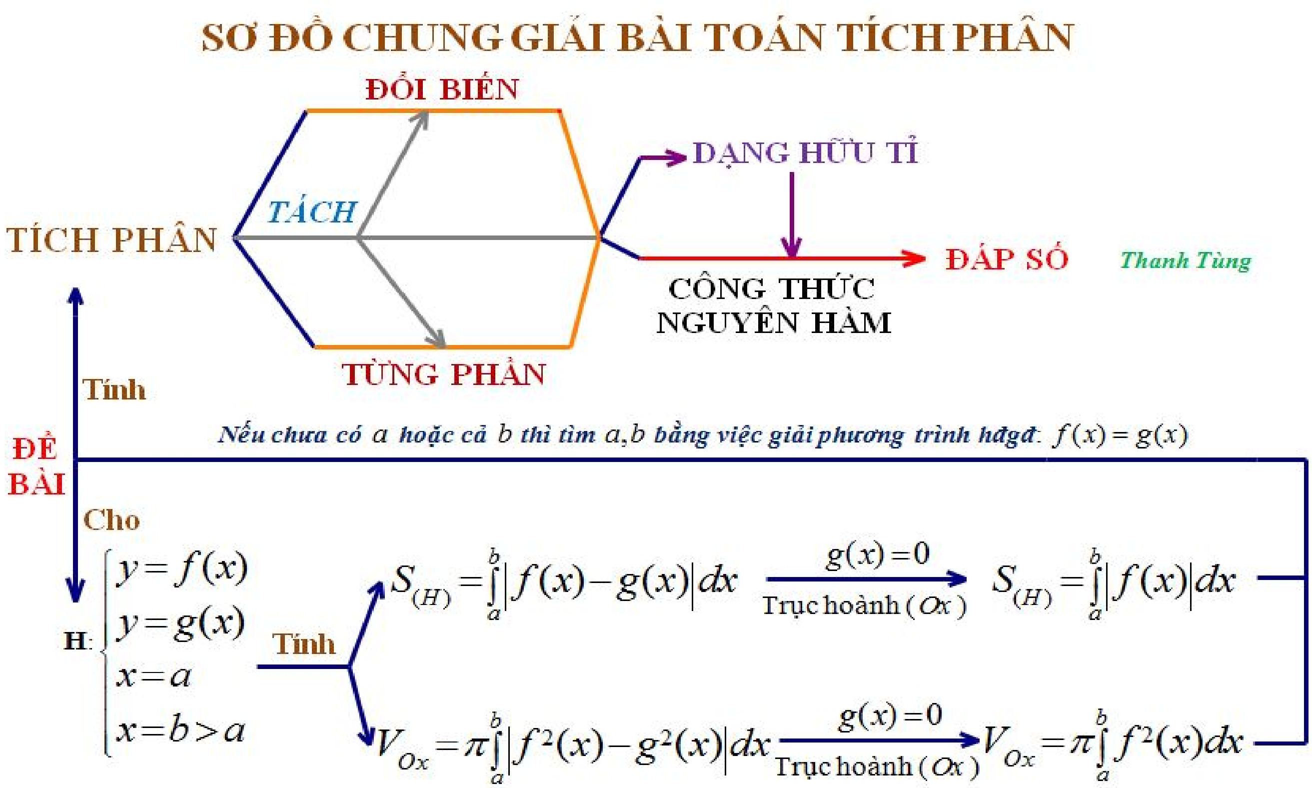
10 DẠNG TÍCH PHÂN HAY GẶP TRONG CÁC KÌ THI ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG

Trong các các kì thi Đại Học – Cao Đẳng câu tích phân luôn mặc định xuất hiện trong đề thi môn Toán. Tích phân không phải là câu hỏi khó, đây là một bài toán "nhẹ nhàng", mang tính chất "cho điểm". Vì vậy việc mất điểm sẽ trở nên "vô duyên" với những ai đã bỏ chút thời gian đọc tài liệu. Ở bài viết nhỏ này sẽ cung cấp tới các em các dạng tích phân thường xuyên xuất hiện trong các kì thi Đại Học - Cao Đẳng (và đề thi cũng sẽ không nằm ngoài các dạng này). Với cách giải tổng quát cho các dạng, các ví dụ minh họa đi kèm, cùng với lượng bài tập đa dạng, phong phú. Mong rằng sau khi đọc tài liệu, việc đứng trước một bài toán tích phân sẽ không còn là rào cản đối với các em . Chúc các em thành công !

Trong bài viết này sẽ giới thiệu tới các em 8 phần: *Trang*

I. SƠ ĐỒ CHUNG GIẢI BÀI TOÁN TÍCH PHÂN



II. CÁC CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM CẦN NHỚ

*Điều kiện **tiên quyết** để làm tốt phần **tích phân** là chúng ta **phải nhớ** và **hiểu** được cách vận dụng các **công thức nguyên hàm** sau: (chỉ cần hiểu **8 công thức** thì sẽ biết cách suy luận ra các công thức còn lại)*

$$\mathbf{1)}\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)\to\begin{cases}\int x^\alpha dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ ;\quad \int(ax+b)^\alpha dx=\dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\\ \int du=u+C;\quad \int\dfrac{du}{u^2}=-\dfrac{1}{u}+C;\quad \int\dfrac{du}{u^\alpha}=-\dfrac{1}{(\alpha-1)u^{\alpha-1}}+C\end{cases}$$

$$\mathbf{2)}\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C\to\begin{cases}\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C\\ \int\dfrac{dx}{ax+b}=\dfrac{1}{a}\ln|ax+b|+C\end{cases}$$

$$\mathbf{3)}\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C\to\begin{cases}\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C;\quad \int e^u du=e^u+C\\ \int e^x dx=e^x+C;\quad \int e^{ax+b}dx=\dfrac{1}{a}e^{ax+b}+C\end{cases}$$

$$\mathbf{4)}\int\sin u\,du=-\cos u+C\to\begin{cases}\int\sin x\,dx=-\cos x+C\\ \int\sin(ax+b)dx=-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C\end{cases}$$

$$\mathbf{5)}\int\cos u\,du=\sin u+C\to\begin{cases}\int\cos x\,dx=\sin x+C\\ \int\cos(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C\end{cases}$$

$$\mathbf{6)}\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\cot u+C\to\begin{cases}\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C\\ \int\dfrac{dx}{\sin^2(ax+b)}=-\dfrac{1}{a}\cot(ax+b)+C\end{cases}$$

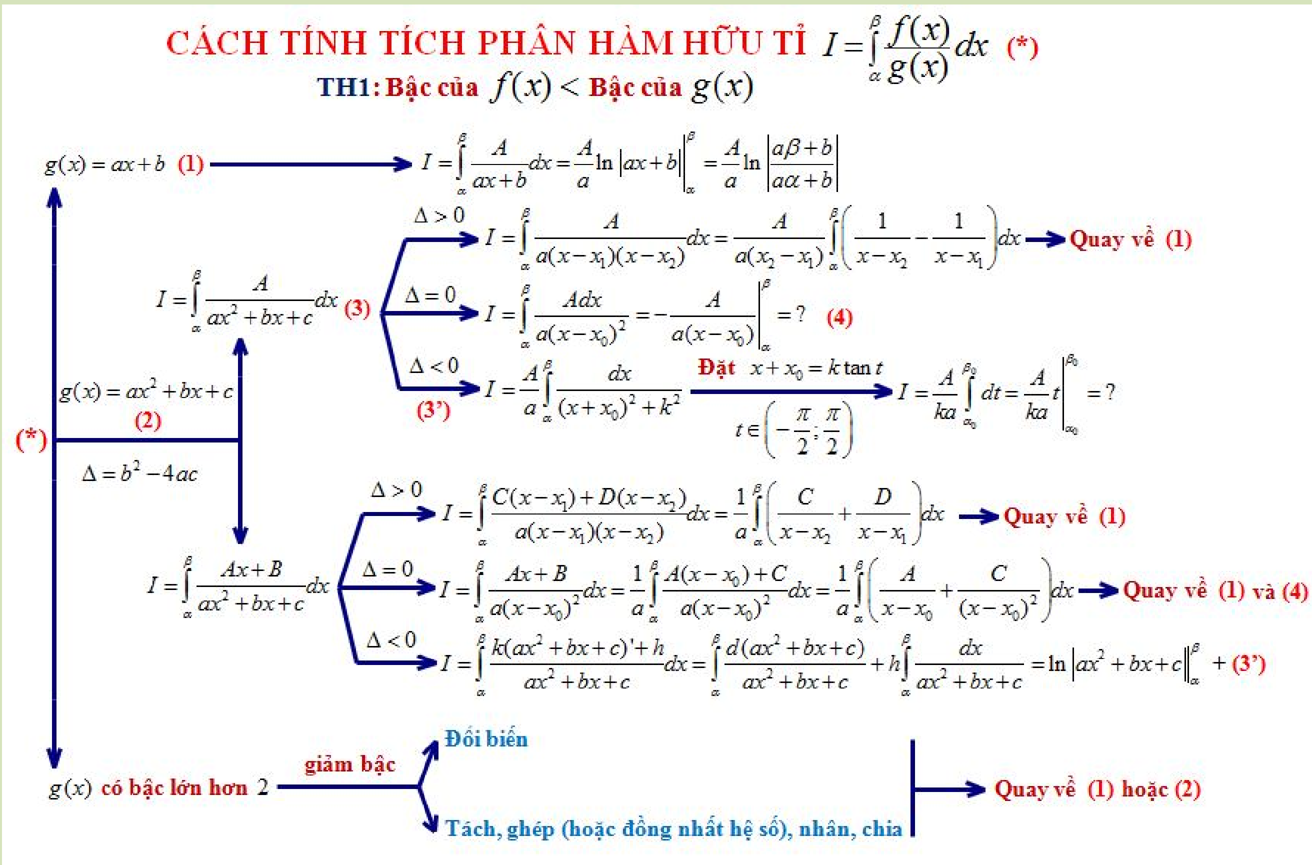
$$\mathbf{7)}\int\frac{du}{\cos^2 u}=\tan u+C\to\begin{cases}\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C\\ \int\dfrac{dx}{\cos^2(ax+b)}=\dfrac{1}{a}\tan(ax+b)+C\end{cases}$$

$$\mathbf{8)}\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{u-a}-\frac{1}{u+a}\right)du=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C\to\begin{cases}\int\dfrac{du}{a^2-u^2}=-\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|+C\\ \int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C\end{cases}$$

III. LỚP TÍCH PHÂN HỮU TỈ VÀ TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC

1. LỚP TÍCH PHÂN HỮU TỈ

CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x)}{g(x)}dx$ (*)



Chú thích: Sơ đồ trên được hiểu như sau :

Khi đứng trước một bài toán tích phân có dạng hữu tỉ trước tiên ta quan tâm tới bậc của tử số và mẫu số.

*) Nếu bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số, khi đó ta chú ý tới bậc dưới mẫu số. Cụ thể:

++) Nếu bậc dưới mẫu số bằng 1 ta có luôn công thức trong bảng nguyên hàm và đưa ra được đáp số.

++) Nếu bậc dưới mẫu số bằng 2 ta quan tâm tới Δ hay "tính có nghiệm" của phương trình dưới mẫu.

+) Nếu $\Delta>0$ tức khi đó ta sẽ phân tích dưới mẫu thành tích và dùng kĩ thuật tách ghép để tách thành hai biểu thức có mẫu bậc 1 (quay về trường hợp mẫu số có bậc bằng 1).

+) Nếu $\Delta=0$ tức khi đó ta sẽ phân tích dưới mẫu thành hằng đẳng thức và dùng kĩ thuật tách ghép để đưa tích phân về dạng đã biết.

+) Nếu $\Delta<0$ tức khi đó ta không thể phân tích dưới mẫu số thành tích và hằng đẳng thức được.

