# برنامه ریزی خطی پارامتری

مبحث برنامه ریزی پارامتری ادامه و مکمل تحلیل حساسیت می باشد.

تحلیل حساسیت:میزان حساسیت جواب بهینه در مقابل تغییرات پارامترها $(b_i, c_{i,} \overline{a}_i)$

در تحلیل حساسیت ،تأثیر گسسته پارامترهای مدل بر جواب نهایی بررسی می شد،یا تغییرات پیوسته پارامترها تنها در یک دامنه مشخص ،تعیین می گشت. اما در برنامه ریزی پارامتری تأثیر تغییرات پیوسته پارامترها در تمام دامنه های ممکن مد نظر است.

**حالت اول:تغییرات پارامتری در ضرایب تابع هدف**

صورت عادی تابع هدف در برنامه ریزی خطی چنین است:

$$Z=\sum_{j=۱}^{n} c_j x_j$$

در برنامه ریزی پارامتری این تابع با تابع هدف زیر تعویض می شود:

$$Z(\theta)=\sum_{j=۱}^{n}(c_j+\alpha_j\,\theta)x_j$$

برای سادگی فرض می شود $\theta \geq 0$ باشد.

خلاصه رویه انجام عملیات برنامه ریزی پارامتری در مورد تغییرات پارامترهای تابع هدف به شرح زیر است:

گام ۱) مسأله را به روش سیمپلکس به ازای $\theta = 0$ حل کنید.

گام ۲) با استفاده از رویه تحلیل حساسیت ،تغییرات ناشی از وجود $\theta$ را در سطر صفر وارد کنید.

گام ۳) مقدار $\theta$ را آنقدر اضافه کنید تا ضریب یکی از متغییر های غیراساسی در سطر صفر منفی شود.

گام ٤) از این متغییر به عنوان متغییر اساسی ورودی تکرار بعدی روش سیمپلکس استفاده کنید و جواب بهینه جدید را به دست آورید و به گام ۳ بازگردید.

***این شیوه تا جایی ادامه میابد تا سرانجام θ به مقداری میرسد که جواب یا وجود ندارد یا بدون تغییر باقی می ماند.**

**مثال) مسأله زیر را در نظر بگیرید.**

Max $Z=۳x_۱+x_۲$

s.t. $۲x_۱+۳x_۲ \leq ٦$

$۲x_۱+x_۲ \leq ٤$

$x_۱,x_۲ \geq ۰$

**اگر تابع Z به صورت پارامتری به شکل زیر تغییر نماید تمام جواب های بهینه مسأله را به دست آورید.**

$Z(\theta)=(۳+\theta)\,x_۱+(۱+۲\theta)\,x_۲$

**حل:**

**گام ۱) مسأله را به ازای $\theta = 0$ حل کنید.**

| متغیر های اساسی | شماره سطر | Z | $x_۱$ | $x_۲$ | $s_۱$ | $s_۲$ | اعداد سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | ۰ | | ۱ | ۰ | ۱/۲ | ۰۳/۲ | ٦ |
| | ۱ | ۰ | ۰ | ۲ | ۱ | -۱ | ۲ |
| | ۲ | ۰ | ۱ | ۱/۲ | ۰ | ۱/۲ | ۲ |

**گام ۲) با استفاده از روش تحلیل حساسیت ،تغییرات ناشی از تابع هدف را در جدول بهینه اعمال کنید.**

$z_j-c_j=-c_j+\sum_{i=۱}^{m}\overline{a_{ij}}\,y_i$

$z_۱-c_۱=-(۳+\theta)+[۰ \quad ۳/۲]\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}=-\theta$

$z_۲-c_۲=-(۱+۲\theta)+[۰ \quad ۳/۲]\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}=۱/۲-۲\,\theta$

جدول نهایی بعد از اعمال تغییرات

| متغیر های اساسی | شماره سطر | Z | $x_۱$ | $x_۲$ | $s_۱$ | $s_۲$ | اعداد سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z($\theta$) | ۰ | ۱ | -$\theta$ | ۱/۲-۲ $\theta$ | ۰ | ۳/۲ | ٦ |
| | ۱ | ۰ | ۰ | ۲ | ۱ | -۱ | ۲ |
| | ۲ | ۰ | ۱ | ۱/۲ | ۰ | ۱/۲ | ۲ |

چون بردار متغیر اساسی $x_1$ یکه نیست باید آن را یکه کرد.

