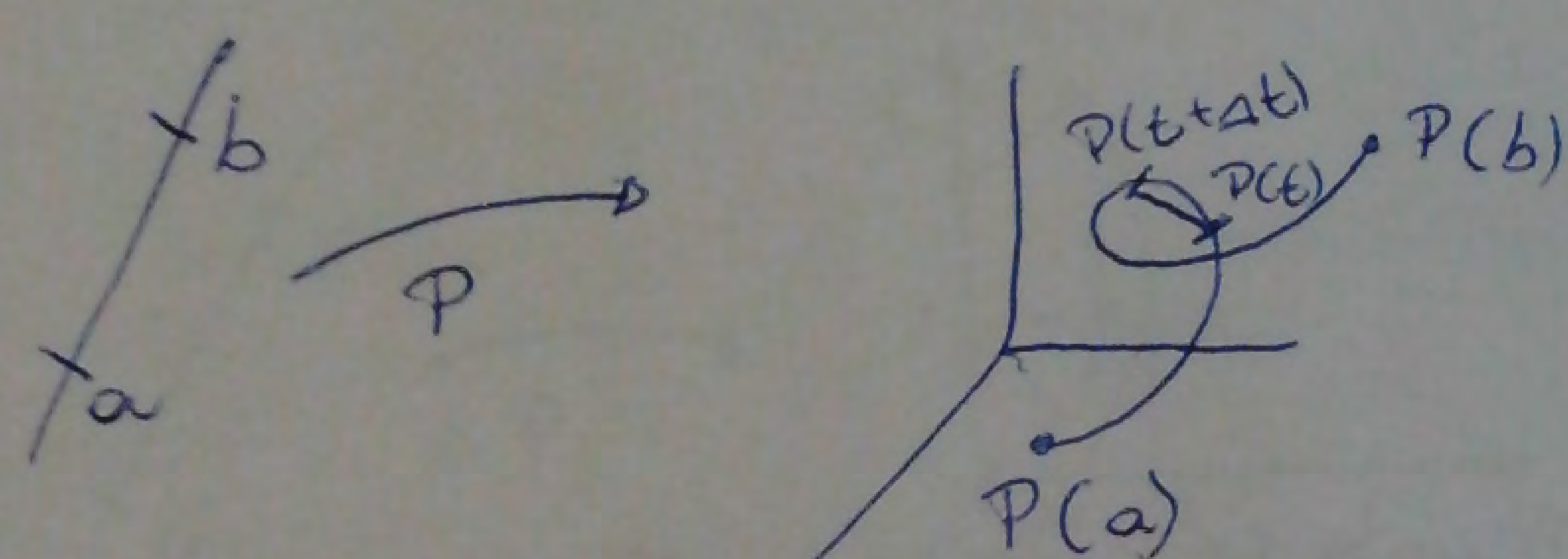
04/11/2013

Integrais de Linha de 1ª espécie

→ **Vimos:** Um caminho de parametrização $P: [a,b] \to \mathbb{R}^3$,

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

é regular se $P'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é contínua com $\|P'(t)\| \neq 0 \ \forall \ t \in [a,b]$.



Vimos também:

$$\| P(t+\Delta t) - P(t) \| \simeq \| P'(t) \| \Delta t$$

Logo, se $\delta(P(t))$ é a densidade linear no ponto $P(t)$,

então

$$M = \int_a^b \delta(P(t)) \cdot \|P'(t)\| \, dt$$

= massa do caminho.

Em particular,

$$\text{comprimento} = \int_a^b \|P'(t)\|\,dt$$

Logo, definindo

$$s(t) = \int_a^t \|P'(\tau)\|\,d\tau$$

↳ comprimento em cada instante

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|P'(t)\|$$

e dizemos que

$ds = \|P'(t)\|\,dt$ = elemento comprimento de arco.

Relações semelhantes:

$$\begin{cases} x = g(t) \\ dx = |g'(t)|\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} (x,y) = g(r,\theta) \\ dx\,dy = |Jg(r,\theta)|\,dr\,d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x,y,z) = g(\rho,\theta,\phi) \\ dx\,dy\,dz = |Jg(\rho,\theta,\phi)|\cdot d\rho\,d\theta\,d\phi \end{cases} \qquad \begin{cases} s = \text{comp} \\ ds = \|P'(t)\|\,dt \end{cases}$$

Notação:

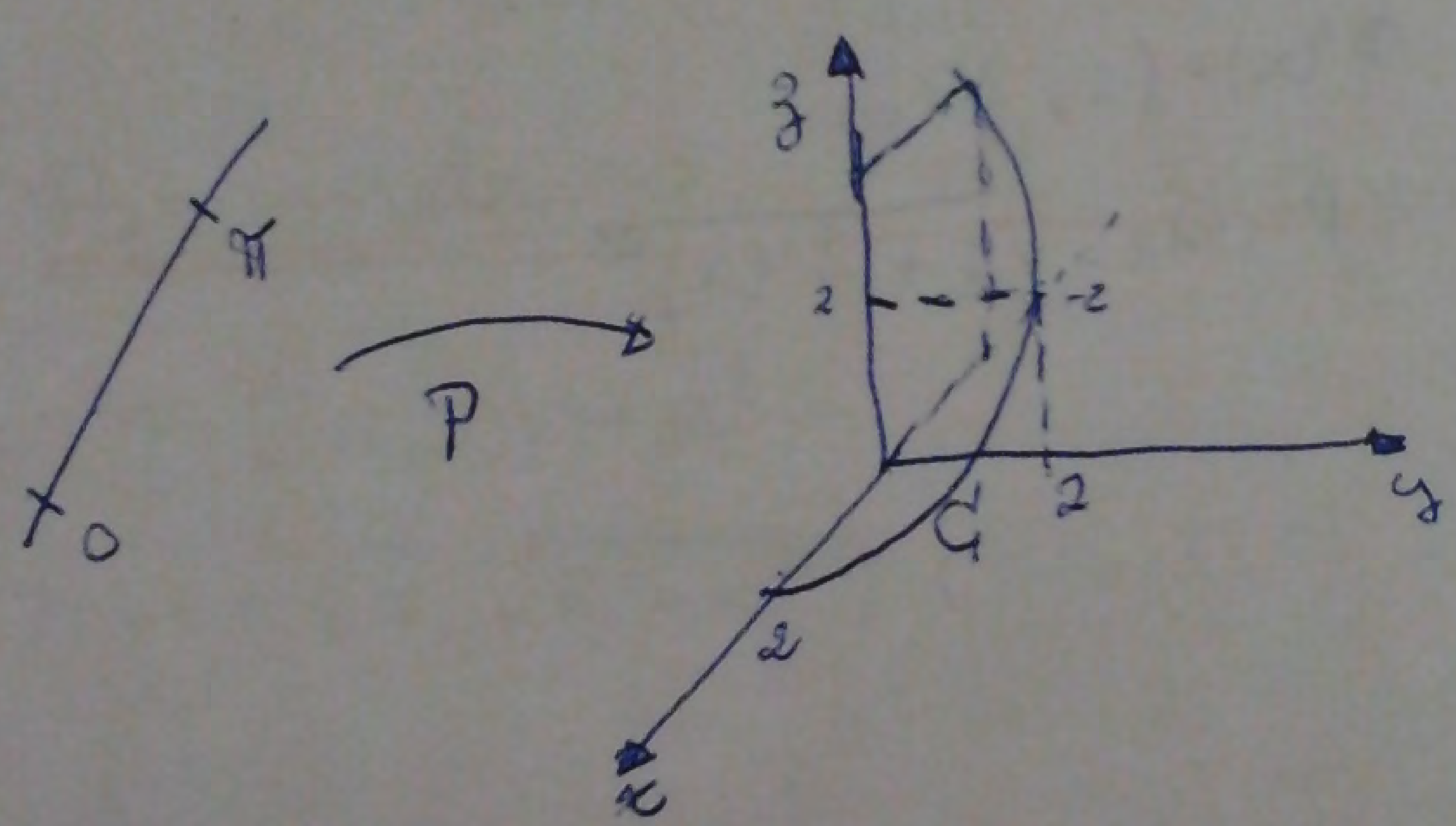
- C = imagem da parametrização $P : [a,b] \to \mathbb{R}^3$
- Para uma função contínua f, definimos

$$\boxed{\int_C f\, ds := \int_a^b f(P(t)) \cdot \|P'(t)\|\, dt}$$

↳ integral de linha de 1ª espécie de f sobre C.