-) Nếu trên tử là hằng số khác 0 ta sẽ dùng phương pháp lượng giác hóa để chuyển về dạng cơ bản (theo cách đổi biến ở sơ đồ trên).

-) Nếu trên tử có dạng bậc nhất ta sẽ chuyển về bậc 0 (hằng số hay số tự do) bằng kĩ thuật vi phân như cách trình bày ở sơ đồ và quay về trường hợp trước đó (tử là hằng số khác 0).

++) Nếu bậc của mẫu số lớn hơn 2 ta sẽ tìm cách giảm bậc bằng phương pháp đổi biến hoặc các kĩ thuật: Nhân, chia, tách ghép (đồng nhất hệ số), vi phân…

*) Nếu bậc của tử số lớn hơn hoặc bằng bậc của mẫu số thì ta chuyển sang **TH2** (trường hợp 2).

TH2: Bậc của $f(x) \geq$ Bậc của $g(x)$

Cách giải chung

$$(*) \xrightarrow[\text{chia } g(x)]{f(x)} I = \int_\alpha^\beta \left[h(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \right] dx = \int_\alpha^\beta h(x)dx + \int_\alpha^\beta \frac{r(x)}{g(x)} dx = I_1 + I_2$$

$I_1 = \int_\alpha^\beta h(x)dx$: **Tích phân cơ bản**

$I_2 = \int_\alpha^\beta \frac{r(x)}{g(x)} dx$: **Quay về TH1**

CHÚ Ý :

Việc đồng nhất hệ số dựa theo cách phân tích sau:

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^m (cx^2+dx+e)^n} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_m}{(ax+b)^m} + \frac{B_1 x + C_1}{(cx^2+dx+e)} + \frac{B_2 x + C_2}{(cx^2+dx+e)^2} + ... + \frac{B_n x + C_n}{(cx^2+dx+e)^n}$$

Sau đó quy đồng bỏ mẫu, dùng tính chất "hai đa thức bằng nhau khi các hệ số tương ứng của chúng bằng nhau" từ đó tìm được các A_i, B_j, C_j $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ hoặc có thể dùng cách chọn x để tìm các A_i, B_j, C_j.

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+2x+k}$ với : **1)** $k = \frac{3}{4}$ **2)** $k = 1$ **3)** $k = 4$

Giải: **1)** Với $k = \frac{3}{4}$ thì :

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+2x+\frac{3}{4}} = \int_0^2 \frac{4dx}{4x^2+8x+3} = 2\int_0^2 \frac{(2x+3)-(2x+1)}{(2x+1)(2x+3)} dx = \int_0^2 \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+3} \right) dx = \ln \left| \frac{2x+1}{2x+3} \right| \Bigg|_0^2 = \ln \frac{15}{7}$$

2) Với $k = 1$ thì : $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+2x+1} = \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}$

3) Với $k = 4$ thì : $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+2x+4} = \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2+3}$

Đặt $x+1 = \sqrt{3}\tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t} = \sqrt{3}.(1+\tan^2 t)dt$ và $x: 0 \to 2$ thì $t: \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

Khi đó $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}.(1+\tan^2 t)dt}{3.(\tan^2 t + 1)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1) $I_1 = \int_1^2 \frac{3}{4x-1} dx$ **2)** $I_2 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{2x^2+x-3}$ **3)** $I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+9}$ **4)** $I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2}$

5) $I_5 = \int_0^1 \frac{4x-5}{x^2-x-2} dx$ **6)** $I_6 = \int_1^2 \frac{3x+2}{4x^2-4x+1} dx$ **7)** $I_7 = \int_{-1}^2 \frac{x-3}{x^2+2x+4} dx$

Giải: **1)** $I_1=\int\limits_1^2\frac{3}{4x-1}dx=\frac{3}{4}\ln|4x-1|\Big|_1^2=\frac{3}{4}\ln\frac{7}{3}$

2) $I_2=\int\limits_{-1}^0\frac{dx}{2x^2+x-3}=\int\limits_{-1}^0\frac{dx}{(x-1)(2x+3)}=\frac{1}{5}\int\limits_{-1}^0\frac{(2x+3)-2(x-1)}{(x-1)(2x+3)}dx$

$$=\frac{1}{5}\int\limits_{-1}^0\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x+3}\right)dx=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{2x+3}\right|\Bigg|_{-1}^0=\frac{1}{5}\ln\frac{1}{6}=-\frac{\ln 6}{5}$$

3) $I_3=\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+6x+9}=\int\limits_0^1\frac{dx}{(x+3)^2}=-\frac{1}{x+3}\Big|_0^1=\frac{1}{12}$

4) $I_4=\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int\limits_0^1\frac{dx}{(x-1)^2+1}$

Đặt $x-1=\tan t$ với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}=(1+\tan^2 t)dt$ và $x:0\to 1$ thì $t:-\frac{\pi}{4}\to 0$

Khi đó $I_4=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0\frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t+1}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0 dt=t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0=\frac{\pi}{4}$

5) $I_5=\int\limits_0^1\frac{4x-5}{x^2-x-2}dx=\int\limits_0^1\frac{(x+1)+3(x-2)}{(x+1)(x-2)}dx=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}\right)dx=\left(\ln|x-2|+3\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=4\ln 2$

Chú ý: Việc phân tích $4x-5=x+1+3(x-2)$ có được là do ta đi tìm hệ số a,b thỏa mãn:

$$4x-5=a(x+1)+b(x-2)\Leftrightarrow 4x-5=(a+b)x+a-2b \text{ khi đó } \begin{cases}a+b=4\\a-2b=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$$

6) $I_6=\int\limits_1^2\frac{3x+2}{4x^2-4x+1}dx=\int\limits_1^2\frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{7}{2}}{(2x-1)^2}dx=\int\limits_1^2\left(\frac{3}{2(2x-1)}+\frac{7}{2(2x-1)^2}\right)dx$

$$=\left(\frac{3}{4}\ln|2x-1|-\frac{7}{4(2x-1)}\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}\ln 3+\frac{7}{6}$$

7) $I_7=\int\limits_{-1}^2\frac{x-3}{x^2+2x+4}dx=\int\limits_{-1}^2\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-4}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^2\frac{(2x+2)}{x^2+2x+4}dx-4\int\limits_{-1}^2\frac{dx}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}A-4B$ **(*)**

+) Tính $A=\int\limits_{-1}^2\frac{(2x+2)}{x^2+2x+4}dx=\int\limits_{-1}^2\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}=\ln|x^2+2x+4|\Big|_{-1}^2=2\ln 2$ (1)

+) Tính $B=\int\limits_{-1}^2\frac{dx}{x^2+2x+4}=\int\limits_{-1}^2\frac{dx}{(x+1)^2+3}$

Đặt $x+1=\sqrt{3}\tan t$ với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t}=\sqrt{3}.(1+\tan^2 t)dt$ và $x:-1\to 2$ thì $t:0\to\frac{\pi}{3}$

$B=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}.(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t+1}=\sqrt{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}dt=\sqrt{3}t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ (2) . Thay (1) và (2) vào (*) ta được: $I_7=\ln 2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau:

1) $I_1 = \int_1^2 \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 4}{2x - 1}dx$ **2)** $I_2 = \int_0^1 \frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}dx$ **3)** $I_3 = \int_1^2 \frac{4x^3 - 4x^2 + 7x - 2}{4x^2 - 4x + 1}dx$

4) $I_4 = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$ **(D – 2013)** **5)** $I_5 = \int_0^2 \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 4}dx$

Giải:

1) $I_1 = \int_1^2 \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 4}{2x - 1}dx = \int_1^2 \left(x^2 + 1 + \frac{5}{2x-1}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{5}{2}\ln|2x-1|\right)\Big|_1^2 = \frac{10}{3} + \frac{5}{2}\ln 3$

2) $I_2 = \int_0^1 \frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}dx = \int_0^1 \left(x^2 - 1 - \frac{x+5}{x^2 - 2x - 3}\right)dx = \int_0^1 \left[x^2 - 1 - \frac{2(x+1) - (x-3)}{(x+1)(x-3)}\right]dx$

$= \int_0^1 \left[x^2 - 1 - \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)\right]dx = \left(\frac{x^3}{3} - x - 2\ln|x-3| + \ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2 - \frac{2}{3}$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{4x^3 - 4x^2 + 7x - 2}{4x^2 - 4x + 1}dx = \int_1^2 \left(x + \frac{6x - 2}{4x^2 - 4x + 1}\right)dx = \int_1^2 \left[x + \frac{3(2x-1)+1}{(2x-1)^2}\right]dx = \int_1^2 \left[x + \frac{3}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}\right]dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|2x-1| - \frac{1}{2(2x-1)}\right)\Big|_1^2 = \frac{11}{6} + \frac{3}{2}\ln 3$

4) $I_4 = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$ **(D – 2013)**

$I_4 = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left(x + \ln(x^2+1)\right)\Big|_0^1 = 1 + \ln 2$

5) $I_5 = \int_0^2 \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 4}dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{3x + 9}{x^2 + 2x + 4}\right)dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{\frac{3}{2}(2x+2) + 6}{x^2 + 2x + 4}\right)dx$

$= 2\int_0^2 dx - \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{d(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} + 6\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} = \left(2x - \frac{3}{2}\ln(x^2 + 2x + 4)\right)\Big|_0^2 + 6I = 4 - \frac{3}{2}\ln 3 + 6I \quad (*)$

Tính $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} = \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2 + 3}$

Đặt $x + 1 = \sqrt{3}\tan t$ (với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$) $\Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt = \sqrt{3}(1 + \tan^2 t)dt \\ (x+1)^2 + 3 = 3(1 + \tan^2 t) \end{cases}$ và $x: 0 \to 2$ thì $t: \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(1 + \tan^2 t)dt}{3(1 + \tan^2 t)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\sqrt{3}}{3}t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ (2*). Thay (2*) vào (*) ta được: $I_5 = 4 - \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx$ **(B – 2012)** **2)** $I_2=\int\limits_0^1 \frac{x^7}{(3-2x^4)^2}dx$ **3)** $I_3=\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2-1}{x(x^4+3x^2+2)}dx$

4) $I_4=\int\limits_1^2 \frac{2x+3}{(x^2+2x)(x^2+4x+3)}dx$ **5)** $I_5=\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^2-1}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}dx$ **6)** $I_6=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3+x^5}$

7) $I_7=\int\limits_0^1 \frac{x}{(1+2x)^3}dx$ **8)** $I_8=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\left(1+x^{2014}\right)}$ **9)** $I_9=\int\limits_{-1}^0 \frac{x^2dx}{(1-x)^8}$

Giải: **1)** $I_1=\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx$ **(B – 2012)** Đặt $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$ hay $xdx=\frac{dt}{2}$

và $x:0\to 1$ thì $t:0\to 1$ $\Rightarrow I_1=\int\limits_0^1 \frac{x^2.xdx}{x^4+3x^2+2}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{t.dt}{t^2+3t+2}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2(t+1)-(t+2)}{(t+1)(t+2)}dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{2}{t+2}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$=\left(\ln|t+2|-\frac{1}{2}\ln|t+1|\right)\Big|_0^1=\ln 3-\frac{3}{2}\ln 2$$

2) $I_2=\int\limits_0^1 \frac{x^7}{(3-2x^4)^2}dx$ Đặt $t=3-2x^4 \Rightarrow \begin{cases} dt=-8x^3dx \Leftrightarrow x^3dx=-\frac{1}{8}dt \\ x^4=\frac{3-t}{2} \end{cases}$ và $x:0\to 1$ thì $t:3\to 1$

Khi đó $I_2=\int\limits_0^1 \frac{x^7}{(3-2x^4)^2}dx=\int\limits_0^1 \frac{x^4}{(3-2x^4)^2}.x^3dx=-\frac{1}{8}\int\limits_3^1 \frac{\frac{3-t}{2}}{t^2}dt=\frac{1}{16}\int\limits_1^3 \frac{3-t}{t^2}dt$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_1^3\left(\frac{3}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{16}\left(-\frac{3}{t}-\ln t\right)\Big|_1^3=\frac{2-\ln 3}{16}$$