**جدول نهایی برای $0 \leq \theta \leq 1/3$**

| متغیر های اساسی | شماره سطر | Z | $x_۱$ | $x_۲$ | $s_۱$ | $s_۲$ | اعداد سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z($\theta$) | ۰ | ۱ | ۰ | ۱/۲-۳/۲$\theta$ | ۰ | ۳/۲+۱/۲ $\theta$ | ٦+۲ $\theta$ |
| | ۱ | ۰ | ۰ | ۲ | ۱ | -۱ | ۲ |
| | ۲ | ۰ | ۱ | ۱/۲ | ۰ | ۱/۲ | ۲ |

جدول فوق وقتی بهینه است که تمام عناصر سطر صفر غیر منفی باشند.

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2\theta} \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad \theta \leq 1/3$$

با فرض۰ ≤ $\theta$ همواره مثبت است . ۳/۲+۱/۲$\theta$ ≥ ۰

گام ۳) در صورتیکه $\theta \geq 1/3$ شود ضریب $x_2$ در تابع هدف منفی می شود و مسأله دیگر بهینه نیست.

گام ٤) متغیر $x_2$ به عنوان متغیر ورودی انتخاب، و $s_1$ خروجی می شود.جدول زیر تکرار بعدی سیمپلکس را نشان می دهد.

**جدول نهایی برای۷ ≥ $\theta$ ≤۱/۳**

| متغیر های اساسی | شماره سطر | Z | $x_۱$ | $x_۲$ | $s_۱$ | $s_۲$ | اعداد سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z($\theta$) | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | (۳/٤$\theta$-۱/٤) | (۷/٤-۱/٤ $\theta$) | ۱۱/۲+۷/۲ $\theta$ |
| | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱/۲ | -۱/۲ | ۱ |
| | ۲ | ۰ | ۱ | ۰ | -۱/٤ | ۳/٤ | ۳/۲ |

جدول وقتی بهینه است که:

۳/٤$\theta$ − $\frac{۱}{٤}$ ≥ ۰ → $\theta$ ≥ ۱/۳

۷/٤-۱/٤$\theta$ ≥ ۰ → $\theta$ ≤ ۷

گام ۳ و ٤)برای $\theta > 0$ جدول غیر بهینه است و $s_2$ متغیر ورودی و $x_1$ خروجی خواهد بود.جدول زیر تکرار بعدی سیمپلکس را نشان می دهد.

جدول نهایی برای $\theta \geq 7$

| متغیر های اساسی | شماره سطر | Z | $x_۱$ | $x_۲$ | $s_۱$ | $s_۲$ | اعداد سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z(\theta)$ | ۰ | ۱ | (-۷/۳+۱/۳ $\theta$) | ۰ | (۱/۳+۲/۳ $\theta$) | ۰ | ۲+٤ $\theta$ |
| | ۱ | ۰ | ۲/۳ | ۱ | ۱/۳ | ۰ | ۲ |
| | ۲ | ۰ | ٤/۳ | ۰ | -۱/۳ | ۱ | ۲ |

به دلیل اینکه با افزایش بیشتر $\theta$ مسأله هیچ گاه از حالت بهینگی خارج نمیشود ،مراحل عملیاتی پایان میابد.

## حالت دوم_تغییرات پارامتری در اعداد سمت راست

در این حالت $b_i$ به صورت عبارت $(b_i+\theta\alpha_i)$ تغییر میابد.

خلاصه رویه انجام عملیات برنامه ریزی پارامتری در مورد تغییرات پارامترهای اعداد سمت راست به شرح زیر است:

گام ۱) مسأله را به روش سیمپلکس به ازای $\theta = 0$ حل کنید.

گام ۲) با استفاده از رویه تحلیل حساسیت ،تغییرات ناشی از وجود $\theta$ را در ستون سمت راست وارد کنید.

گام ۳) مقدار $\theta$ را آنقدر اضافه کنید تا مقدار یکی از متغییر های اساسی در ستون سمت راست منفی شود.