Ex: C o caminho de parametrização $P : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$P(t) = (2 \cdot \cos t, 2 \cdot \operatorname{sen} t, 3t)$



Então,

$$\int_C \delta_0\, ds = \int_0^\pi \delta_0 (P(t)) \|P'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^\pi \delta_0 \sqrt{13}\, dt = \delta_0 \sqrt{13}\, \pi.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x\, \delta_0\, ds = \frac{1}{M} \int_0^\pi (2 \cdot \cos(t) \delta_0 \|P'(t)\|\, dt = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\,\delta_0\,ds$$

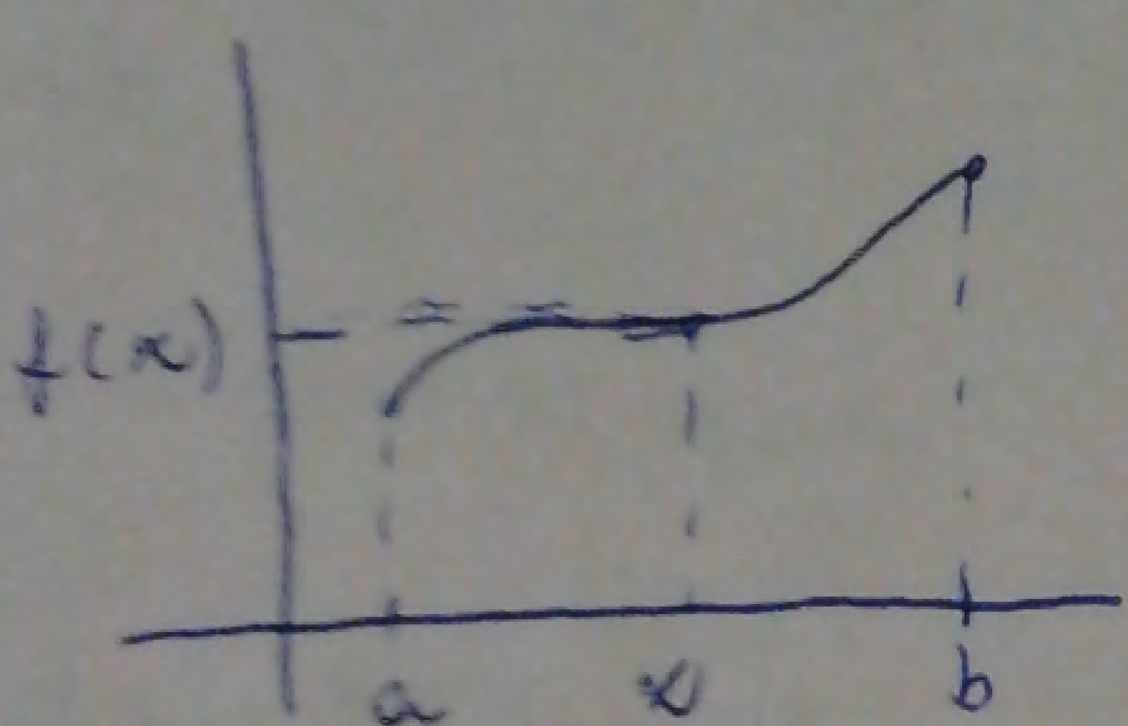
$$= \frac{2\sqrt{13}\,\delta_0}{M}\int_0^{\pi} sen(t)\,dt.$$

$$= \frac{2\sqrt{13}\,\delta_0}{M}\cdot 2$$

$$= \frac{4}{\pi}$$

<u>Obs:</u> $P : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$P(x) = (x, f(x))$



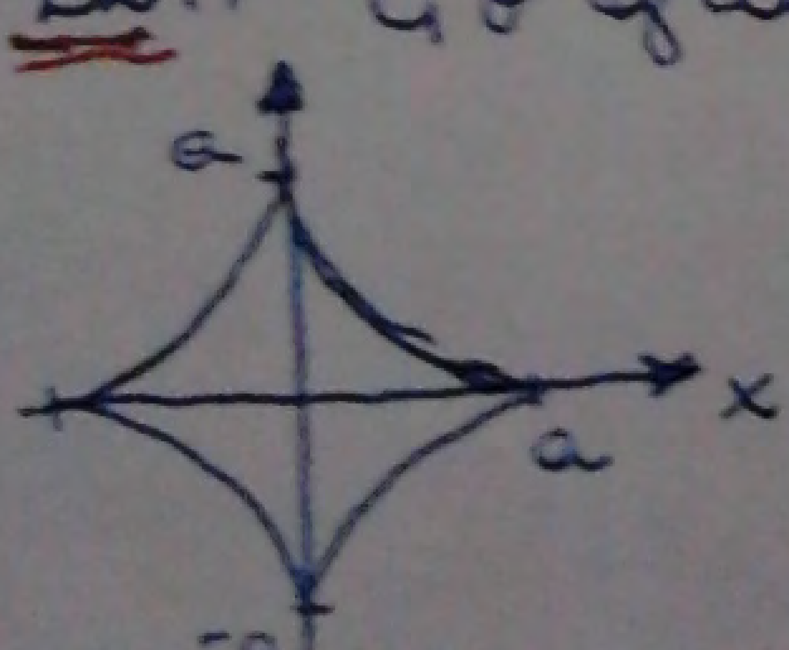
$P'(x) = (1, f'(x))$

$\|P'(x)\| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$

$$\Rightarrow comp. = \int_C ds$$

$$= \int_a^b \|P'(x)\|\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

<u>Ex.:</u> C o gráfico da equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$



Para $x \in [0,a]$ e $y \in [0,a]$, temos que

$$y(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$$

$$y'(x) = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right.$$

$$= -\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{1/2} \cdot x^{-1/3}$$

$$\Rightarrow 1 - y'(x)^2 = 1 + \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right) x^{-2/3}$$

$$= a^{2/3} \cdot x^{-2/3}$$

$$\Rightarrow \text{comp. de } C = 4\int_0^a \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

$$= 4\int_0^a a^{1/3} \cdot x^{-1/3}\, dx$$

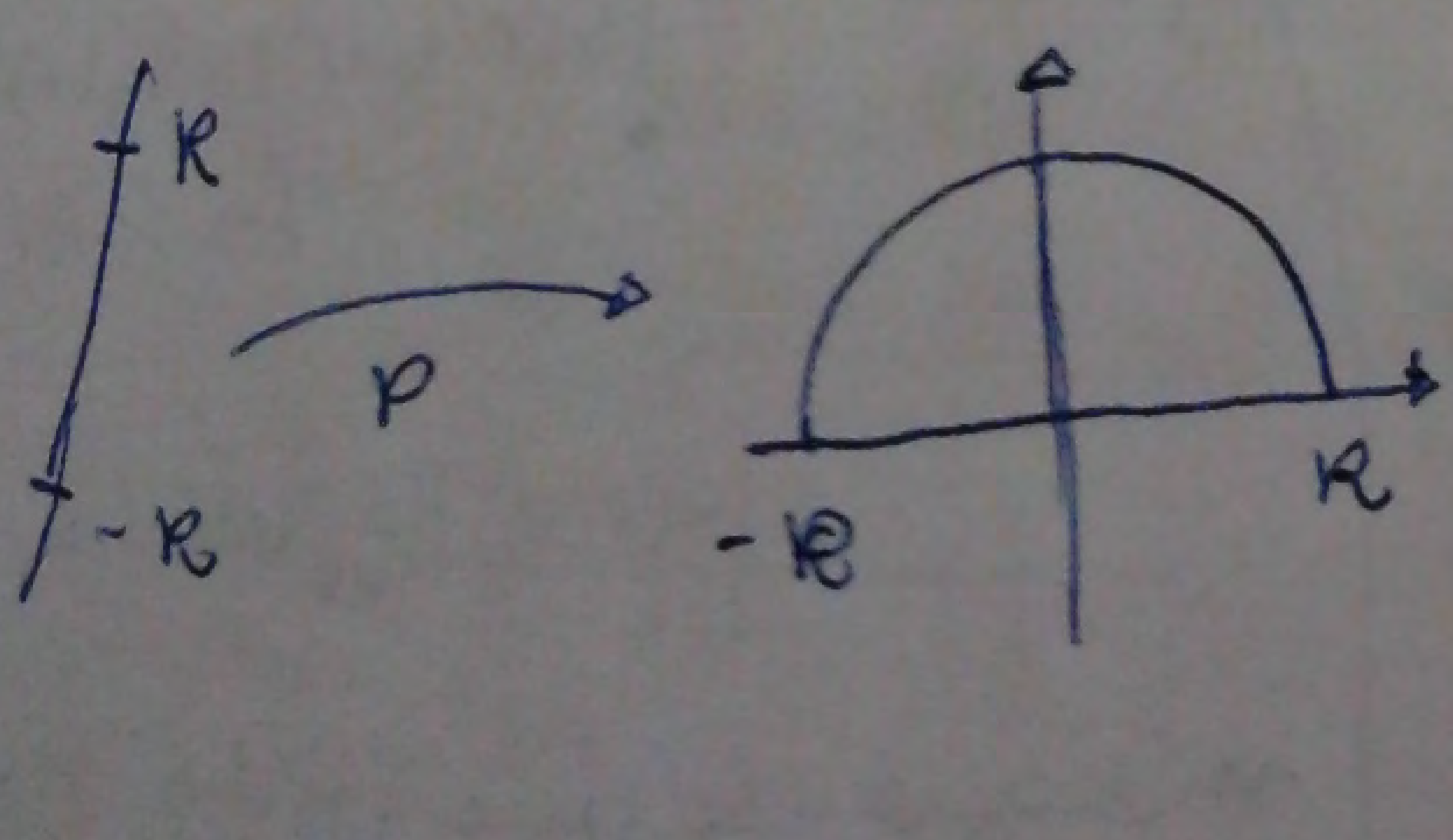
$$= 4a^{1/3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{2/3} \Big|_0^a$$