3) $I_3=\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2-1}{x(x^4+3x^2+2)}dx$ Đặt $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx \Leftrightarrow xdx=\frac{dt}{2}$ và $x:1\to\sqrt{2}$ thì $t:1\to 2$

Khi đó $I_3=\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{(x^2-1)}{x^2(x^4+3x^2+2)}.xdx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{t-1}{t(t^2+3t+2)}dt$

Lúc này ta sẽ phân tích $\frac{t-1}{t(t^2+3t+2)}$ thành tổng các phân thức có mẫu bậc 1 bằng phương pháp đồng nhất hệ số . Cụ thể: $\frac{t-1}{t(t^2+3t+2)}=\frac{t-1}{t(t+1)(t+2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t+2}$

$$\Leftrightarrow t-1=A(t+1)(t+2)+Bt(t+2)+Ct(t+1) \quad (*)$$

Việc tìm A,B,C có thể làm theo 2 cách :

Cách 1: (*) $\Leftrightarrow t-1=(A+B+C)t^2+(3A+2B+C)t+2A$ khi đó $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=1 \\ 2A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=2 \\ C=-\frac{3}{2} \end{cases}$

Cách 2: +) Chọn $t=0$ thì (*) có dạng: $-1=2A \Leftrightarrow A=-\frac{1}{2}$

+) Chọn $t=-1$ thì (*) có dạng: $-2=-B \Leftrightarrow B=2$

+) Chọn $t=-2$ thì (*) có dạng: $-3=2C \Leftrightarrow C=-\frac{3}{2}$

Vậy $I_3=\frac{1}{2}\int_1^2\left[-\frac{1}{2t}+\frac{2}{t+1}-\frac{3}{2(t+2)}\right]dt=\left[-\frac{1}{4}\ln t+\ln(t+1)-\frac{3}{4}\ln(t+2)\right]\Big|_1^2=\frac{7\ln 3-11.\ln 2}{4}$

4) $I_4=\int_1^2\frac{2x+3}{(x^2+2x)(x^2+4x+3)}dx=\int_1^2\frac{2x+3}{x(x+2)(x+1)(x+3)}dx=\int_1^2\frac{2x+3}{(x^2+3x)(x^2+3x+2)}dx$

Cách 1: **(đổi biến)**

Đặt $t=x^2+3x \Rightarrow dt=(2x+3)dx$ và $x:1\to 2$ thì $t:4\to 10$

Khi đó $I_4=\int_4^{10}\frac{dt}{t(t+2)}=\frac{1}{2}\int_4^{10}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|\Big|_4^{10}=\frac{1}{2}\ln\frac{15}{12}$

Cách 2: (**tách ghép và sử dụng kĩ thuật vi phân**)

$$I_4=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\left[(x^2+3x+2)-(x^2+3x)\right](2x+3)}{(x^2+3x)(x^2+3x+2)}dx=\frac{1}{2}\left[\int_1^2\frac{(2x+3)dx}{x^2+3x}-\int_1^2\frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_1^2\frac{d(x^2+3x)}{x^2+3x}-\int_1^2\frac{d(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2}\right]=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}\right|\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}\ln\frac{15}{12}$$

5) $I_5=\int_{-2}^{-1}\frac{x^2-1}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}dx$ Chia cả tử và mẫu trong biểu thức tích phân cho x^2 ta được:

$$I_5=\int_{-2}^{-1}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-4x+6-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6}$$

Cách 1: (**đổi biến**) Đặt $t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx \\ t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \end{cases}$ và $x:-2\to -1$ thì $t:-\frac{5}{2}\to -2$

Khi đó $I_5=\int_{-\frac{5}{2}}^{-2}\frac{dt}{(t^2-2)-4t+6}=\int_{-\frac{5}{2}}^{-2}\frac{dt}{t^2-4t+4}=\int_{-\frac{5}{2}}^{-2}\frac{dt}{(t-2)^2}=-\frac{1}{t-2}\Big|_{-\frac{5}{2}}^{-2}=\frac{1}{36}$

Cách 2: (**tách ghép và sử dụng kĩ thuật vi phân – dành cho những ai có kĩ năng phân tích tốt**)

$$I_5=\int_{-2}^{-1}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4}=\int_{-2}^{-1}\frac{d\left(x+\frac{1}{x}-2\right)}{\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2}=-\frac{1}{x+\frac{1}{x}-2}\Bigg|_{-2}^{-1}=\frac{1}{36}$$

6) $I_6=\int_1^2\frac{dx}{x^3+x^5}=\int_1^2\frac{dx}{x^3(1+x^2)}$

Cách 1: **(đổi biến)**

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\Leftrightarrow xdx=\frac{dt}{2}$ và $x:1\to 2$ thì $t:1\to 4$

Khi đó $I_6=\int_1^2\frac{xdx}{x^4(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{dt}{t^2(t+1)}=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{(t+1)-t}{t^2(t+1)}dt=\frac{1}{2}\int_1^4\left[\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t(t+1)}\right]dt=\frac{1}{2}\int_1^4\left[\frac{1}{t^2}-\frac{(t+1)-t}{t(t+1)}\right]dt$

$=\frac{1}{2}\int_1^4\left[\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right]dt=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}+\ln\left|\frac{t+1}{t}\right|\right)\Big|_1^4=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{8}$

Cách 2: **(Dùng kĩ thuật tách ghép)**

$I_6=\int_1^2\frac{(1+x^2)-x^2}{x^3(1+x^2)}dx=\int_1^2\left[\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x(1+x^2)}\right]dx=\int_1^2\left[\frac{1}{x^3}-\frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)}\right]dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$=\int_1^2\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\left[-\frac{1}{2x^2}-\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_1^2=\frac{3}{8}-\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{8}$

7) $I_7=\int_0^1\frac{x}{(1+2x)^3}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1+2x-1}{(1+2x)^3}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{(1+2x)^2}-\frac{1}{(1+2x)^3}\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2(1+2x)}+\frac{1}{4(1+2x)^2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{18}$

8) $I_8=\int_1^2\frac{dx}{x\left(1+x^{2014}\right)}$

Đặt $t=1+x^{2014}\Rightarrow dt=2014x^{2013}dx\Leftrightarrow x^{2013}dx=\frac{dt}{2014}$ và $x:1\to 2$ thì $t:2\to 1+2^{2014}$

Khi đó $I_8=\int_1^2\frac{x^{2013}dx}{x^{2014}\left(1+x^{2014}\right)}=\frac{1}{2014}\int_2^{1+2^{2014}}\frac{dt}{(t-1)t}=\frac{1}{2014}\int_2^{1+2^{2014}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$

$=\frac{1}{2014}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Big|_2^{1+2^{2014}}=\frac{2015\ln 2-\ln(1+2^{2014})}{2014}$

9) $I_9=\int_{-1}^0\frac{x^2dx}{(1-x)^8}$ Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$ và $x:-1\to 0$ thì $t:1\to 2$

Khi đó $I_9=\int_1^2\frac{(1-t)^2dt}{t^8}=\int_1^2\frac{1-2t+t^2}{t^8}dt=\int_1^2\left(\frac{1}{t^8}-\frac{2}{t^7}+\frac{1}{t^6}\right)dt=\left(-\frac{1}{7t^7}+\frac{1}{3t^6}-\frac{1}{5t^5}\right)\Big|_1^2=\frac{33}{4480}$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx$ **2)** $I_2=\int_0^{\ln 2}\sqrt[3]{e^x-1}dx$

Giải:

1) $I_1=\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx$ Đặt $t=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow t^2=x^2-1\Rightarrow\begin{cases}tdt=xdx\\x^2=t^2+1\end{cases}$ và cận $t:0\to\sqrt{3}$

$\Rightarrow I_1=\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx=\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}.xdx}{x^4}=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t.tdt}{(t^2+1)^2}=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$

Đặt $t=\tan u \to dt=\dfrac{du}{\cos^2 u}=(1+\tan^2 u)du$ và cận $u:0\to\dfrac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2 u.(1+\tan^2 u)du}{(1+\tan^2 u)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2 u}{1+\tan^2 u}du=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}.\cos^2 udu=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 udu$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2u}{2}du=\left(\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\sin 2u\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}=\boxed{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{24}}$$

2) $I_2=\int_0^{\ln 2}\sqrt[3]{e^x-1}dx$ Đặt $t=\sqrt[3]{e^x-1}\Rightarrow t^3=e^x-1\Rightarrow\begin{cases}3t^2dt=e^xdx\\ e^x=t^3+1\end{cases}$ và cận $t:0\to 1$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^{\ln 2}\sqrt[3]{e^x-1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{\sqrt[3]{e^x-1}.e^xdx}{e^x}=\int_0^1\frac{t.3t^2dt}{t^3+1}=3\int_0^1\frac{t^3dt}{t^3+1}=3\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^3+1}\right)dt$$

Ta dùng phương pháp đồng nhất hệ số:

$$\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}\Rightarrow 1=A.(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1)$$

$$\Leftrightarrow 1=(A+B)t^2+(-A+B+C)t+A+C\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-A+B+C=0\\A+C=1\end{cases}\Leftrightarrow A=\frac{1}{3};B=-\frac{1}{3};C=\frac{2}{3}$$

(Có thể chọn $t=0$ và $t=\pm 1$ được ba pt 3 ẩn A,B,C rồi giải tìm được A,B,C (máy tính có thể giúp))

Vậy ta có: $\dfrac{1}{t^3+1}=\dfrac{1}{3(t+1)}+\dfrac{-t+2}{3(t^2-t+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{t-2}{t^2-t+1}\right)$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^1\left(3-\frac{1}{t+1}+\frac{t-2}{t^2-t+1}\right)dt=\int_0^1\left(3-\frac{1}{t+1}+\frac{\frac{1}{2}(2t-1)-1}{t^2-t+1}\right)dt=\int_0^1\left(3-\frac{1}{t+1}\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(t^2-t+1)}{t^2-t+1}-\int_0^1\frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$=\left(3t-\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)\right)\Bigg|_0^1-J=3-\ln 2-J\quad (*)\quad\text{với } J=\int_0^1\frac{dt}{t^2-t+1}=\int_0^1\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Đặt $t-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan u\Rightarrow\begin{cases}dt=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos^2 t}du=\dfrac{\sqrt{3}(1+\tan^2 u)}{2}du\\ \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}(1+\tan^2 u)\end{cases}$ và $t:0\to 1$ thì cận $u:-\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow J=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}(1+\tan^2 u)}{2}.\frac{4}{3(1+\tan^2 u)}du=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}du=\frac{2\sqrt{3}}{3}u\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}\quad (2*)$$

Thay (2*) vào (*) ta được : $I_2=\boxed{3-\ln 2-\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}}$

Nhận xét: *Trong các bài toán đổi biến các em sẽ nhận ra một điều (rất quan trọng trong phần đổi biến), khi chúng ta đổi biến thì bước tiếp theo là bước vi phân cả 2 vế. Sau khi làm xong điều này các em sẽ biết ngay là bài toán chúng ta đi có đúng hướng hay không. Cụ thể: Nếu sau khi vi phân ta có:* $f(t)dt = g(x)dx$ *thì xảy ra 2 khả năng:*

+) Trong đề bài có chứa $g(x)dx$ *(có thể phải thêm bước tách ghép, thêm bớt để nhìn thấy nó) và phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân (nếu có) còn chứa biến* x *mà ta rút được theo* t*. Khi đó xác suất ta đi theo hướng này đúng là cao.*