گام ٤) از این متغییر به عنوان متغییر اساسی خروجی تکرار بعدی روش سیمپلکس ثانویه استفاده کنید و جواب بهینه جدید را به دست آورید و به گام ۳ بازگردید.

*این شیوه تا جایی ادامه میابد تا سرانجام $\theta$ به مقداری میرسد که جواب یا وجود ندارد یا بدون تغییر باقی می ماند.

مثال) مسأله زیر را در نظر بگیرید:

Max Z=۳$x_۱$ +۲$x_۲$

S,t. $۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۶$

$۲x_۱ + x_۲ \leq ۴$

$x_۲, x_۱ \geq ۰$

اگر اعداد سمت راست به صورت پارامتری به شکل زیر تغییر یابند ،تمام جواب های بهینه را به دست آورید.

حل:گام ۱) مسأله را به ازای $\theta = 0$ حل کنید.

| متغیر های اساسی | شماره سطر | $Z(\theta)$ | $x_۱$ | $x_۲$ | $s_۱$ | $s_۲$ | اعداد سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z(\theta)$ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱/۴ | ۵/۴ | ۱۳/۲ |
| | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱/۲ | -۱/۲ | ۱ |
| | ۲ | ۰ | ۱ | ۰ | -۱/۴ | ۳/۴ | ۳/۲ |

گام ۲) با استفاده از روش تحلیل حساسیت ،تغییرات ناشی از تغییراعداد سمت راست را در جدول بهینه اعمال کنید.

$$\Delta y_{\cdot}^{*} = \sum_{i=۱}^{m} y_i^{*}\, \Delta \bar{b_i} \qquad \rightarrow \Delta y_{\cdot}^{*} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & \frac{۵}{۴} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta \\ +\theta \end{bmatrix} = \theta \quad \rightarrow y_{\cdot}^{*} = \frac{۱۳}{۲} + \theta$$

$$\Delta b_k^{*} = \sum_{i=۱}^{m} s_{ki}^{*}\, \Delta \bar{b_i} \qquad \rightarrow \Delta b_k^{*} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta \\ +\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta \\ +\theta \end{bmatrix} \quad \rightarrow b_k^{*} = \begin{bmatrix} ۱ - \theta \\ \frac{۳}{۲} + \theta \end{bmatrix}$$

**جدول نهایی بعد از انجام تغییرات برای $0 \leq \theta \leq 1$**

| متغیر های اساسی | شماره سطر | $Z(\theta)$ | $x_۱$ | $x_۲$ | $s_۱$ | $s_۲$ | اعداد سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z(\theta)$ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱/۴ | ۵/۴ | ۱۳/۲ $+\theta$ |
| | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱/۲ | -۱/۲ | ۱-$\theta$ |
| | ۲ | ۰ | ۱ | ۰ | -۱/۴ | ۳/۴ | ۳/۲+$\theta$ |

جدول وقتی موجه و بهینه است که اعداد سمت راست همگی غیر منفی باشند:

$۱-\theta \geq 0 \quad \rightarrow 0 \leq \theta \leq 1$

گام ۳ و٤) برای $\theta \geq 1$ ، $1-\theta$ منفی شده و جدول غیر موجه و $x_2$ متغیر خروجی می باشد.جدول زیر سیمپلکس ثانویه مسأله فوق می باشد.

**جدول نهایی برای $1 \leq \theta \leq 6$**

| متغیر های اساسی | شماره سطر | $Z(\theta)$ | $x_۱$ | $x_۲$ | $s_۱$ | $s_۲$ | اعداد سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z(\theta)$ | ۰ | ۱ | ۰ | ۵/۲ | ۳/۲ | ۰ | ۹-۳/۲$\theta$ |
| | ۱ | ۰ | ۰ | -۲ | -۱ | ۱ | -۲+۲$\theta$ |
| | ۲ | ۰ | ۱ | ۳/۲ | ۱/۲ | ۰ | ۳-$\theta$/۲ |

جدول وقتی موجهه است که:

۹-۳/۲$\theta \geq$ ۰

-۲+۲$\theta \geq$ ۰ $\rightarrow$ ۱$\leq \theta \leq$ ٦

۳-$\theta$/۲$\geq$ ۰

گام ۳ و٤) به ازای $\theta \geq 6$ جدول غیر موجهه است و $x_1$متغیر خروجی می باشد. اما از آنجایی که در سطر دوم عدد منفی وجود ندارد نمی توان سیمپلکس ثانویه نوشت و روند برنامه ریزی پارامتری متوقف می گردد.