$$= 6a^{1/3} \cdot a^{2/3} = 6a$$

Parametrização de Caminhos

Ex.: $P : [-R, R] \to \mathbb{R}^2$

$$P(x) = \left(x, \sqrt{R^2 - x^2}\right)$$



Temos

$$P'(x) = \left(1, \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)^{-1/2}(-2x)\right)$$

$$= \left(1, \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)$$

e

$$\|P'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

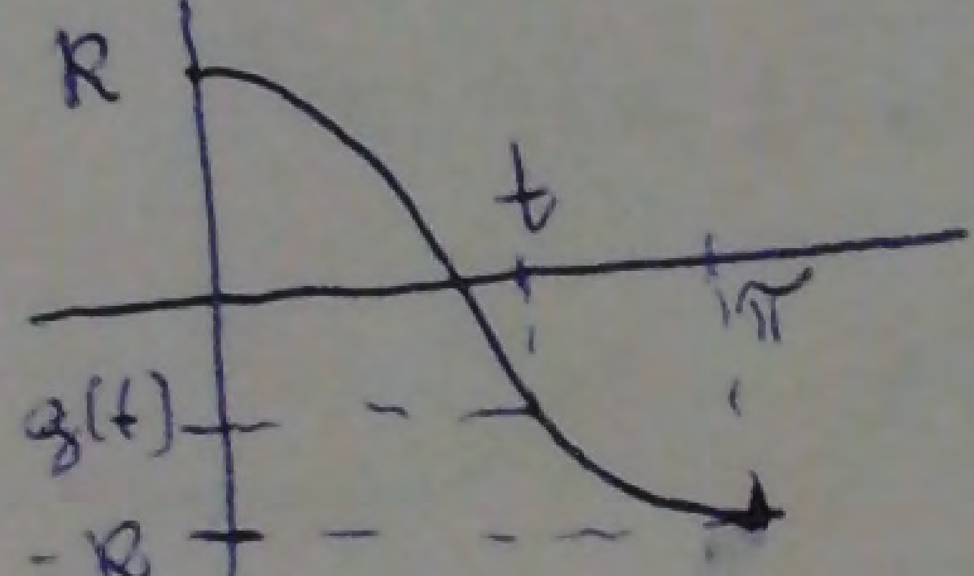
Logo, se δ é a densidade, então:

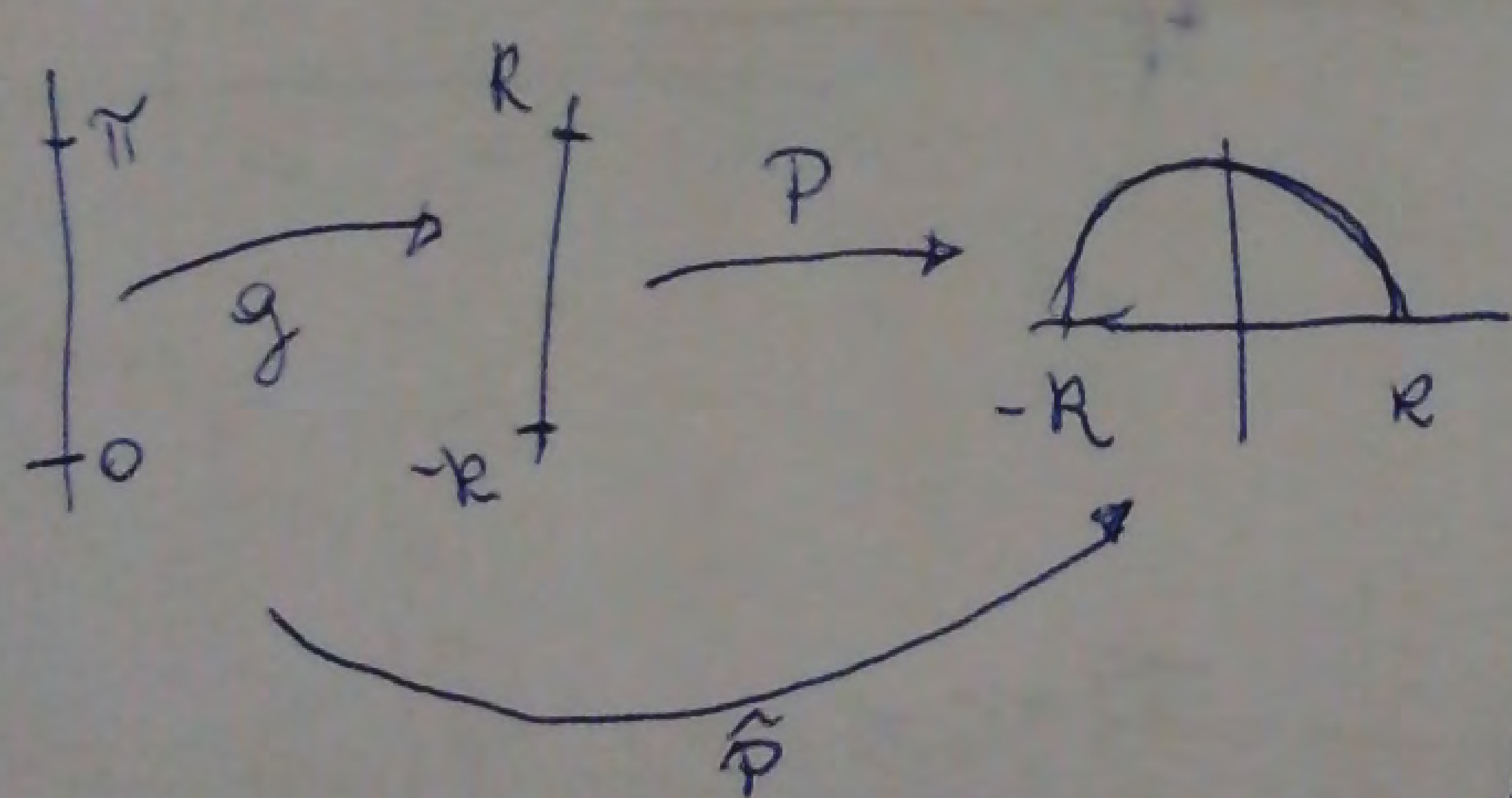
$$\int_C ds = \int_{-R}^{R} \delta(P(x)) \, \|P'(x)\| . dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\delta(P(x))\, R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \, dx$$

Considere a mudança

$g : [0, \pi] \to [-R, R]$, $g(t) = R . \cos(t)$





e a reparametrização:

