdopodobieństwo, że w ciągu kolejnych T_0 lat nie pojawi się ani jeden raz przepływ T-letni. Korzystając ze wzoru (9) i mając zadane w **tabeli 3** wartości Gw i T_0 obliczyć T i wartości prawdopodobieństwa przewyższenia $p = 1/T$, a mając p obliczyć ze wzoru (4) wartości $Q_{max,T}$ przepływu T-letniego i wpisać je do tabeli. Przepływy $Q_{max,T}$ to **przepływy gwarantowane**. Wybrać jedną wartość $Q_{max,T}$ i wytłumaczyć, co ona oznacza.

Tabela 3. ....

T_0 / Gw	25 lat		50 lat		100 lat		200 lat	
	T	$Q_{max,T}$, m^3/s	T	$Q_{max,T}$, m^3/s	T	$Q_{max,T}$, m^3/s	T	$Q_{max,T}$, m^3/s
99%								
95%								
90%								
75%								
50%								

B. Oddane opracowanie to plik w formacie **pdf** o nazwie **`HI_L3_Nazwisko_Imię_Wersja.pdf`** zawierający**:**

a) nazwisko i imię
b) temat laboratorium
c) nazwę przydzielonego pliku z danymi
d) krótki wstęp (samodzielny!)
e) kolejne zadania, jak w punkcie A