+) Trong đề bài không có lượng $g(x)$ *để ta chỉnh (vì* dx *đi một mình lúc này "không ổn" phải có mặt* $g(x)$ *đi cùng hay phải có* $g(x)dx$ *thì ta mới chuyển được theo* $f(t)dt$*). Khi đó các em nên nghĩ tới việc tự nhân thêm vào (đề bài không cho thì ta tự cho) và chỉnh bằng cách nhân với lượng tương ứng ở dưới mẫu số và phần phát sinh thêm sau khi nhân cùng với biểu thức trước đó sẽ rút được theo* t *(ở cả hai bài toán trên ta đã tự nhân cả tử và mẫu lần lượt với* x *và* e^x*)*

Bài luyện

Tính các tích phân sau:

1) $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-2}$ (Đs: $\frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}$)

2) $I_2=\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$ (Đs: $\ln\frac{9}{2}$)

3) $I_3=\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$ (Đs: $3\ln 4-\frac{9}{4}$)

4) $I_4=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3dx}{x^2+1}$ (Đs: $\frac{3}{2}-\ln 2$)

5) $I_5=\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+4x^2+3}$ (Đs: $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$)

6) $I_6=\int_0^1 \frac{x^2+3x+10}{x^2+2x+9}dx$ (Đs: $1+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$)

7) $I_7=\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2-4x+4)}$ (Đs: $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}$)

8) $I_8=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4-2x^2+1}$ (Đs: $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ln 3$)

9) $I_9=\int_0^1 \frac{dx}{x^4-3x^2-4}$ (Đs: $-\frac{\pi+\ln 3}{20}$)

10) $I_{10}=\int_0^1 \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$ (Đs: $\frac{(9-2\sqrt{3})\pi}{72}$)

11) $I_{11}=\int_0^1 \frac{x}{(1+3x)^3}dx$ (Đs: $\frac{1}{8}$)

12) $I_{12}=\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ (Đs: $\frac{\pi+2}{8}$)

13) $I_{13}=\int_0^1 \frac{x^3dx}{\left(x^8-4\right)^2}$ (Đs: $\frac{1}{96}+\frac{\ln 3}{128}$)

14) $I_{14}=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ (Đs: $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$)

15) $I_{15}=\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$ (Đs: $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$)

16) $I_{16}=\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}dx$ (Đs: $\frac{\pi}{3}$)

17) $I_{17}=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2-2}{x^4+2x^3+5x^2+4x+4}$ (Đs: $-\frac{3}{44}$)

18) $I_{18}=\int_0^1 \frac{2x+5}{(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)}dx$ (Đs: $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$)

19) $I_{19}=\int_0^1 \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x-3}dx$ (Đs: $\ln\frac{3}{5}$)

20) $I_{20}=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2-3}{x(x^4+3x^2+2)}dx$ (Đs: $\frac{13}{4}\ln 3-\frac{21}{4}\ln 2$)

21) $I_{21}=\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)(x-2)}$ (Đs: $\frac{\pi}{20}-\frac{3}{5}\ln 2$)

22) $I_{22}=\int_0^1 \frac{2x^2+5x-2}{x^3+2x^2-4x-8}dx$ (Đs: $\frac{1}{6}+\ln\frac{3}{4}$)

23) $I_{23}=\int_1^2 \frac{x^3-x^2-4x-1}{x^4+x^3}dx$ (Đs: $\ln\frac{8}{3}-\frac{15}{7}$)

24) $I_{24}=\int_3^5 \frac{4x^3-2x^2-x+1}{x^2(x^2-1)}dx$ (Đs: $\ln\frac{15}{2}-\frac{2}{15}$)

2. TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Trước khi đi vào 10 dạng tích phân hay gặp trong các kì thi Đại Học – Cao Đẳng các em cần nắm được cách tính các tích phân lượng giác cơ bản qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau với $k=\overline{1;5}$ (*có 40 câu tích phân trong ví dụ này*) :

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k x dx \qquad B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x dx \qquad C=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^k x dx \qquad D=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^k x dx$$

$$E=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^k x}dx \qquad F=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^k x}dx \qquad G=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^k x}dx \qquad H=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cot^k x}dx$$

Giải:

****) Với $k = 1$*** . Ta có:

+) $A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ +) $B_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

+) $C_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\ln 2$

+) $D_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin x}{\sin x}=\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\ln 2$

+) $E_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$

Cách 1: $E_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$. Lúc này ta có 2 cách trình bày

Cách trình bày 1: Đặt $t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x dx$ và $x:\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:\frac{1}{2}\to 0$

Khi đó $E_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{1-t^2}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$

Cách trình bày 2:

$$E_1=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}\right)d\cos x=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$$

Cách 2: $E_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}dx}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}dx}{\sin\frac{x}{2}}=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

$$=\left(-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$$

Cách 3: $E_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$

+) $F_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$ (tính tương tự như E_1 - hoặc đổi biến hoặc vi phân)

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)d\sin x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\ln 3$$

+) $G_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot x dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin x}{\sin x}=\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$

+) $H_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cot x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\ln 2$

***) Với $k=2$** . Ta có:

+) $A_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

+) $B_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

+) $C_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4-\pi}{4}$

+) $D_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 x dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=(-\cot x-x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4-\pi}{4}$

+) $E_2=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

+) $F_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

+) $G_2=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot^2 xdx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\left(-\cot x-x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\boxed{\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}}$

+) $H_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cot^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 xdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\left(\tan x-x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\boxed{\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}}$

***) Với $k = 3$** . Ta có:

+) $A_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x.\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)d\cos x=\left(-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{2}{3}}$ (có thể đặt $t=\cos x$)

+) $B_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x.\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)d\sin x=\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{2}{3}}$ (có thể đặt $t=\sin x$)

+) $C_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+\tan^3 x-\tan x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\tan x(1+\tan^2 x)-\tan x\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x}{\cos^2 x}-\tan x\right]dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xd\tan x-C_1=\frac{\tan^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-C_1=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2}$

(các em có thể xem lại cách tính $C_1=\frac{1}{2}\ln 2$ đã tính ở trước đó với $\boldsymbol{k = 1}$)

+) $D_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^3 xdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cot x+\cot^3 x-\cot x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\cot x(1+\cot^2 x)-\cot x\right]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cot x}{\sin^2 x}-\cot x\right]dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{\sin^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot xdx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot xd\cot x-D_1=-\frac{\cot^2 x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-D_1=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2}$

(các em có thể xem lại cách tính $D_1=\frac{1}{2}\ln 2$ đã tính ở trước đó với $\boldsymbol{k = 1}$)

+) $E_3=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^4 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^2}dx$ Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ và $t:\frac{1}{2}\to 0$

Khi đó $E_3=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left[(1+t)+(1-t)\right]^2 dt}{(1-t)^2.(1+t)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1+t)^2+(1-t)^2+2(1-t).(1+t)}{(1-t)^2.(1+t)^2}dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1-t).(1+t)}\right]dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right]dt$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{3}}$

+) $F_3=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}dx$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $x:0\to\frac{\pi}{6}$ thì $t:0\to\frac{1}{2}$

Khi đó $F_3=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left[(1+t)+(1-t)\right]^2dt}{(1-t)^2.(1+t)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1+t)^2+(1-t)^2+2(1-t).(1+t)}{(1-t)^2.(1+t)^2}dt$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1-t).(1+t)}\right]dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right]dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{3}$$

+) $G_3=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^3 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot^3 xdx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cot x+\cot^3 x-\cot x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\cot x(1+\cot^2 x)-\cot x\right]dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cot x}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right]dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cot x}{\sin^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot xd\cot x-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin x}{\sin x}$$

$$=\left(-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln|\sin x|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{1}{2}\ln 2$$

+) $H_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cot^3 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^3 xdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan x+\tan^3 x-\tan x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\tan x(1+\tan^2 x)-\tan x\right]dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\tan x}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan xd\tan x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\cos x}{\cos x}$$

$$=\left(\frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=1-\frac{1}{2}\ln 2$$

***) Với $k=4$** . Ta có:

+) $A_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}$$

+) $B_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}$$

+) $C_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x+\tan^4 x-\tan^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\tan^2 x(1+\tan^2 x)-\tan^2 x\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x d\tan x-C_2=\frac{\tan^3 x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-C_2=\frac{1}{3}-\frac{4-\pi}{4}=\frac{3\pi-8}{12}$$

(các em có thể xem lại cách tính $C_2=\frac{4-\pi}{4}$ đã tính ở trước đó với ***k* = 2**)

+) $D_4=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^4 x dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cot^2 x+\cot^4 x-\cot^2 x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\cot^2 x(1+\cot^2 x)-\cot^2 x\right]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}-\cot^2 x\right]dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 x dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 x d\cot x-D_2=-\frac{\cot^3 x}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-D_2=\frac{1}{3}-\frac{4-\pi}{4}=\frac{3\pi-8}{12}$$

(các em có thể xem lại cách tính $D_2=\frac{4-\pi}{4}$ đã tính ở trước đó với ***k* = 2**)

+) $E_4=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cot^2 x\right).d\cot x=-\left(\cot x+\frac{\cot^3 x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{10\sqrt{3}}{27}$

+) $F_4=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\tan^2 x\right).d\tan x=\left(\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{10\sqrt{3}}{27}$

+) $G_4=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^4 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot^4 x dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cot^2 x+\cot^4 x-\cot^2 x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\cot^2 x(1+\cot^2 x)-\cot^2 x\right]dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}-\cot^2 x\right]dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot^2 x dx=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot^2 x d\cot x-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

$$=\left(-\frac{\cot^3 x}{3}+\cot x+x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8-\pi}{12}$$

+) $H_4=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cot^4 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^4 xdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+\tan^4 x-\tan^2 x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\tan^2 x(1+\tan^2 x)-\tan^2 x\right]dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 xdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 xd\tan x-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$

$$=\left(\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\boxed{\frac{8-\pi}{12}}$$

***) Với $k=5$**. Ta có:

+) $A_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x.\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^2.\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2 x+\cos^4 x).d\cos x$

$$=-\left(\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{8}{15}}\qquad(\text{có thể đặt } t=\cos x)$$

+) $B_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x.\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)^2.\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 x+\sin^4 x).d\sin x$

$$=\left(\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{8}{15}}\qquad(\text{có thể đặt } t=\sin x)$$

+) $C_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^5 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^3 x+\tan^5 x-\tan^3 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\tan^3 x(1+\tan^2 x)-\tan^3 x\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}-\tan^3 x\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 xd\tan x-C_3=\frac{\tan^4 x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-C_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right)=\boxed{\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}}$$

(các em có thể xem lại cách tính $C_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$ đã tính ở trước đó với $k=3$)

+) $D_5=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^5 xdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cot^3 x+\cot^5 x-\cot^3 x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\cot^3 x(1+\cot^2 x)-\cot^3 x\right]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cot^3 x}{\sin^2 x}-\cot^3 x\right]dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot^3 x}{\sin^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^3 xdx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^3 xd\cot x-D_3=-\frac{\cot^4 x}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-D_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right)=\boxed{\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}}$$

(các em có thể xem lại cách tính $D_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$ đã tính ở trước đó với $k=3$)

+) $E_5=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^5 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^6 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^3}dx$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ và $x:\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:\frac{1}{2}\to 0$. Khi đó $E_5=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)^3}$

Ta có: $\frac{1}{(1-t^2)^3}=\frac{1}{8}.\frac{\left[(1+t)+(1-t)\right]^3}{(1-t)^3.(1+t)^3}=\frac{1}{8}.\frac{(1+t)^3+(1-t)^3+6(1-t).(1+t)}{(1-t)^3.(1+t)^3}$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1-t)^3}+\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{6}{(1-t)^2.(1+t)^2}\right]=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1-t)^3}+\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{3}{2}.\frac{\left[(1-t)+(1+t)\right]^2}{(1-t)^2.(1+t)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1-t)^3}+\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{3}{2}.\frac{(1+t)^2+(1-t)^2+2(1-t).(1+t)}{(1-t)^2.(1+t)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1-t)^3}+\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1-t).(1+t)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1-t)^3}+\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\right]$$

Suy ra $E_5=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(1-t)^3}+\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\right]dt$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2(1-t)^2}-\frac{1}{2(1+t)^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{12}+\frac{3}{16}\ln 3$$

+) $F_5=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^5 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^6 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^3}dx$ Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $t:0\to\frac{1}{2}$.