$\hat{P} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$,

$\hat{P}(t) = P(g(t))$

$= (g(t), \sqrt{R^2 - g(t)^2})$

$= (R . \cos(t), R . sen(t))$

Então:

$$\frac{d}{dt}\hat{P}(t) = P'(g(t)) . g'(t)$$

Em particular,

$$\int_C \delta \, ds = \int_{-R}^{R} \delta(P(x)) . \|P'(x)\| \, dx$$

$(x = g(t))$ $$= \int_0^{\pi} \delta(P(g(t))) \|P'(g(t))\| . |g'(t)| \, dt$$

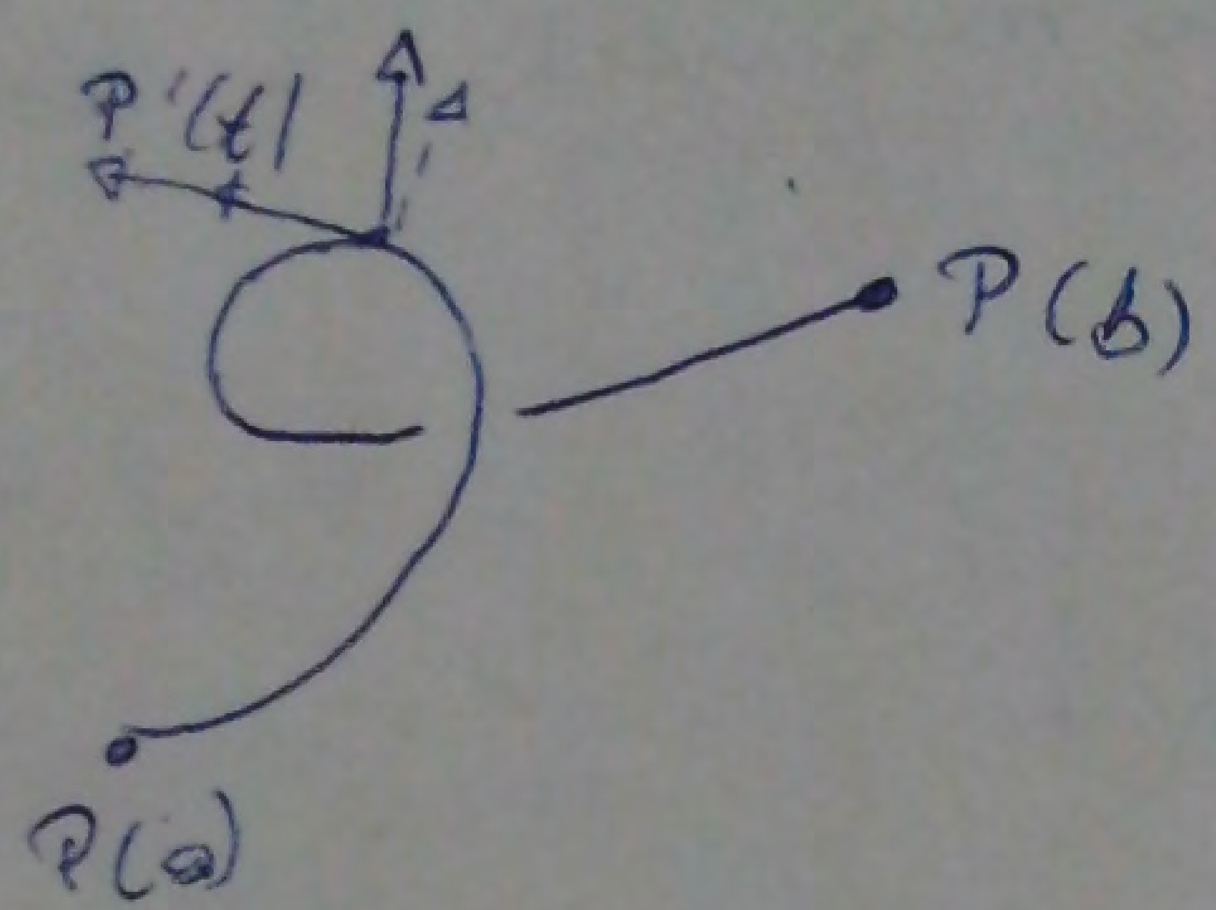
$$= \int_0^{\pi} \delta(\hat{P}(t)) \left\| \frac{d}{dt}\hat{P}(t) \right\| dt$$

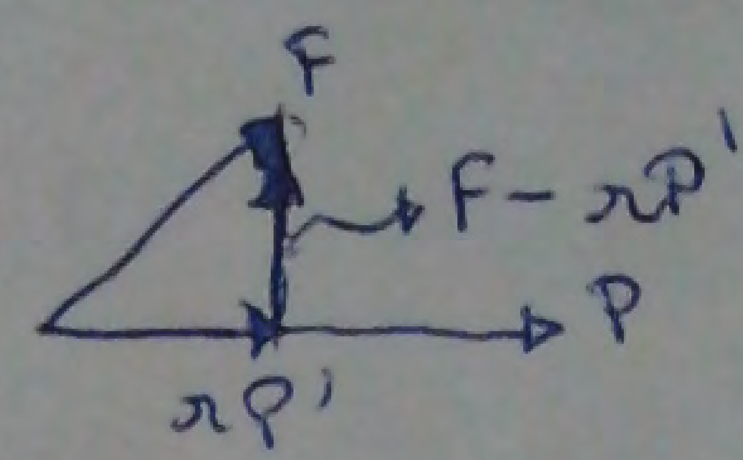
⇝ Segue-se que $\int_C \delta \, ds$ não depende da parametrização de C.

⇝ $\int_C ds = \int_0^{\pi} \left\| \frac{d}{dt}\hat{P}(t) \right\| dt = \int_0^{\pi} R \, dt = \pi R$

Integrais de Linha de 2ª Espécie

Obs:



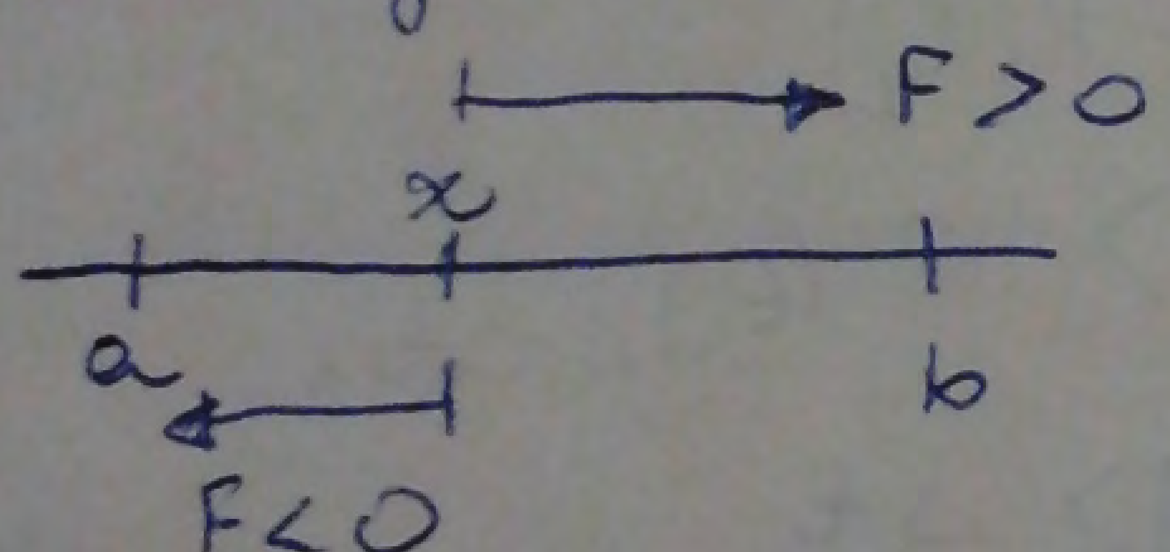


Escolher r tal que

$$0 = \langle F - rP', P' \rangle$$
$$= \langle F, P' \rangle - r \langle P', P' \rangle$$

$$\Rightarrow rP' = \frac{\langle F, P' \rangle}{\|P'\|^2} \cdot P' = \left\langle F, \frac{P'}{\|P'\|} \right\rangle \cdot \frac{P'}{\|P'\|}$$

Ex.: Supor que uma partícula se desloca de a até b sujeita a uma força F.

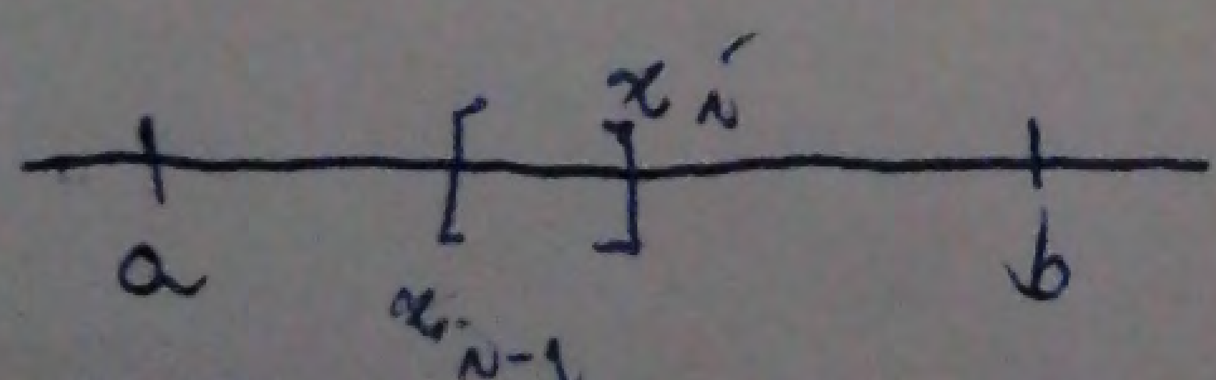


Então.