**حالت سوم_تغییرات پارامتری در ضرایب مربوط به متغیر های غیر اساسی**

در این حالت فقط به بررسی تغییرات پارامتری در ضرایب فنی( $\overline{a_{ij}}$) مربوط به یک متغیر غیر اساسی می پردازیم .در مورد ضرایب فنی ( $\overline{a_{ij}}$) مربوط به متغیر های اساسی ،مسأله پیچیده خواهد شد که مورد بحث قرار نمی گیرد.

در این حالت $\overline{a_{ij}}$ به صورت ( $\overline{a_{ij}}$ $+\theta\alpha_i$) تغییر می کند.

مسأله را به ازای $\theta = 0$ حل می کنیم. آنگاه با استفاده از تحلیل حساسیت، تغییرات پارامترها را در جدول بهینه اعمال می کنیم. این تغییرات تنها می تواند بر بهینگی مسأله تأثیر بگذارد.

***توجه**: در این حالت نمی توان تمامی دامنه $\theta$ را به دست آورد زیرا با حصول اولین $\theta'$، $\theta \geq \theta'$، بردار این متغیر اساسی شده ،لذا مشمول تحلیل اخیر نخواهد شد.*

مثال ) مسأله زیر را در نظر بگیرید.

Max $Z=۳x_۱+۲x_۲+۵x_۳$

s.t $\quad x_۱+۲x_۲+x_۳\leq ٤۰$

$۳x_۱+۲x_۳ \leq ٦۰$

$x_۱+٤x_۲ \leq ۳۰$

$x_۳ ,\ x_۲, x_۱ \geq ۰$

اگر ضرایب فنی مربوط به متغیر های اساسی $x_1$ به شکل زیر تغییر یابند ،تمام جواب های بهینه را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} \overline{a_{۱۱}} \\ \overline{a_{۲۱}} \\ \overline{a_{۳۱}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+\theta \\ ۳-۲\theta \\ 1+3\theta \end{bmatrix}$$

حل:گام ۱) مسأله را به ازای $\theta = 0$ حل کنید.

**جدول نهایی برای $\theta = 0$**

| متغیر های اساسی | z | | | | | | | اعداد سمت راست |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | ۱ | ٤ | ۰ | ۰ | ۱ | ۲ | ۰ | ۱٦۰ |
| | ۰ | -۱/٤ | ۱ | ۰ | ½ | -۱/٤ | ۰ | ۵ |
| | ۰ | ۳/۲ | ۰ | ۱ | ۰ | ½ | ۰ | ۳۰ |
| | ۰ | ۲ | ۰ | ۰ | -۲ | ۱ | ۱ | ۱۰ |

گام ۲) با استفاده از رویه تحلیل حساسیت بعد اعمال تغییرات فوق مقدار $z_1 - c_1$ عبارت خواهد شد از:

$z_j - c_j = -c_j + \sum_{i=1}^{m} \overline{a_{ij}}\, y_i$

$$z_1 - c_1 = -3 + [1 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1+\theta \\ 3-2\theta \\ 1+3\theta \end{bmatrix} = 4 - 3\theta$$

این مسأله وقتی بهینه است که :

$4 - 3\theta \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad \theta \leq 4/3$

طبق توضیحات داده شده اولین $\theta'$ بدست آمد ،با ادامه حل و تکرار بعدی سیمپلکس $X_1$ متغیر اساسی خواهد شد که مشمول تحلیل اخیر نمی باشد بنابراین حل مسأله همین جا متوقف می شود.

**حالت چهارم–تغییرات هم زمان در ضرایب تابع هدف ،اعداد سمت راست، ضرایب متغیر های تصمیم در محدودیت ها**

این حالت در واقع ترکیبی از سه حالت قبل می باشد.

برای مطالعه بیشتر به کتاب مهرگان ص ۲۲۸ مراجعه فرمایید.