1. Si $S \sim T$ y $U \sim V$, demuestre que $S \times U \sim T \times V$.
2. Demuestre que $\mathbb{Q}^n$ es numerable.
3. Pruebe que $(-1,1) \sim \mathbb{R}$ (Sugerencia: Defina $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ como $\varphi(x) = \frac{x}{1-|x|}$ para $x \in (-1,1)$.)
4. Pruebe que cualesquiera dos intervalos con más de un punto son equivalentes.
5. Demuestre las siguientes afirmaciones:
   - El conjunto de los números algebraicos $E = \{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0 \text{ con } p \in \mathbb{Z}[x]\}$ es numerable.
   - Dado $x \in \mathbb{R}$ decimos que x es trascendente si no es algebraico. El conjunto de los números trascendentes es no numerable.
6. Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica. Definimos $D : M \times M \to [0,1]$ como sigue:
   $$D(x,y) = \text{mín}\{d(x,y), 1\}.$$
   Pruebe que D es una métrica y que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque
   $$\{y : D(x,y) < \delta\} \subset \{y : d(x,y) < \epsilon\}$$
7. Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica, definimos $D : M \times M \to [0,1]$ como sigue:
   $$D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$
   Pruebe que D es una métrica.
8.
   - Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica. Pruebe la desigualdad tetrahédrica:
     $$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$$
     para toda $x, y, z, w \in M$.
   - Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una función talque $d(x,y) = d(y,x) > 0$ para toda $x \neq y \in M$, talque $d(x,x) = 0$ para toda $x \in M$ y que satisface la desigualdad tetrahédrica. Pruebe que d es una métrica.
9. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas? Argumenten sus respuestas.
   - $Int(E) = Int(\bar{E})$
   - $\bar{E} = \overline{Int(E)}$
   - $\partial\bar{E} = \partial E$
   - $\partial E^\circ = \partial E$
   - $\overline{E^\circ} = (\bar{E})^\circ$
   - $E' = \partial E$
   - $(\overline{E^c})^c = E^\circ$
   - $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$
   - $\partial E \cap E^\circ = \emptyset$
   - $(E - F)^\circ = E^\circ - F^\circ$
10. Sabemos que dado $E \subseteq (X,d)$, $\overline{E} = E \cup E' = E \cup \partial E$
    - Demostrar que $\overline{E}$ es un conjunto cerrado para cualquier conjunto E.
    - ¿Es cierto que $\partial E \subseteq E'$ ó $E' \subseteq \partial E$?.
    - ¿Bajo que condiciones $\partial E = E'$?.
    - $\overline{E} = \{x \in X : d(x,E) = 0\}$ donde $d(x,E) = \text{ínf}\{d(x,z) : z \in E\}$.

11. Sea (X, d) un espacio métrico, $Y, Z, U \subseteq X$ tales que Y es denso en Z y Z es denso en U, demostrar que Y es denso en U.
12. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que para toda $A, B \subseteq X$
    - $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
    - $(A \setminus A^\circ)^\circ = \emptyset$.
    - $Ext(A \cup B) = Ext(A) \cap Ext(B)$.
    - $Ext(\emptyset) = X$.
    - $Ext(X \setminus Ext(A)) = Ext(A)$.
    - Si $\{E_\alpha\} \subseteq X$ entonces $\displaystyle\bigcup_{\alpha} \overline{E_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha}$. Mostrar que la contención puede ser propia.
    - Si $\bigcup_\alpha \overline{E_\alpha}$ es cerrado. Probar que $\displaystyle\bigcup_{\alpha} \overline{E_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha}$.
13. Sea $A \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto no numerable. Pruebe que A' es no numerable.
14. Decimos que un punto $x \in \mathbb{R}^p$ es un punto de condensación de $A \subset \mathbb{R}^p$ si $B_r(x) \cap A$ es no numerable. Pruebe: Todo conjunto cerrado A puede escribirse como la unión disjunta $A = P \cup N$ de un conjunto perfecto P y otro a lo más numerable N.
15. Demuestre que en un espacio métrico general (M, d), el ser acotado y cerrado *no* implica compacidad (Sugerencia: Sea $M = (0, \infty)$. Examine la forma de las bolas cuando la métrica asociada a M es $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Tome a $H = [1, \infty)$ como probable contraejemplo).
16. ¿Es cierto que la unión de dos conjuntos conjuntos compactos es compacto? ¿Qué sucede con la intersección? Establezca las propiedades correspondientes a las cuestiones que acaba de analizar en caso de tener uniones (intersecciones) finitas o numerables.
17. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son compactos usando solamente la definición de cubiertas:
    - $[0, 1]$
    - $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$
18.
    - Sea $A \subset \mathbb{R}^p$ no vacío y acotado, defínase $K = \{x \in \mathbb{R}^p : d(x, A) \leq 1\}$. Demostrar que K es compacto.
    - Si $A \subset \mathbb{R}^p$ acotado, entonces $\overline{A}$, A' y ∂A son todos compactos, mientras que A° lo es si y sólo si $A \neq \emptyset$.
19. Un espacio métrico es llamado *separable* si contiene un subconjunto denso numerable. Pruebe que $\mathbb{R}^n$ es separable.
20. Se le llama *base* a una colección $\{V_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de X que cumplen con lo siguiente: para todo $x \in X$ y cada conjunto abierto $G \subset X$ tal que $x \in G$, tenemos $x \in V_\alpha \subset G$ para alguna α. Es decir, cada conjunto abierto en X es la unión de una subcolección de conjuntos de $\{V_\alpha\}$. Demuestre que cada espacio métrico separable tiene una base numerable.
21. Recuerde que $\bar{A}$ es la cerradura del conjunto A.
    - De un ejemplo de un conjunto no conexo cuya cerradura sea conexa.
    - Si A es conexo ¿$\bar{A}$ es conexo?
    - Si A es perfecto ¿$\bar{A}$ es perfecto?
    - Si P es perfecto y K compacto ¿$P \cap K$ es necesariamente perfecto?, ¿es necesariamente compacto?
    - Cerraduras e interiores de conjuntos conexos ¿son siempre conexos?
22. ¿Existe un conjunto perfecto en $\mathbb{R}$ que consista de sólo números racionales? ¿Existe alguno que pueda no contener números racionales?