1) Se F é constante, temos que
$$W_{ab} = F(b-a)$$

2) Se $F = F(x)$, então:

$$W_{x_{i-1}x_i} \cong F(x)\Delta x_i$$
$= \text{trabalho no intervalo } [x_{i-1}, x_i]$



$$\Rightarrow W_{ab} \cong \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Delta x_i$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x)\,dx$$

Ex: $P: [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $P(t) = (2\cos(t); 2.\text{sen}(t), 3t)$ seja a trajetória de uma partícula de massa m sujeita à força:

$$F(x,y,z) = (0,0,-mg)$$

Então.

$F_T(P(t))$ = componente tangencial de F.

$$= \left\langle F(P(t)), \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \right\rangle \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}$$

* Intensidade de $F_T(P(t))$:

$$= \left\langle F(P(t)), \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \right\rangle$$

Tomamos uma partição de $[0,\pi]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \pi$$

Então:

trabalho entre os pontos $P(t_{i-1})$ e $P(t_i)$

$$\simeq \left\langle F(P(t_i)), \frac{P'(t_i)}{\|P'(t_i)\|} \right\rangle \|P'(t_i)\| . \Delta t_i$$

$$= \langle F(P(t_i)), P'(t_i) \rangle \Delta t_i$$

Definimos então:

$$W_{0\pi} = \int_0^\pi \langle F(P(t)), P'(t) \rangle dt$$

No exemplo, temos que:

$$W_{0\pi} = \int_0^\pi -mg \cdot 3dt$$

$$= -mg(3\pi)$$

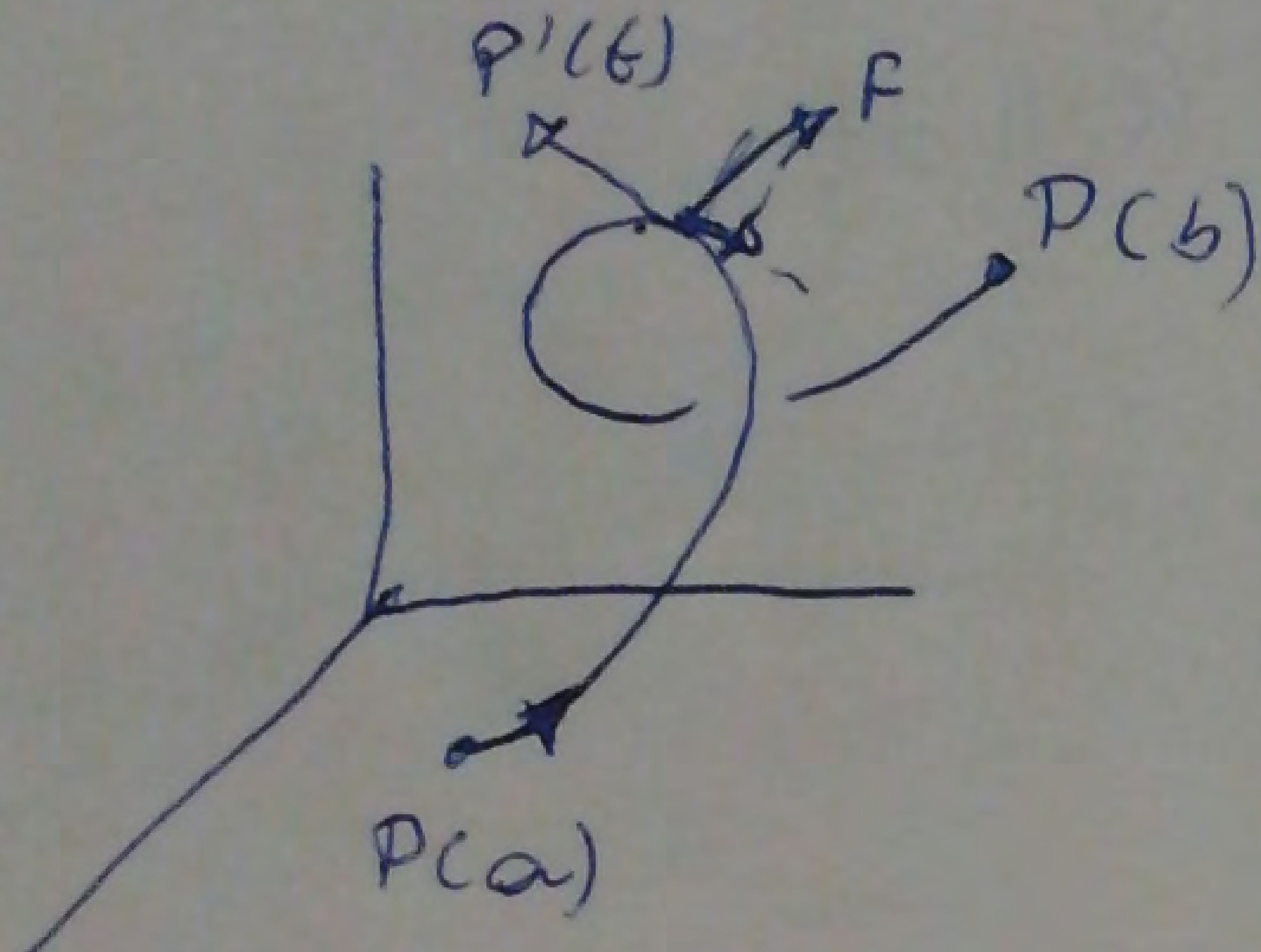
$\boxed{05/11/2013}$

Integrais de Linha de 2ª Espécie

Vimos:

- C um caminho de parametrização regular $P: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ que descreve a trajetória de uma partícula

- $F(x,y,z) = (L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z))$ a força que atua sobre a partícula.



Então,

- $\left\langle F(P(t)), \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \right\rangle \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}$ = componente tangencial da força.

- $\left\langle F(P(t)), \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \right\rangle$ = intensidade da componente tangencial.

Logo,
ΔW = trabalho ao longo do trecho entre $P(t+\Delta t)$ e $P(t)$

$$\simeq \left\langle F(P(t)), \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \right\rangle \|P(t+\Delta t) - P(t)\|$$

$$\simeq \left\langle F(P(t)), \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \right\rangle \|P'(t)\| . \Delta t$$

e portanto:

W = trabalho ao longo de C

$$= \int_a^b \left\langle F(P(t)), \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \right\rangle \|P'(t)\| \, dt$$

$$= \int_a^b \langle F(P(t)), P'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_a^b \left[L(P(t))x'(t) + M(P(t))y'(t) + N(P(t))z'(t) \right] dt.$$

Notação:

Indicamos a integral acima por:

$$\int_C \langle F, T \rangle \, ds$$

ou

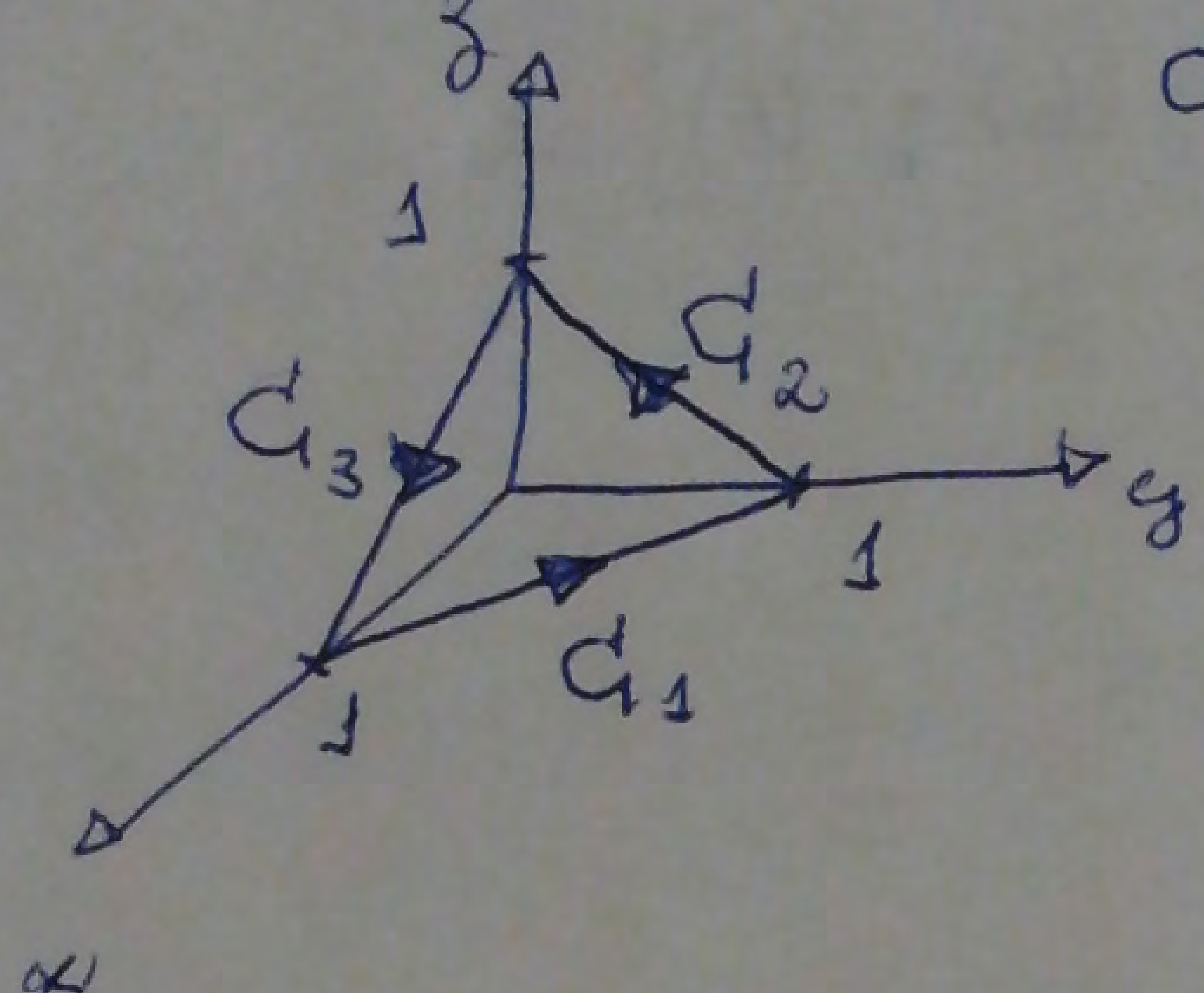
$$\int_C L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

