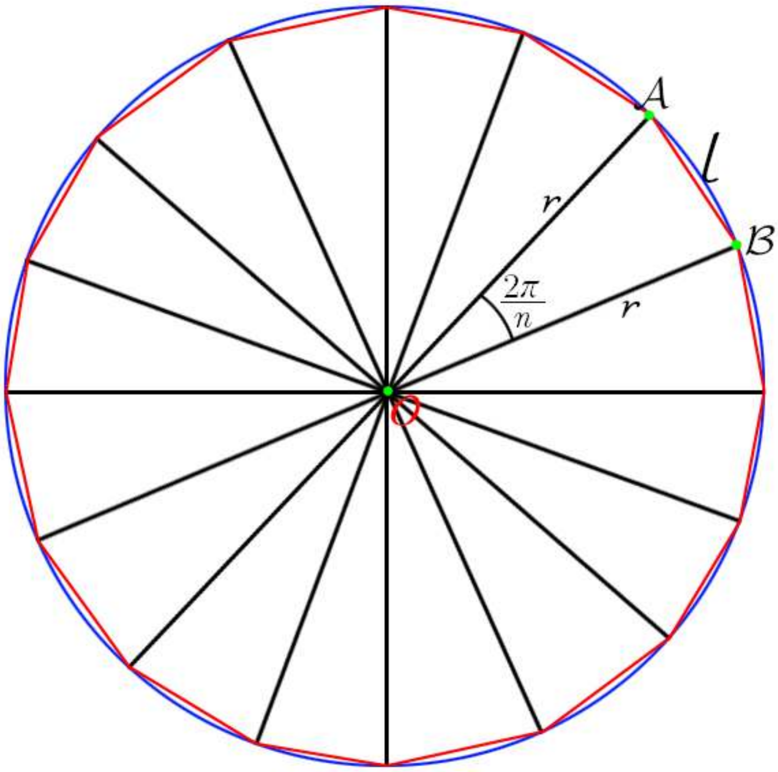
DEMONSTRAÇÃO DAS EQUAÇÕES:

i) **ÁREA DO CÍRCULO;**

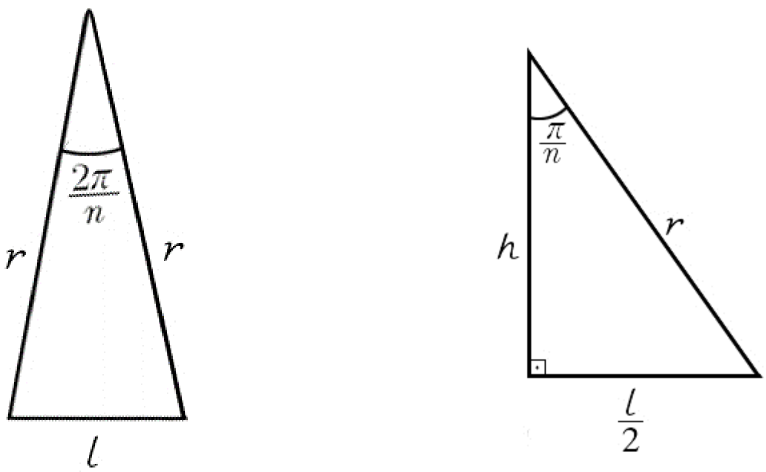
ii) **COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA.**

– Método da inscrição do polígono regular –

Inscrevamos, numa circunferência de raio r, um polígono regular de n lados cuja medida vale l:



No triângulo AOB, têm-se as seguintes relações:



$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{l/2}{r} \Longrightarrow l = 2r\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{h}{r} \Longrightarrow h = r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

A área, a, do triângulo AOB é

$$a = \frac{l\,h}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}2r\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
$$a = \frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$
.

A área do polígono inscrito é a soma das áreas a:

$$\sum a = n\,a \Longrightarrow \sum a = \frac{1}{2}n\,r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

É evidente que, à medida que n cresce, a área do polígono se aproxima da área do círculo. Então:

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum a \Longrightarrow A = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}n\,r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$A = \frac{1}{2}r^2\lim_{n\to+\infty}n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Façamos

$$t = \frac{2\pi}{n} \Longrightarrow n = \frac{2\pi}{t}$$
.

Se

$$n \to +\infty \Longrightarrow t \to 0^+$$
, então:

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{t\to0^+}\frac{2\pi}{t}\sin(t) = 2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(t)}{t} = 2\pi$$
.

Portanto:

$$A = \frac{r^2}{2}\lim_{n\to+\infty}n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \Longrightarrow A = \frac{r^2}{2}2\pi$$

$$\therefore$$

$$A = \pi r^2$$

Analogamente, para o comprimento, C :

$$C = \lim_{n \to +\infty} \sum l$$

$$C = \lim_{n \to +\infty} 2rn \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$C = 2r \lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
.

Façamos

$$\frac{\pi}{n} = u \Longrightarrow n = \frac{\pi}{u}$$
.

Se

$$n \to +\infty \Longrightarrow u \to 0^+$$
.

Então:

$$C = 2r \lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$C = 2r \lim_{u \to 0^+} \pi \frac{\sin(u)}{u}$$

$$C = 2\pi r \lim_{u \to 0^+} \frac{\sin(u)}{u}$$

$$\therefore$$

$$C = 2\pi r$$

Mateus Honório Rodrigues.
João Pessoa, 31 de maio de 2013.