Khi đó $F_5=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)^3}=\frac{1}{12}+\frac{3}{16}\ln 3$ (xem cách tính E_5 ở ý trên)

+) $H_5=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cot^5 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^5 xdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^3 x+\tan^5 x-\tan^3 x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\tan^3 x(1+\tan^2 x)-\tan^3 x\right]dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cot^3 x}\right]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cot^3 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^3 xd\tan x-H_3$$

$$=\frac{\tan^4 x}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-H_3=2-\left(1-\frac{1}{2}\ln 2\right)=1+\frac{1}{2}\ln 2$$

(các em có thể xem lại cách tính $H_3=1-\frac{1}{2}\ln 2$ đã tính ở trước đó với ***k* = 3**)

CHÚ Ý:

+) *Sẽ có nhiều em thắc mắc là biểu thức dưới dấu tích phân* $\int \tan^k x dx$ *tương tự với* $\int \frac{1}{\cot^k x} dx$ *và* $\int \cot^k x dx$ *tương tự với* $\int \frac{1}{\tan^k x} dx$*. Nếu đi tính nguyên hàm (tích phân bất định) chúng có sự giống nhau (tính nguyên hàm được hiểu là tính trên tập xác định của hàm). Nhưng nếu đi tính tích phân xác định thì sẽ có sự khác biệt . Ví như tính* $C_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ *và* $H_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cot x} dx$ *thì* $C_1 = 1$ *như cách chúng ta đã làm. Còn* H_1 *trong tình huống này với kiến thức toán sơ cấp sẽ không tính được vì hàm số dưới dấu tích phân không xác định với cận* $x = 0$.

+) *Để đưa ra công thức tổng quát cho các tích phân trên các em sẽ tìm hiểu rõ hơn ở mục VI trong phần tích phân truy hồi.*

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ **2)** $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ **3)** $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos 3x \cos 5x dx$ **5)** $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2 x)\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) dx$ **6)** $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

Giải:

1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ và $x: 0 \to \frac{\pi}{2}$ thì $t: 0 \to 1$

$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3}$ Đặt $t = \sqrt{3} \tan u \Rightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 u} du = \sqrt{3}(1+\tan^2 u) du \\ t^2 + 3 = 3(1+\tan^2 u) \end{cases}$ và $t: 0 \to \frac{\pi}{6}$

Khi đó $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sqrt{3}(1+\tan^2 u) du}{3(1+\tan^2 u)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} du = \frac{2\sqrt{3}}{3} u \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

CHÚ Ý: Khi đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

3) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=-\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(hoặc biến đổi $\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ **)**

4) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\cos 3x\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\left(\cos 8x+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin 2x\cos 8x+\sin 2x\cos 2x\right)dx$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin 10x-\sin 6x+\sin 4x\right)dx=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x+\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{13}{120}$

5) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^2 x)\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx$

Ta có: $\begin{cases}1-2\sin^2 x=\cos 2x\\ \sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\end{cases}$

Khi đó $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)d\sin 2x=\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{4}\sin^3 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{8}$

6) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^3\frac{x}{2}d\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin^4\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}dx$ **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^k}dx$ với $k=\overline{1;3}$ **3)** $I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x-\cos x}$

4) $I_4=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\cos 3x dx$ **5)** $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x.(\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x)dx$ **6)** $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

Giải:

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}=-\frac{1}{\sin x+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^k}dx$ với $k=\overline{1;3}$

Cách trình bày 1:

Ta có: $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^k}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)}{2^k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)^k}dx=\frac{1}{2^k}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^k\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}dx}{\sin^{k-1}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx}{\sin^k\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2^{k+1}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^{k-1}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}-\frac{1}{2^{k+1}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^k\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$

+) Với $k=3\Rightarrow I_2=\frac{\sqrt{3}}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\left[-\frac{\sqrt{3}}{16}\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{32\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{32}$

+) Với $k=2$ khi đó $I_2=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{8}A-\frac{1}{8}B$ (1)

***)** Ta có: $A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{1-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\left[1-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]\left[1+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]}=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{1}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right)d\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$ (2) ***)** Ta có: $B=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=1$ (3)

Thay (3); (2) vào (1) ta được: $I_2=\frac{\sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)-1}{8}$

+) Với $k=1\Rightarrow I_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}dx-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\left[\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{4}\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}-\frac{1}{4}\ln 2$

Cách trình bày 2: $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^k}dx$ với $k=\overline{1;3}$

Ta có: $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^k}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{2^k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)^k}dx=\frac{1}{2^k}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sin^k\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

Đặt $t=x+\frac{\pi}{6}\Rightarrow dt=dx$ và $x:0\to\frac{\pi}{3}$ thì $t:\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{2}$

Khi đó $I_2=\frac{1}{2^k}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^k t}dt=\frac{1}{2^k}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t}{\sin^k t}dt=\frac{1}{2^{k+1}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}\sin t}{\sin^k t}-\frac{\cos t}{\sin^k t}\right)dt$

+) Với $k=1\Rightarrow I_2=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{3}-\frac{\cos t}{\sin t}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{\sin t}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}t-\ln|\sin t|\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}-\frac{1}{4}\ln 2$

+) Với $k=2\Rightarrow I_2=\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}\sin t}{\sin^2 t}-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)dt=\frac{1}{8}\left(-\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos t}{(1-\cos t)(1+\cos t)}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{\sin^2 t}\right)$

$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|+\frac{1}{8\sin t}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)-1}{8}$$

+) Với $k=3\Rightarrow I_2=\frac{1}{16}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 t}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\right)dt=\frac{1}{16}\left(\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin^2 t}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{\sin^3 t}\right)=\frac{1}{16}\left(-\sqrt{3}\cot t+\frac{1}{2\sin^2 t}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{32}$

3) $I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x-\cos x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{d\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4) $I_4=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\cos 3x dx$ Ta có: $\cos^3 x.\cos 3x=\cos^2 x.(\cos x.\cos 3x)=\frac{1+\cos 2x}{2}.\frac{\cos 4x+\cos 2x}{2}$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos 4x+\cos 2x+\cos 2x.\cos 4x+\cos^2 2x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos 4x+\cos 2x+\frac{\cos 6x+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{\cos 6x+3\cos 4x+3\cos 2x+1}{8}$$

$$\Rightarrow I_4=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}(\cos 6x+3\cos 4x+3\cos 2x+1)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{\sin 6x}{6}+\frac{3\sin 4x}{4}+\frac{3\sin 2x}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{8}$$

Chú ý: Bài toán trên ta có thể có cách biến đổi :

Xuất phát từ công thức nhân 3 của cos: $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ *(sau đó nhân cả 2 vế với* $\cos 3x$ *)*

$$\Rightarrow \cos^2 3x=4\cos^3 x.\cos 3x-3\cos x.\cos 3x \Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}=4\cos^3 x.\cos 3x-\frac{3(\cos 4x+\cos 2x)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^3 x.\cos 3x=\frac{\cos 6x+3\cos 4x+3\cos 2x+1}{8}$$

5) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x.(\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x)dx$

Ta có: $\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x=\sin x(1-\cos^2 x)\sin 3x+\cos x(1-\sin^2 x)\cos 3x$

$$=\left(\sin x\sin 3x+\cos x\cos 3x\right)-\sin x\cos x\left(\cos x\sin 3x+\sin x\cos 3x\right)$$

$$=\cos 2x-\sin x\cos x.\sin 4x$$

$$=\cos 2x-2\sin x\cos x.\sin 2x\cos 2x=\cos 2x-\sin^2 2x\cos 2x$$

$$=\cos 2x-\sin^2 2x\cos 2x=\cos 2x(1-\sin^2 2x)=\cos^3 2x$$

Khi đó: $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x.\cos^3 2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos 4x+\frac{1+\cos 8x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 8x\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{32}$$

6) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$ Ta có: $\begin{cases}\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1+\cos^2 2x-2\cos 2x}{4}=\frac{2-\sin^2 2x-2\cos 2x}{4}\\ \sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{2-\sin^2 2x}{2}\end{cases}$

Khi đó: $I_6=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2-\sin^2 2x-2\cos 2x}{2-\sin^2 2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{2\cos 2x}{2-\sin^2 2x}\right)dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2-\sin^2 2x}dx=\frac{\pi}{8}-I$

Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2-\sin^2 2x}dx$ Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow dt=2\cos 2xdx\Leftrightarrow \cos 2xdx=\frac{dt}{2}$ và $t:0\to 1$, suy ra:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{2-t^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1\frac{\left(\sqrt{2}-t\right)+\left(\sqrt{2}+t\right)}{\left(\sqrt{2}-t\right)\left(\sqrt{2}+t\right)}dt=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}+t}+\frac{1}{\sqrt{2}-t}\right)dt=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Vậy $I_6=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

Chú ý: Bài toán trên ta có thể có cách biến đổi :

$$\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^4 x-\cos^4 x}{2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)}=\frac{1}{2}+\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)}{2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)}=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2-\sin^2 2x}$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ **2)** $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x+11\cos x}{3\sin x+4\cos x}dx$

3) $I_3=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+3\cos x+5}dx$ **4)** $I_4=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$ **5)** $I_5=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

Giải:

1) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dt=\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2}dx=\dfrac{1+t^2}{2}dx\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:0\to 1$, khi đó $I_1=\int\limits_0^1\frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\limits_0^1\frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|\Big|_0^1=\ln 2$

2) $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x+11\cos x}{3\sin x+4\cos x}dx$ Ta phân tích: $2\sin x+\cos x=A(3\sin x+4\cos x)+B(3\cos x-4\sin x)$

$\Leftrightarrow 2\sin x+11\cos x=(3A-4B)\sin x+(4A+3B)\cos x$

Đồng nhất hệ số ta được: $\begin{cases}3A-4B=2\\4A+3B=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=1\end{cases}$

Khi đó : $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2(3\sin x+4\cos x)+(3\cos x-4\sin x)}{3\sin x+4\cos x}dx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(3\sin x+4\cos x)}{3\sin x+4\cos x}$

$$=\left(2x+\ln|3\sin x+4\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}+\ln\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

3) $I_3=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+3\cos x+5}dx$ Phân tích: $\sin x+7\cos x+6=A(4\sin x+3\cos x+5)+B(4\cos x-3\sin x)+C$

$\Leftrightarrow \sin x+7\cos x+6=(4A-3B)\sin x+(3A+4B)\cos x+5A+C$

Đồng nhất hệ số ta được: $\begin{cases}4A-3B=1\\3A+4B=7\Leftrightarrow A=B=C=1\\5A+C=6\end{cases}$

Khi đó : $I_3=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin x+3\cos x+5}{4\sin x+3\cos x+5}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos x-3\sin x}{4\sin x+3\cos x+5}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\sin x+3\cos x+5}dx$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(4\sin x+3\cos x+5)}{4\sin x+3\cos x+5}+I=\left(x+\ln|4\sin x+3\cos x+5|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+I=\frac{\pi}{2}+\ln\frac{9}{8}+I\quad (*)$$

Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\sin x+3\cos x+5}dx$ Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:0\to 1$. Suy ra $I=\int_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4.\frac{2t}{1+t^2}+3.\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int_0^1\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}\Big|_0^1=\frac{1}{6}$ (2*)

Thay (2*) vào (*) ta được: $I_3=\boxed{\frac{\pi}{2}+\ln\frac{9}{8}+\frac{1}{6}}$

4) $I_4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$

Cách 1: (**Phân tích, kết hợp kĩ thuật vi phân**)

$$I_4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2\cos x(2+\sin x)-4\cos x}{(2+\sin x)^2}dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}dx$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d(2+\sin x)}{2+\sin x}-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=\left(2\ln|2+\sin x|+\frac{4}{2+\sin x}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\boxed{2\ln 2-2}$$