Ex.: Calcular a integral

$$\int_C xy\,dx + z\,dy + y\,dz$$

$(F(x,y,z) = (xy, z, y)$

onde C é o caminho indicado a seguir.



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

• C_1: $P_1(t) = (1-t)(1,0,0) + t(0,1,0)$

$$= (\underbrace{1-t}_{x(t)}, \underbrace{t}_{y(t)}, \underbrace{0}_{z(t)})$$

$t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_{C_1} xy\,dx + z\,dy + y\,dz = \int_0^1 [x(t).y(t)\,x'(t) + \cancel{z(t)}^{0}\,y'(t) + y(t)\,\cancel{z'(t)}^{0}]\,dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)(t)(-1)\,dt$$

$$= \int_0^1 (-t+t^2)\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

• $C_2 : P_2(t) = (1-t)(0,1,0) + t(0,0,1)$

$= (0, 1-t, t)$

$t \in [0,1]$

$\Rightarrow \int_{C_2} xy\,dx + z\,dy + y\,dz$

$\int_0^1 [x(t).\cancel{y(t)}\,x'(t) + z(t)\,y'(t) + y(t)\,z'(t)]\,dt$

$= \int_0^1 [t(-1) + (1-t)]\,dt$

$= \int_0^1 (1-2t)\,dt = 1 - 1 = 0$

• $C_3 : P_3(t) = (1-t)(0,0,1) + t(1,0,0)$

$= (t, 0, 1-t)$

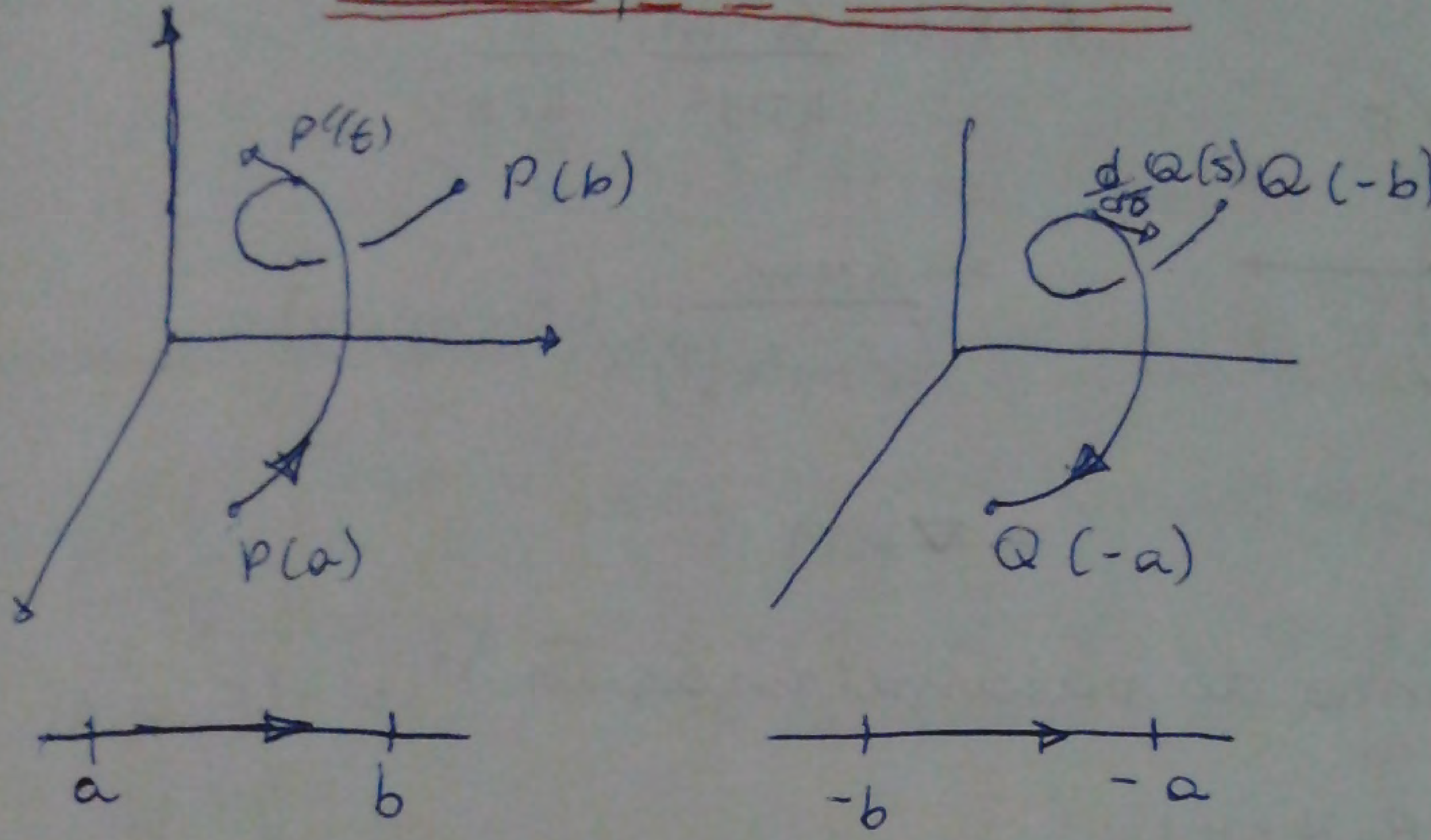
$t \in [0,1]$

$\Rightarrow \int_0^1 [x(t)\cancel{y(t)}\,x'(t) + z(t).\cancel{y'(t)} + \cancel{y(t)}\,z'(t)]\,dt$

$= \int_0^2 0\,dt = 0$

$W_{total} = -\frac{1}{6}$

Orientação de Caminho



Indicamos por $-C$ o caminho de parametrização:

