הוכחת הנוסחא למימד הסכום של מרחבי וקטורים / צחי.

יהיו U ו־V שני מרחבים ליניאריים סוף־מימדים, מעל שדה $\mathbb{F}$. אזי:

$$dim(U+V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$$

הוכחה

נסמן: $dim(U \cap V) = k \quad dim(U) = n, \quad dim(V) = m,$ ויהיו:

$$B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, \quad B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \quad A = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$$

בסיסים של המרחבים V, U ו־ $U \cap V$ בהתאמה.

מאחר ו־$A \subseteq U \cap V \subseteq U, V$, נובע שהקבוצה A ניתנת להשלמה לבסיסים של המרחבים U, V בצורה הבאה:

$$B_3 = \{w_1, w_2, \ldots, w_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n\}$$
$$B_4 = \{w_1, w_2, \ldots, w_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_m\}$$

נאחד את הבסיסים B_3, B_4 לבסיס:

$$B = \{w_1, w_2, \ldots, w_k, u_{k+1}, u_{k_2}, \ldots, u_n, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_m\}$$

ונוכיח שקבוצה זו מהווה בסיס ל־$U + V$.

יהי $w \in U + V$. אזי קיימים שני וקטורים, $u \in U$ ו־ $v \in V$ כך ש $w = v + u$.

$$u \in U \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j u_j$$
$$v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \delta_j v_j$$

לפיכך:

$$\begin{aligned} u+v &= \sum_{i_1=1}^{k}\alpha_{i_1}w_{i_1} + \sum_{i_2=k+1}^{n}\beta_{i_2}u_{i_2} + \sum_{i_3=1}^{k}\gamma_{i_3}w_{i_3} + \sum_{i_4=k+1}^{m}\delta_{i_4}v_{i_4} \\ &= \sum_{i_1=1}^{k}(\alpha_{i_1}+\gamma_{i_1})w_{i_1} + \sum_{i_2=k+1}^{n}\beta_{i_2}u_{i_2} + \sum_{i_3=k+1}^{m}\delta_{i_3}v_{i_3} \Rightarrow w \in spanB \end{aligned}$$

ועל כן הקבוצה B פורשת את המרחב $U+V$.

בשלב הבא נוכיח שהקבוצה B בת"ל.
נניח בשלילה שקבוצה זו תלויה ליניארית. הנחה זו מובילה למסקנה כי

$$\sum_{i_1=1}^{k}\alpha_{i_1}w_{i_1} + \sum_{i_2=k+1}^{n}\beta_{i_2}u_{i_2} + \sum_{i_3=k+1}^{m}\gamma_{i_3}v_{i_3} = 0 \qquad (1)$$

כאשר הצירוף (1) אינו טריוויאלי. אם נעביר אגפים, נקבל:

$$\sum_{i_2=k+1}^{n}\beta_{i_2}u_{i_2} + \sum_{i_3=k+1}^{m}\gamma_{i_3}v_{i_3} = -\sum_{i_1=1}^{k}\alpha_{i_1}w_{i_1} \qquad (2)$$

אם $\sum_{i_1=1}^{k}\alpha_{i_1}w_{i_1} \neq 0$, נקבל שהאגף השמאלי של (2) הוא צירוף ליניארי של איברי הבסיס של $U\cap V$, לכן

$$\sum_{i_2=k+1}^{n}\beta_{i_2}u_{i_2} + \sum_{i_3=k+1}^{m}\gamma_{i_3}v_{i_3} \in U\cap V$$

ובפרט

$$\sum_{i_2=k+1}^{n}\beta_{i_2}u_{i_2} + \sum_{i_3=k+1}^{m}\gamma_{i_3}v_{i_3} \in U$$

מאחר ו־ $\sum_{i_2=k+1}^{n}\beta_{i_2}u_{i_2} \in U$ נובע ש $\sum_{i_3=k+1}^{m}\gamma_{i_3}v_{i_3} \in U$ ולכן

$$\sum_{i_3=k+1}^{m}\gamma_{i_3}v_{i_3} \in U\cap V \qquad (3)$$

נציין שהצירוף הליניארי $\sum_{i_3=k+1}^{m} \gamma_{i_3} v_{i_3}$ אינו אפסי, שכן אחרת, נקבל ממשוואה (1) שמתקיים

$$\sum_{i_1=1}^{k} \alpha_{i_1} w_{i_1} + \sum_{i_2=k+1}^{n} \beta_{i_2} u_{i_2} = 0$$

כלומר הקבוצה B_3 תלויה ליניארית, בסתירה לכך שהיא בסיס. על כן, (3) מניבה שקיים צירוף ליניארי של איברי הבסיס A, המקיים

$$\sum_{i_3=k+1}^{m} \gamma_{i_3} v_{i_3} = \sum_{I=1}^{k} \delta_I w_I \tag{4}$$

אם נעביר אגפים ממשוואה זו, נקבל:

$$\sum_{i_3=k+1}^{m} \gamma_{i_3} v_{i_3} - \sum_{I=1}^{k} \delta_I w_I = 0 \tag{5}$$

במילים אחרות, קיבלנו צירוף ליניארי לא טריוויאלי של איברי הקבוצה B_4, ולכן קבוצה זו תלויה ליניארית, בסתירה לעובדה שהיא בסיס.

אם $\sum_{i_1=1}^{k} \alpha_{i_1} w_{i_1} = 0$, נקבל ממשוואה (2)

$$\sum_{i_2=k+1}^{n} \beta_{i_2} u_{i_2} + \sum_{i_3=k+1}^{m} \gamma_{i_3} v_{i_3} = 0$$

נעביר אגפים ונקבל

$$\sum_{i_2=k+1}^{n} \beta_{i_2} u_{i_2} = - \sum_{i_3=k+1}^{m} \gamma_{i_3} v_{i_3}$$

על כן $\sum_{i_2=k+1}^{n} \beta_{i_2} u_{i_2} \in V$ ולכן $\sum_{i_2=k+1}^{n} \beta_{i_2} u_{i_2} \in U \cap V$, ובדומה ל (4) ו־(5), נקבל שהקבוצה B_3 תלויה ליניארית, בסתירה לכך שהיא בסיס.

לסיכום, ההנחה כי הקבוצה B תלויה ליניארית מובילה לסתירה, ועל כן היא בלתי תלויה ליניארית. לפיכך B היא בסיס למרחב $U+V$ ומתקיים:

$$dim(U+V) = card(B) = k+n-k+m-k = n+m-k = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$$

$\square$