Cách 2: (**Đổi biến**)

Đặt $t=2+\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $x:-\frac{\pi}{2}\to 0$ thì $t:1\to 2$

Khi đó $I_4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2\sin x}{(2+\sin x)^2}\cos xdx=\int_1^2\frac{2(t-2)}{t^2}dt=\int_1^2\left(\frac{2}{t}-\frac{4}{t^2}\right)dt=\left(2\ln|t|+\frac{4}{t}\right)\Bigg|_1^2=\boxed{2\ln 2-2}$

5) $I_5=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ Cách 1: $I_5=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2dx}{\sin x.\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}$

$$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x.\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}=-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}{\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\boxed{2\ln\frac{3}{2}}$$

Cách 2: $I_5=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}.\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-x\right)}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

$$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right]dx=2\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin x}{\sin x}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right)=2\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\boxed{2\ln\frac{3}{2}}$$

CHÚ Ý :

Khi gặp tích phân $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x)}{g(x)}dx$ mà $h(x),g(x)$ là các hàm bậc nhất theo $\sin x$ và $\cos x$ thì ta có thể dùng phương pháp đồng nhất hệ số:

*) $\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}=A\frac{c\sin x+d\cos x}{c\sin x+d\cos x}+B\frac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x}$. Khi đó:

$$I=A\int_{\alpha}^{\beta}dx+B\int_{\alpha}^{\beta}\frac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x}dx=A\int_{\alpha}^{\beta}dx+B\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d(c\sin x+d\cos x)}{c\sin x+d\cos x}=\left(A.x+B\ln\left|c\sin x+d\cos x\right|\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}=?$$

*) $\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{a\sin x+b\cos x+e}{c\sin x+d\cos x+h}=A\frac{c\sin x+d\cos x+h}{c\sin x+d\cos x+h}+B\frac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x+h}+C\frac{1}{c\sin x+d\cos x+h}$ .Khi đó:

$I=\left(Ax+B\ln\left|c\sin x+d\cos x+h\right|\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}+C.I_3$ và ta tính $I_3=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{c\sin x+d\cos x+h}$ bằng hai cách:

C1: Dùng công thức biến đổi lượng giác để chuyển về các công thức lượng giác trong bảng nguyên hàm .

C2: Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ và $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Bài luyện

Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^6 x}$ (Đs: $\frac{28}{15}$)

2) $I_2=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^6 x}$ (Đs: $\frac{56}{15}$)

3) $I_3=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^6 x dx$ (Đs: $\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}$)

4) $I_4=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}$ (Đs: $\frac{1}{4}\ln\frac{(2+\sqrt{3})^2}{3}$)

5) $I_5=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x dx$ (Đs: $\frac{1}{6}$)

6) $I_6=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x\cos 3x+2\sin^2 x\right)dx$ (Đs: $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}$)

7) $I_7=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x.\cos 4x dx$ (Đs: 0)

8) $I_8=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ (Đs: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$)

9) $I_9=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x dx}{1+\cos x}$ (Đs: $\frac{1}{2}$)

10) $I_{10}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{1+\sin x}$ (Đs: $\frac{\pi}{2}-1$)

11) $I_{11}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$ (Đs: $2\sqrt[4]{3}-2$)

12) $I_{12}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x+3}dx$ (Đs: $-\ln\frac{3+\sqrt{2}}{4}$)

13) $I_{13}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin x-3\cos x+1}{4\sin x+3\cos x+5}dx$ (Đs: $\frac{1}{6}+\ln\frac{9}{8}$)

14) $I_{14}=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x.\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$ (Đs: $\frac{4\sqrt{3}}{3}\ln 2$)

IV. 10 DẠNG TÍCH PHÂN HAY GẶP TRONG CÁC KÌ THI ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG

DẠNG 1: $I_1=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(g(x),\sqrt[n]{g(x)}\right).g'(x)dx$ **(*)**

CÁCH GIẢI CHUNG

(*) $\xrightarrow[(g(x)=t^n)]{\text{Đặt } t=\sqrt[n]{g(x)}}$ $\begin{cases} g'(x)dx=nt^{n-1}dt \\ \begin{array}{c|cc} x & \alpha & \beta \\ \hline t & \alpha_0 & \beta_0 \end{array} \end{cases}$ $I_1=\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f\left(t^n,t\right).dt \longrightarrow I_1=\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} h(t)dt$: **Tích phân cơ bản**

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int\limits_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx$ **(B – 2013)**

2) $I_2=\int\limits_0^4 \dfrac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}dx$

3) $I_3=\int\limits_0^4 \dfrac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$ **(D – 2011)**

4) $I_4=\int\limits_1^2 \dfrac{x^4+\sqrt{x-1}+1}{x^3\left(1+\sqrt{x-1}\right)}dx$

5) $I_5=\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ **(A – 2003)**

6) $I_6=\int\limits_{-\frac{31}{2}}^{0} \dfrac{xdx}{\sqrt[5]{1-2x}}$

7) $I_7=\int\limits_0^{\sqrt[4]{7}} \dfrac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$

8) $I_8=\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}}$

9) $I_9=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}dx$

10) $I_{10}=\int\limits_1^2 \dfrac{xdx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

<u>Giải</u>:

1) $I_1=\int\limits_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx$ **(B – 2013)**

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}\Rightarrow t^2=2-x^2\Leftrightarrow 2tdt=-2xdx\Leftrightarrow xdx=-tdt$ và $x:0\to 1$ thì $t:\sqrt{2}\to 1$

Khi đó $I_1=-\int\limits_{\sqrt{2}}^{1} t.tdt=\int\limits_1^{\sqrt{2}} t^2dt=\left.\dfrac{t^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}}$

2) $I_2=\int\limits_0^4 \dfrac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}dx$ Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow tdt=dx$ và $x:0\to 4$ thì $t:1\to 3$

$$\Rightarrow I_2=\int\limits_1^3 \frac{t}{1+t}.tdt=\int\limits_1^3 \frac{t^2}{t+1}dt=\int\limits_1^3\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\left.\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)\right|_1^3=\boxed{2+\ln 2}$$

3) $I_3=\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$ **(D – 2011)** Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow \begin{cases} tdt=dx \\ 2x=t^2-1\end{cases}$ và $x:0\to 4$ thì $t:1\to 3$

$$\Rightarrow I_3=\int_1^3 \frac{2(t^2-1)-1}{t+2}.tdt=\int_1^3 \frac{2t^3-3t}{t+2}dt=\int_1^3\left(2t^2-4t+5-\frac{10}{t+2}\right)dt=\left(\frac{2t^3}{3}-2t^2+5t-10\ln(t+2)\right)\Bigg|_1^3=\frac{40}{3}-10\ln\frac{5}{3}$$

4) $I_4=\int_1^2 \frac{x^4+\sqrt{x-1}+1}{x^3\left(1+\sqrt{x-1}\right)}dx=\int_1^2\left[\frac{x^4}{x^3\left(1+\sqrt{x-1}\right)}+\frac{\sqrt{x-1}+1}{x^3\left(1+\sqrt{x-1}\right)}\right]dx=\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx+\int_1^2\frac{dx}{x^3}=A+B$ **(*)**

+) Tính $B=\int_1^2 \frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^2=\frac{3}{8}$ (1)

+) Tính $A=\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$

Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow t^2=x-1\Rightarrow \begin{cases} dx=2tdt \\ x=t^2+1\end{cases}$ và $x:1\to 2$ thì $t:0\to 1$

$$\Rightarrow A=\int_0^1 \frac{(t^2+1).2tdt}{1+t}=2\int_0^1\frac{t^3+t}{t+1}dt=2\int_0^1\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+2t-2\ln(t+1)\right)\Bigg|_0^1=\frac{11}{3}-4\ln 2 \quad (2)$$

Thay (1); (2) vào (*) ta được: $I_4=\frac{97}{24}-4\ln 2$

5) $I_5=\int_{\sqrt5}^{2\sqrt3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ **(A – 2003)**

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow\begin{cases} tdt=xdx \\ x^2=t^2-4\end{cases}$ và $x:\sqrt5\to 2\sqrt3$ thì $t:3\to 4$

Khi đó $I_5=\int_{\sqrt5}^{2\sqrt3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\int_{\sqrt5}^{2\sqrt3}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int_3^4\frac{tdt}{(t^2-4).t}=\int_3^4\frac{dt}{t^2-4}=\frac14\int_3^4\frac{[(t+2)-(t-2)]dt}{(t-2)(t+2)}$

$$=\frac14\int_3^4\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac14\ln\left(\frac{t-2}{t+2}\right)\Bigg|_3^4=\frac14\ln\frac53$$

6) $I_6=\int_{-\frac{31}{2}}^{0}\frac{xdx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ Đặt $t=\sqrt[5]{1-2x}\Rightarrow t^5=1-2x\Rightarrow\begin{cases}5t^4dt=-2dx\Rightarrow dx=-\frac25 t^4dt \\ x=\frac{1-t^5}{2}\end{cases}$ và cận $t:2\to 1$

$$\Rightarrow I_6=\int_2^1\frac{\frac{1-t^5}{2}.\left(-\frac25 t^4dt\right)}{t}=\frac15\int_1^2(t^3-t^8)dt=\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^9}{9}\right)\Bigg|_1^2=-\frac{1909}{36}$$

7) $I_7=\int_0^{\sqrt[4]{7}}\frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$ Đặt $t=\sqrt[3]{x^4+1}\Rightarrow t^3=x^4+1\Rightarrow 3t^2dt=4x^3dx\Leftrightarrow x^3dx=\frac34 t^2dt$ và cận $t:1\to 2$

$$\Rightarrow I_7=\frac34\int_1^2\frac{t^2dt}{1+t}=\frac34\int_1^2\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac34\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)\Bigg|_1^2=\frac38+\frac34\ln\frac32$$

8) $I_8=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}}$ Đặt $t=\sqrt[6]{x}\Leftrightarrow x=t^6\Rightarrow\begin{cases}dx=6t^5dt\\ \sqrt[3]{x^2}=t^4 \quad ;\sqrt{x}=t^3\end{cases}$ và cận $t:1\to\sqrt[6]{2}$

$$\Rightarrow I_{21}=\int_1^{\sqrt[6]{2}}\frac{6t^5dt}{t^4+t^3}=6\int_1^{\sqrt[6]{2}}\frac{t^2dt}{t+1}=6\int_1^{\sqrt[6]{2}}\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)\Bigg|_1^{\sqrt[6]{2}}=3\sqrt[3]{2}-6\sqrt[6]{2}+3+6\ln\frac{\sqrt[6]{2}+1}{2}$$

Nhận xét:

Trong bài toán trên đồng thời xuất hiện căn bậc 2 và căn bậc 3 nên chúng ta đã tìm cách đổi biến để đồng thời mất cả hai căn. Khi đó chúng ta sẽ nghĩ tới việc đặt $t=\sqrt[6]{x}$ *hay* $x=t^6$ ***(*** *ở đây* $6=BCNN(2;3)$***)*** .