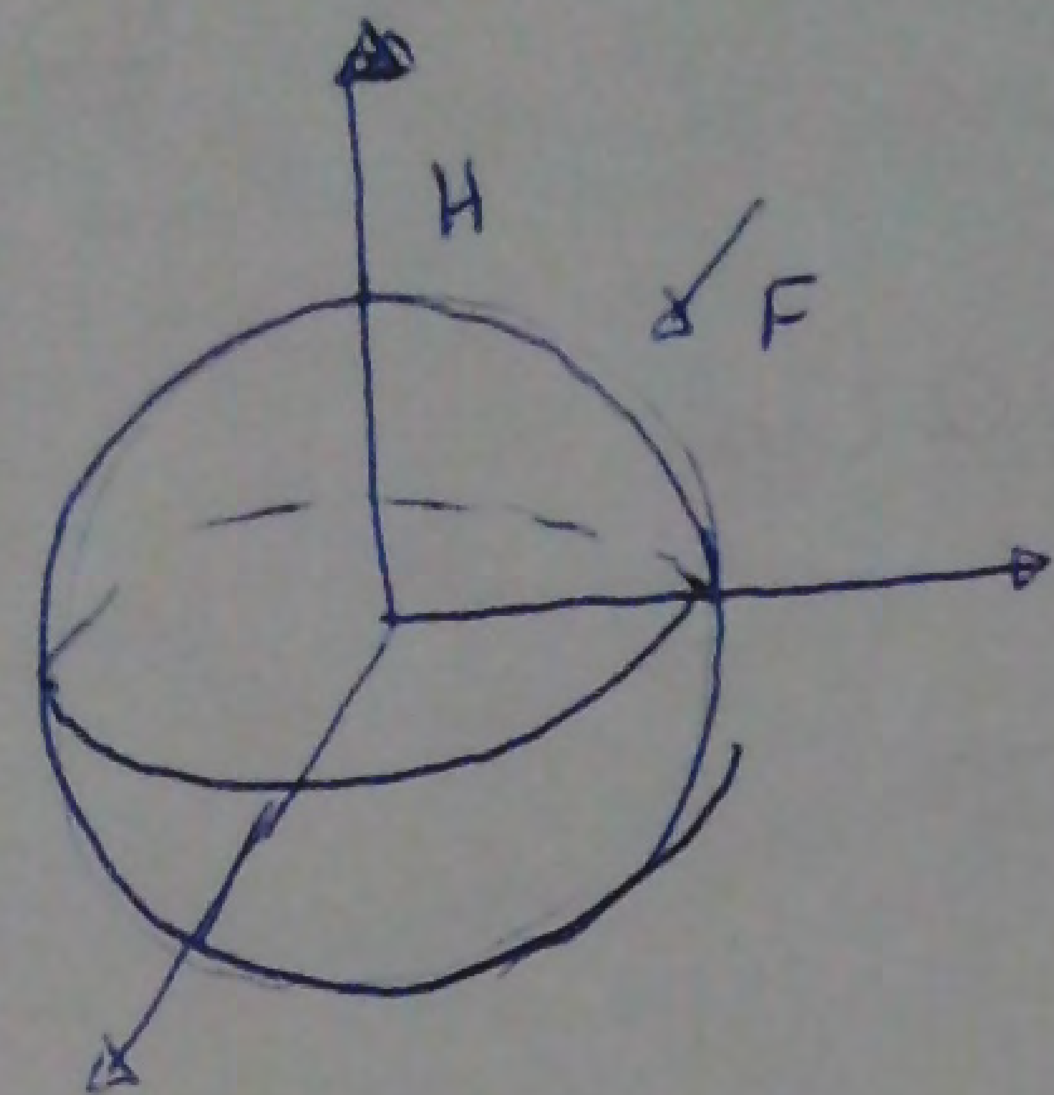
$$Q(\tau) = P(-\tau)\ ,\ \tau \in [-b, -a]$$

com $\dfrac{d}{ds} Q(\tau) = -P'(-\tau)$

⇒ Exercício: Mostrar que

$$\int_{-C} L\,dx + M\,dy + N\,dz = -\int_{C} L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

Ex.: Cálculo do trabalho necessário pra colocar um satélite em órbita.



$$F(P) = -\frac{GMm_0}{\|P\|^2} \cdot \frac{P}{\|P\|}$$

$$= -\frac{GMm_0}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

$$= \nabla f(P)$$

C o caminho de parametrização $P(t) = (0, 0, t)$

com $t \in [R, R+H]$

Temos que

$$W = \int_C L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

$$= -GMm_0 \int_R^{R+H} \frac{t}{t^3}\,dt$$

$$= -GMm_0 \left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_R^{R+H}$$

$$= G.M.m_0 \left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right)$$

Notar que, se

$$f(P) = \frac{GMm_0}{\|P\|}$$

$$= GMm_0\,(x^2+y^2+z)^{-1/2}$$

então

$$f_x(P) = -\frac{1}{2} GMm_0\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot (2x)$$

Além disso, como

$$\frac{d}{dt} f(P(t)) = \langle \nabla f(P(t)), P'(t) \rangle$$

Segue-se que, se C é um qualquer caminho de parametrização $P:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ com $\|P(a)\| = R$ e $\|P(b)\| = R+H$, então:

$$W = \int_C L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

$$= \int_a^b \langle F(P(t)), P'(t) \rangle\, dt$$

$$= \int_a^b \langle \nabla f(P(t)), P'(t) \rangle\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(P(t))\, dt$$

$$= f(P(t)) \Big|_a^b$$ ⤳ Independe da trajetória

$$= GMm_0 \left(\frac{1}{\|P(b)\|} - \frac{1}{\|P(a)\|} \right)$$

$$= GM.m_0 \left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right)$$

Supor agora que $F = \nabla f$ seja a força resultante sobre uma partícula de massa m que percorre o caminho C de parametrização $P:[a,b] \to \mathbb{R}^3$, $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Então

$v(t) = P'(t)$

$a(t) = P''(t)$

e

$F(P(t)) = m \cdot P''(t)$

Por um lado, temos que:

$$W = \int_C L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

$$= \int_a^b \langle F(P(t)), P'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_a^b \langle \nabla f(P(t)), P'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(P(t))\,dt = f(P(t)) \Big|_a^b$$

$$= f(P(b)) - f(P(a))$$

Indicamos por:

$p(P) = -f(P)$
$= \text{energia potencial.}$

e temos que:

$$W = f(P(b)) - f(P(a))$$

$$= p(P(a)) - p(P(b))$$

Por outro lado, temos que:

$$W = \int_a^b \langle F(P(t)), P'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_a^b \langle m \, P''(t), P'(t) \rangle \, dt$$

$$= m \int_a^b \left[x'(t) x''(t) + y'(t) \cdot y''(t) + z'(t) \cdot z''(t) \right] dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \left(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \right) dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \| P'(t) \|^2 \, dt$$

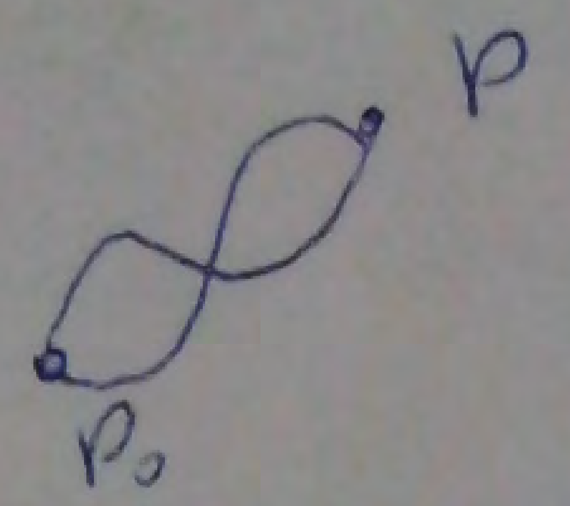
$$= \frac{m}{2} \| P'(t) \|^2 \Big|_a^b = \frac{m}{2} \left(\|P'(b)\|^2 - \|P'(a)\|^2 \right)$$

Daí segue-se que

$$\frac{m}{2} \left(\|P'(b)\|^2 - \|P'(a)\|^2 \right) = W$$

$$= p(P(a)) - p(P(b))$$

$$\Rightarrow p(P(b)) + \frac{m}{2} \|P'(b)\|^2 = p(P(a)) + \frac{m}{2} \|P'(a)\|^2$$