Như vậy khi gặp $I=\int_a^b f(\sqrt[m]{g(x)},\sqrt[n]{g(x)})dx$ *thì ta đặt* $t=\sqrt[k]{g(x)}$ *với k là BCNN của m và n.*

9) $I_9=\int_{\frac12}^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx=\int_{\frac12}^1\sqrt{\frac{x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}dx=\int_{\frac12}^1\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}dx=\int_{\frac12}^1\frac{x^2}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}\Rightarrow t^2=1+\frac{1}{x^3}\Leftrightarrow x^3=\frac{1}{t^2-1}\Rightarrow 3x^2dx=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt\Leftrightarrow x^2dx=-\frac23.\frac{t}{(t^2-1)^2}dt$

và $x:\frac12\to1$ thì $t:3\to\sqrt2$. Khi đó :

$$I_9=-\frac23\int_3^{\sqrt2}\frac{tdt}{(t^2-1)^2.\frac{1}{t^2-1}.t}=\frac23\int_{\sqrt2}^3\frac{dt}{t^2-1}=\frac23\int_{\sqrt2}^3\frac{dt}{(t-1)(t+1)}=\frac13\int_{\sqrt2}^3\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac13\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt2}^3=\frac13\ln\frac{\left(\sqrt2+1\right)^2}{2}$$

10) $I_{10}=\int_1^2\frac{xdx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

Nhận xét: *Nếu đặt* $t=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow t^2=x^2-1\Rightarrow tdt=xdx$ *nhưng ta không chuyển được* x *theo* t

Khi đó ta nghĩ tới việc nhân liên hợp. Cụ thể ta có lời giải:

$$I_{10}=\int_1^2\frac{xdx}{x+\sqrt{x^2-1}}=\int_1^2\frac{x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}=\int_1^2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)dx=\int_1^2x^2dx-\int_1^2x\sqrt{x^2-1}dx$$

$$=\frac13x^3\Big|_1^2-I=\frac73-I \quad (1)$$

Tính $I=\int_1^2x\sqrt{x^2-1}dx$

Đặt $t=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow t^2=x^2-1\Leftrightarrow tdt=xdx$ và $x:1\to2$ thì $t:0\to\sqrt3$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\sqrt3}t.tdt=\int_0^{\sqrt3}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\sqrt3}=\sqrt3 \quad (2)$$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I_{10}=\frac73-\sqrt3$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$ **(A – 2006)** **2)** $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$ **(A – 2005)**

3) $I_3 = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x + \sqrt{1 + \cos x}\right)\sin x dx$ **4)** $I_4 = \int_0^{\pi/2} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \sin x \cos^5 x dx$

Giải:

1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$

Đặt $t = \sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \sqrt{1 + 3\sin^2 x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\sin^2 x \Rightarrow 2tdt = 6\sin x \cos x dx \Leftrightarrow \sin 2x dx = \frac{2}{3} tdt$

và cận $t: 1 \to 2$ $\Rightarrow I_1 = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{tdt}{t} = \frac{2}{3}\int_1^2 dt = \frac{2}{3} t \Big|_1^2 = \frac{2}{3}$

2) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$ **(A – 2005)**

Đặt $t = \sqrt{1 + 3\cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\cos x \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = -3\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -\frac{2}{3} tdt \\ \cos x = \frac{t^2 - 1}{3} \end{cases}$ và $t: 2 \to 1$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x + 1)\sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx = \int_2^1 \frac{2.\frac{t^2 - 1}{3} + 1}{t}.\left(-\frac{2}{3}\right) tdt = \frac{2}{9}\int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3} + t\right)\Big|_1^2 = \frac{34}{27}$$

3) $I_3 = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x + \sqrt{1 + \cos x}\right)\sin x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx + \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos x} \sin x dx = A + B$ **(*)**

+) Tính $A = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$ (1)

+) Tính $B = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos x} \sin x dx$ Đặt $t = \sqrt{1 + \cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + \cos x \Rightarrow 2tdt = -\sin x dx$ và cận $t: \sqrt{2} \to 1$

$\Rightarrow B = 2\int_1^{\sqrt{2}} t.tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{2t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$ (2) .Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$

(Các em có thể trình bày : $I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx + \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos x} \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos x} d(1 + \cos x)$

$= \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{(1 + \cos x)^3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$)

4) $I_4=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\sin x\cos^5 xdx$

Đặt $t=\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\Rightarrow t^6=1-\cos^3 x\Rightarrow\begin{cases}6t^5dt=3\cos^2 x\sin xdx\Rightarrow\sin x\cos^2 xdx=2t^5dt\\ \cos^3 x=1-t^6\end{cases}$ và cận $t:0\to 1$

$$\Rightarrow I_4=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\cos^3 x\sin x\cos^2 xdx=\int\limits_0^1 t(1-t^6).2t^5dt=2\int\limits_0^1(t^6-t^{12})dt=\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^{13}}{13}\right)\Bigg|_0^1=\frac{6}{91}$$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int\limits_1^e\frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$ **(B – 2004)**

2) $I_2=\int\limits_1^{\sqrt{e^3}}\frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx$

3) $I_3=\int\limits_{e-1}^{e^{\sqrt{3}}-1}\frac{\sqrt{1+\ln^2(x+1)}}{(x+1).\ln(x+1)}dx$

4) $I_4=\int\limits_1^e\frac{x\left[x-\ln(ex)\right]+\ln x}{x\left(1+\sqrt{x-\ln x}\right)}dx$

Giải:

1) $I_1=\int\limits_1^e\frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$ Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow\begin{cases}2tdt=\frac{3dx}{x}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{2}{3}tdt\\ \ln x=\frac{t^2-1}{3}\end{cases}$ và cận: $t:1\to 2$

$$\Rightarrow I_1=\int\limits_1^2 t.\frac{t^2-1}{3}.\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{9}\int\limits_1^2(t^4-t^2)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{116}{135}$$

2) $I_2=\int\limits_1^{\sqrt{e^3}}\frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx$ Đặt $t=\sqrt{1+2\ln x}\Rightarrow t^2=1+2\ln x\Rightarrow\begin{cases}tdt=\frac{dx}{x}\\ 2\ln x=t^2-1\end{cases}$ và cận $t:1\to 2$

$$\Rightarrow I_2=\int\limits_1^2\frac{3-(t^2-1)}{t}.tdt=\int\limits_1^2(4-t^2)dt=\left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{3}$$

3) $I_3=\int\limits_{e-1}^{e^{\sqrt{3}}-1}\frac{\sqrt{1+\ln^2(x+1)}}{(x+1).\ln(x+1)}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+\ln^2(x+1)}\Rightarrow t^2=1+\ln^2(x+1)\Rightarrow tdt=\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$ và $x:e-1\to e^{\sqrt{3}}-1$ thì $t:\sqrt{2}\to 2$

Khi đó $I_3=\int\limits_{e-1}^{e^{\sqrt{3}}-1}\frac{\sqrt{1+\ln^2(x+1)}}{\ln^2(x+1)}.\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\int\limits_{\sqrt{2}}^2\frac{t}{t^2-1}.tdt=\int\limits_{\sqrt{2}}^2\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\limits_{\sqrt{2}}^2\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$

$$=\int\limits_{\sqrt{2}}^2\left[1+\frac{1}{2}.\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}\right]dt=\int\limits_{\sqrt{2}}^2\left[1+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^2=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{3}$$

4) $I_4=\int\limits_1^e \frac{x\left[x-\ln(ex)\right]+\ln x}{x\left(1+\sqrt{x-\ln x}\right)}dx$

Đặt $t=\sqrt{x-\ln x}\Rightarrow t^2=x-\ln x\Rightarrow 2tdt=\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x-1}{x}dx$ và $x:1\to e$ thì $t:1\to\sqrt{e-1}$

Khi đó $I_4=\int\limits_1^e \frac{x(x-1-\ln x)+\ln x}{x\left(1+\sqrt{x-\ln x}\right)}dx=\int\limits_1^e \frac{x-\ln x}{1+\sqrt{x-\ln x}}.\frac{x-1}{x}dx=\int\limits_1^{\sqrt{e-1}}\frac{t^2}{1+t}.2tdt=2\int\limits_1^{\sqrt{e-1}}\frac{t^3}{1+t}dt$

$$=2\int\limits_1^{\sqrt{e-1}}\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|1+t|\right)\Bigg|_1^{\sqrt{e-1}}=\frac{2(e+2)\sqrt{e-1}}{3}-\frac{3e+2}{3}-2\ln\frac{1+\sqrt{e-1}}{2}$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$ **2)** $I_2=\int\limits_0^{\ln 3}\frac{e^xdx}{(e^x+1)\sqrt{e^x+1}}$ **3)** $I_3=\int\limits_0^1\frac{(1+x)e^x}{2-\sqrt{1+xe^x}}dx$ **4)** $I_4=\int\limits_0^1\frac{(x+e^{2x})\sqrt{x^2+e^{2x}}}{4x^2+4e^{2x}-1}dx$

Giải:

1) $I_1=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$ Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow t^2=e^x-1\Rightarrow\begin{cases}2tdt=e^xdx\\ e^x=t^2+1\end{cases}$ và $x:\ln 2\to\ln 5$ thì $t:1\to 2$

$$\Rightarrow I_1=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^x.e^xdx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\limits_1^2\frac{(t^2+1).2tdt}{t}=2\int\limits_1^2(t^2+1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_1^2=\frac{20}{3}$$

2) $I_2=\int\limits_0^{\ln 3}\frac{e^xdx}{(e^x+1)\sqrt{e^x+1}}$ Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow 2tdt=e^xdx$ và $x:0\to\ln 3$ thì $t:\sqrt{2}\to 2$

$$\Rightarrow I_2=\int\limits_{\sqrt{2}}^2\frac{2tdt}{t^2.t}=2\int\limits_{\sqrt{2}}^2\frac{dt}{t^2}=-\frac{2}{t}\Bigg|_{\sqrt{2}}^2=\sqrt{2}-1$$

4) $I_4=\int\limits_0^1\frac{(x+e^{2x})\sqrt{x^2+e^{2x}}}{4x^2+4e^{2x}-1}dx$ Đặt $t=\sqrt{x^2+e^{2x}}\Rightarrow t^2=x^2+e^{2x}\Rightarrow tdt=(x+e^{2x})dx$ và $t:1\to\sqrt{1+e^2}$

Khi đó $I_4=\int\limits_1^{\sqrt{1+e^2}}\frac{t.tdt}{4t^2-1}=\frac{1}{4}\int\limits_1^{\sqrt{1+e^2}}\frac{4t^2-1+1}{4t^2-1}dt=\frac{1}{4}\int\limits_1^{\sqrt{1+e^2}}\left[1+\frac{1}{(2t-1)(2t+1)}\right]dt$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_1^{\sqrt{1+e^2}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2t-1}-\frac{1}{2t+1}\right)\right]dt=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right|\right)\Bigg|_1^{\sqrt{1+e^2}}=\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{4}+\frac{1}{16}\ln\frac{6\sqrt{1+e^2}-3}{2\sqrt{1+e^2}+1}$$

Ví dụ 5. Tính tích phân : **1)** $I_1=\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x^3)\sqrt[3]{1+x^3}}$ **2)** $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}dx$

1) $I_1=\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x^3)\sqrt[3]{1+x^3}}$

Phân tích: Nếu đặt: $t=\sqrt[3]{1+x^3}\Rightarrow t^3=1+x^3\Rightarrow t^2dt=x^2dx$

Vậy để chỉnh được vi phân ta phải biến đổi $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)\sqrt[3]{1+x^3}}=\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^2(1+x^3)\sqrt[3]{1+x^3}}$

nhưng x^2 dưới mẫu số không rút được theo t và giá như không có x^2 dưới mẫu số song vẫn có x^2dx để ta chỉnh vi phân. Từ đây ta nghĩ tới việc đặt $x=\frac{1}{t}$ nhưng do cận $x=0$ ta không tìm được cận t tương ứng nên ta "khắc phục" bằng cách tính nguyên hàm rồi sau đó mới thế cận.