$$f(P) = \int_{P_0}^{P} L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

$$\Rightarrow \nabla f(P) = F(P)$$

$$= (L, M, N)$$

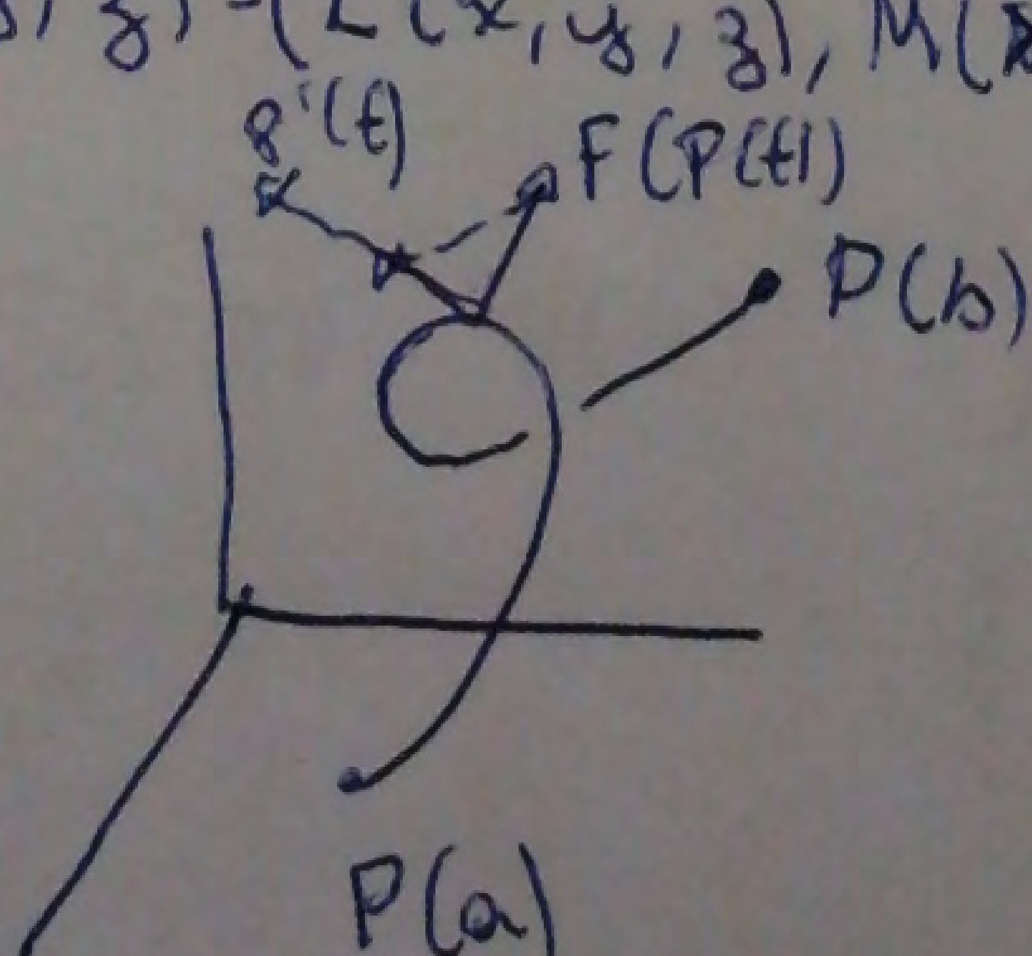
$\boxed{07/11/2013}$

Independência do Caminho

Vimes:

C é caminho de parametrização regular $P:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ que descreve a trajetória de uma partícula sujeita a uma força.

$$F(x,y,z) = (L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z))$$



$$\int_C \langle F, T \rangle\, ds := \int_a^b \left\langle F(P(t)), \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \right\rangle \|P'(t)\|\, dt$$

$$= \int_a^b \langle F(P(t)), P'(t) \rangle\, dt = \int_C L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

F é considerada se existe uma função $f(x,y,z)$ tal que:

$$F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$$

$$= \left(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\right)$$

Nesse caso, temos que

$$\int_C \langle F, T \rangle \, ds = \int_a^b \langle F(P(t)), P'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_a^b \langle \nabla f(P(t)), P'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(P(t)) \, dt$$

$$= f(P(t)) \Big|_a^b = f(P(b)) - f(P(a))$$

⇒ Problema: ~~dt~~ determinar condições para que F seja conservativa.

Ex $F(x,y,z) = (x, y, 1)$

$$\begin{array}{ccc} \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ L & M & N \end{array}$$

Se $F = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$, então $f_x(x,y,z) = x = L$

$f_y(x,y,z) = y = M$ e $f_z(x,y,z) = 1 = N$

Nesse caso, devemos ter

$\partial = (f_x)_y = L_y = M_x = (f_y)_x$

$\partial = (f_y)_z = M_z = N_y = (f_z)_y$

$\partial = (f_x)_z = L_z = N_x = (f_z)_x$

Devemos ter que

$F = \nabla f.$

Assim

$$f(x,y,z) = \int f_x(x,y,z)\,dx$$

$$= \int L(x,y,z)\,dx$$

$$= \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + K(y,z)$$

onde

$$f_y(x,y,z) = M(x,y,z) = K_y(y,z)$$

$$= y$$

$$\Rightarrow K(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + C(z)$$

Logo

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C(z)$$

Finalmente, como

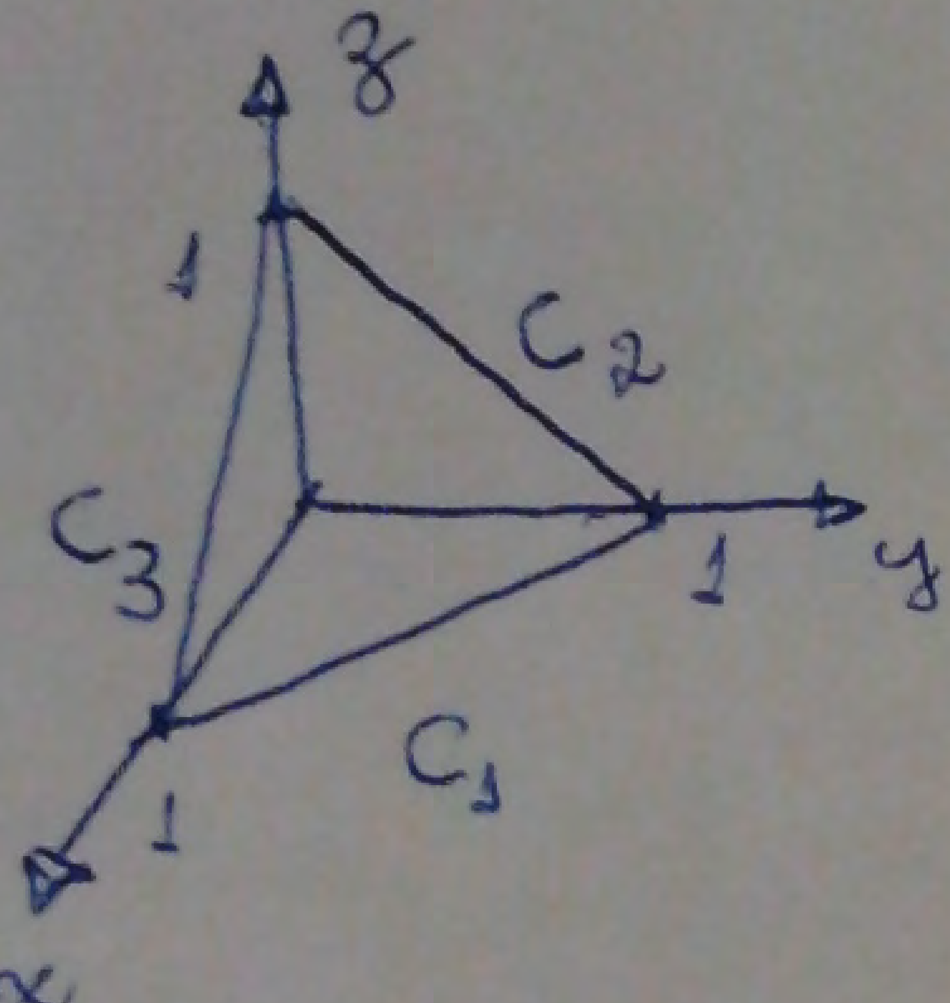
$$1 = f_z(x,y,z) = c'(z)$$

$$\Rightarrow c(z) = z + a$$

Segue-se que

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z + a.$$

Ex.: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$



Calcular

$$\int_C xy\,dx + z\,dy + y\,dz$$

Temos $F = (\underset{L}{xy}, \underset{M}{z}, \underset{N}{y})$

com

$$x = L_y \neq M_x = 0, \quad L_z = N_x, \quad M_z = N_y \Rightarrow F \text{ não é conservativo}$$

$$f(x,y,z) = \int xy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2y + K(y,z$$

$$z = f_y = \cancel{\frac{1}{2}x^2 + K_y(y,z)}$$

Ex: Verificar se

$$F(x,y,z) = (\underset{\overset{\shortparallel}{L}}{y.\operatorname{sen} z}, \underset{\overset{\shortparallel}{M}}{x\operatorname{sen}(z)}, \underset{\overset{\shortparallel}{N}}{xy\cos z})$$

é conservativo. Temos:

$$\begin{cases} L_y = \operatorname{sen} z \\ M_x = \operatorname{sen} z \end{cases} \quad \begin{cases} M_z = x.\cos(z) \\ N_y = x.\cos(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_z = y.\cos z \\ N_x = y.\cos z \end{cases}$$

F é conservativo com $F = \nabla f$ e

$$f(x,y,z) = x.y.\operatorname{sen}(z) + a$$

Exercício: Verificar se

$$F(P) = \frac{K}{\|P\|^\alpha} \cdot \frac{P}{\|P\|}$$

é conservativo e determinar a função potencial.

Caminhos no Plano

· Definição 1.: O caminho $P: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é simples se $P(t) \neq P(s)$ $\forall s \neq t \in [a,b]$