Giải: Tính nguyên hàm: $I=\int \frac{dx}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1+x^3)}}$ Đặt $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}\Rightarrow I=-\int \frac{dt}{t^2\left(1+\frac{1}{t^3}\right)\sqrt[3]{1+\frac{1}{t^3}}}$

hay $I=-\int \frac{t^2dt}{\left(t^3+1\right)\sqrt[3]{t^3+1}}$ Đặt: $u=\sqrt[3]{t^3+1}\Rightarrow u^3=t^3+1\Rightarrow u^2du=t^2dt$

$$\Rightarrow I=-\int \frac{u^2du}{u^3.u}=-\int \frac{du}{u^2}=\frac{1}{u}+C=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}}+C=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}+C \quad \Rightarrow I_1=\left.\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\right|_0^1=1$$

(có thể dùng kĩ thuật vi phân để tính : $I=-\int \frac{t^2dt}{\left(t^3+1\right)\sqrt[3]{t^3+1}}=-\frac{1}{3}\int (t^3+1)^{-\frac{4}{3}}d(t^3+1)=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}}+C$)

CHÚ Ý : Dạng tổng quát của bài toán trên $I=\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}}$ và ta giải bằng cách đặt $x=\frac{1}{t}$

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}dx$

Phân tích: Tương tự như ý 1) nếu bài toán này ta đặt $t=\sqrt{\cos 2x}$ thì sẽ không ổn.

Nên trước tiên ta sẽ biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân. Cụ thể ta có lời giải như sau:

Giải: +) Ta có: $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{(1-2\sin^2 x)\sqrt{1-2\sin^2 x}}dx$

+) Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $t:0\to \frac{1}{2}$ $\Rightarrow I_2=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-2t^2)\sqrt{1-2t^2}}$ (*)

+) Ta sẽ đi tính nguyên hàm $I=\int \frac{dt}{(1-2t^2)\sqrt{1-2t^2}}$

Đặt $t=\frac{1}{u}\Rightarrow dt=-\frac{du}{u^2}$ $\Rightarrow I=-\int \frac{du}{u^2\left(1-\frac{2}{u^2}\right)\sqrt{1-\frac{2}{u^2}}}=-\int \frac{udu}{(u^2-2)\sqrt{u^2-2}}=-\frac{1}{2}\int \frac{d(u^2-2)}{(u^2-2)\sqrt{u^2-2}}$

$$=-\frac{1}{2}\int (u^2-2)^{-\frac{3}{2}}d(u^2-2)=\frac{1}{\sqrt{u^2-2}}+C=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-2}}+C=\frac{t}{\sqrt{1-2t^2}}+C$$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-2t^2)\sqrt{1-2t^2}}=\left.\frac{t}{\sqrt{1-2t^2}}\right|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

CHÚ Ý : *+) Dạng tổng quát của (*) là* $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}}$ *và ta giải bằng cách đặt* $x=\frac{1}{t}$.

+) Dạng tích phân trên các em sẽ được tìm hiểu kĩ hơn ở Dạng 9.

Ví dụ 6. Tính tích phân :

1) $I_1=\int_0^4\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}$ **2)** $I_2=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ **3)** $I_3=\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ **4)** $I_4=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

Giải:

1) $I_1=\int_0^4\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}$ Đặt $t=\sqrt{1+x\sqrt{x}}\Rightarrow t^2=1+x\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x}=t^2-1\Rightarrow x^3=(t^2-1)^2\Rightarrow 3x^2dx=4t(t^2-1)dt\Leftrightarrow x^2dx=\frac{4}{3}t(t^2-1)dt$$

và $x:0\to 4$ thì $t:1\to 3$, khi đó: $I_1=\frac{4}{3}\int_1^3\frac{t(t^2-1)dt}{t}=\frac{4}{3}\int_1^3(t^2-1)dt=\frac{4}{3}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^3=\frac{80}{9}$

2) $I_2=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

Cách 1: (**Nhân liên hợp**)

$$I_2=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x)^2-(1+x^2)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+1-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|x|+x\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\frac{\ln 3}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}I \quad (*)$$

Tính $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2=1+x^2\Rightarrow tdt=xdx$ và $x:1\to\sqrt{3}$ thì $t:\sqrt{2}\to 2$

Khi đó $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{t}{t^2-1}.tdt=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^2\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$

$$=\int_{\sqrt{2}}^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^2$$

$$=2-\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}\ln 3 \quad (2*)$$

Thay (2*) vào (*) ta được: $I_2=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-3+\ln(3\sqrt{2}-3)}{2}$

Cách 2:

Đặt $t=x+\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t-x=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2-2tx+x^2=1+x^2\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t}\Rightarrow dx=\frac{t^2+1}{2t^2}dt$

và $x:1\to\sqrt{3}$ thì $t:1+\sqrt{2}\to 2+\sqrt{3}$, khi đó:

$$I_2=\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{t+1}.\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{3}}\frac{t^2+1}{t^2(t+1)}dt=\frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{3}}\frac{t^2+(t+1)-t}{t^2(t+1)}dt=\frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t(t+1)}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{3}}\left[\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t^2}-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt=\frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{3}}\left[\frac{2}{t+1}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\ln|t+1|-\frac{1}{t}-\ln|t|\right)\Bigg|_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-3+\ln(3\sqrt{2}-3)}{2}$$

CHÚ Ý: Các em có thể sử dụng kĩ thuật đồng nhất hệ số để biến đổi :

$$\frac{t^2+1}{t^2(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1}=\frac{(A+C)t^2+(A+B)t+B}{t^2(t+1)}$$, đồng nhất hệ số : $\begin{cases}A+C=1\\A+B=0\\B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=1\\C=2\end{cases}$

Khi đó ta được: $\dfrac{t^2+1}{t^2(t+1)}=-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{2}{t+1}$

3) $I_3=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=2x+1+2\sqrt{x(x+1)}\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+1)}=t^2-(2x+1)$

$$\Rightarrow 4x^2+4x=t^4-2(2x+1)t^2+4x^2+4x+1\Leftrightarrow 4t^2x=t^4-2t^2+1\Rightarrow x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2$$

Suy ra $dx=2.\dfrac{t^2-1}{2t}.\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt=\dfrac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}dt$ và $x:0\to1$ thì $t:1\to1+\sqrt{2}$

Khi đó $I_3=\displaystyle\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{t+1}.\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}dt=\frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^3}dt=\frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{1}{2}\left(t-\ln|t|-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)\Bigg|_1^{1+\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)}{2}$$

CHÚ Ý:

Nếu ta biến đổi $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\dfrac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt{x})^2-(x+1)}=\dfrac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1-\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\right)$ và áp dụng

để giải $I_3=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ thì phép biến đổi trên không chính xác do không xác định tại cận tại $x=0$.

4) $I_4=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$ Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$

$$\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)dx=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}dx=t.\frac{dx}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}\Leftrightarrow\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}=\frac{2dt}{t}$$

và $x:0\to1$ thì $t:1+\sqrt{3}\to2+\sqrt{2}$. Khi đó: $I_4=2\displaystyle\int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}\frac{dt}{t}=2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}=2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$

Bài luyện

Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{2}{5}} x\sqrt{2-5x}\,dx$ (Đs: $\frac{3}{50}$)

2) $I_2=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ (Đs: $\frac{2}{15}$)

3) $I_3=\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ (Đs: $\frac{52}{9}$)

4) $I_4=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ **(CĐ – 2012)** (Đs: $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$)

5) $I_5=\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{4x+1}}dx$ (Đs: $\frac{11}{6}$)

6) $I_6=\int_5^{10} \frac{dx}{x-2\sqrt{x-1}}$ (Đs: $1+2\ln 2$)

7) $I_7=\int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$ (Đs: $\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{12}$)

8) $I_8=\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$ **(A – 2004)** (Đs: $\frac{11}{3}-4\ln 2$)

9) $I_9=\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$ (Đs: $-\sqrt{3}-2\ln(2-\sqrt{3})$)

10) $I_{10}=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ (Đs: 1)

11) $I_{11}=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ (Đs: $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$)

12) $I_{12}=\int_{-\frac{1}{2}}^{3} \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+2}}dx$ (Đs: $\frac{12}{5}$)

13) $I_{13}=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ (Đs: $\frac{16}{3}-3\sqrt{3}$)

14) $I_{14}=\int_0^1 \frac{2x-x^3}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$ (Đs: $\frac{11}{6}-2\ln 2$)

15) $I_{15}=\int_0^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{1+3x}}-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$ (Đs: $\sqrt{3}-\frac{46}{27}$)

16) $I_{16}=\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x}{1+\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ (Đs: $\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$)

17) $I_{17}=\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1+x^4}}dx$ (Đs: $\frac{4-2\sqrt{2}}{9}$)

18) $I_{18}=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$ (Đs: $\frac{2}{3}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2}$)

19) $I_{19}=\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ (Đs: $11+6\ln\frac{2}{3}$)

20) $I_{20}=\int_0^1 \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$ (Đs: $\frac{2\sqrt{2}-2}{3}$)

21) $I_{21}=\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}$ (Đs: $\frac{17-9\sqrt{3}}{9}$)

22) $I_{22}=\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ (Đs: $\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$)

23) $I_{23}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(3+2x)\sqrt{5+6x+2x^2}}$ (Đs: $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{2+2\sqrt{5}}{\sqrt{17}+1}$)

24) $I_{24}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x+\sin x}{1+\sqrt{1+3\cos x}}dx$ (Đs: $\frac{28}{27}-\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}$)

25) $I_{25}=\int_0^{\ln 6} \frac{1}{\sqrt{e^x+3}}$ (Đs: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$)

26) $I_{26}=\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}.\ln x}{x}dx$ (Đs: $\frac{6\sqrt{2}-3}{8}$)

27) $I_{27}=\int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$ (Đs: $\frac{76}{15}$)

28) $I_{28}=\int_1^e \frac{\ln x dx}{x\left(1+\ln x+\sqrt{1+\ln^2 x}\right)}$ (Đs: $\frac{3-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)}{4}$)

29) $I_{29}=\int_0^1 \frac{8x^3+6x^2+5x+1}{3-\sqrt{2x^2+x+1}}dx$ (Đs: $-\frac{95}{3}+54\ln 2$)

30) $I_{30}=\int_1^e \frac{x^2+\ln x-x\ln(ex)}{x\left(1+\sqrt{2-x+\ln x}\right)}dx$ (Đs: $\frac{7-(3+2e)\sqrt{3-e}}{3}-2\ln\frac{2}{\sqrt{3-e}+1}$)

DẠNG 2: $I_2 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x^{2n}, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ (2*)

CÁCH GIẢI CHUNG

(2*) →

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{k^2-u^2}$ $\xrightarrow[t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]]{\text{Đặt } u = k\sin t}$ $\begin{cases} du = k\cos t dt \\ \sqrt{k^2-u^2} = k\cos t \end{cases}$

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{u^2-k^2}$ $\xrightarrow[t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right)]{\text{Đặt } u = \frac{k}{\cos t}}$ $\begin{cases} du = \frac{k\sin t dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{u^2-k^2} = k\tan t \end{cases}$

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{u^2+k^2}$ $\xrightarrow[t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)]{\text{Đặt } u = k\tan t}$ $\begin{cases} du = \frac{k dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{u^2+k^2} = \frac{k}{\cos t} \end{cases}$

$\xrightarrow[(k>0)]{\begin{array}{c|cc} x & \alpha & \beta \\ \hline t & \alpha_0 & \beta_0 \end{array}}$ $I_2 = \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} h(t)dt$: Tích phân lượng giác cơ bản

CHÚ Ý:

***)** Với tích phân có dạng $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}$ thì ta có thể không dùng tới phương pháp trên. Cụ thể ta biến đổi:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}} = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{(x+\sqrt{x^2\pm k})dx}{(x+\sqrt{x^2\pm k})\sqrt{x^2\pm k}} = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{d(x+\sqrt{x^2\pm k})}{(x+\sqrt{x^2\pm k})} = \ln(x+\sqrt{x^2\pm k})\Big|_{\alpha}^{\beta} = \ldots$$

Hoặc một cách trình bày khác: Đặt $t = (x+\sqrt{x^2\pm k})$ (phương pháp đổi biến)

***)** Với tích phân $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ mà $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{u-u^2}$ thì đặt $u = \sin^2 t$ (hoặc $u = \cos^2 t$)

***)** Với tích phân $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(\sqrt{\frac{m\pm x}{m\mp x}}\right)dx$ thì đặt $x = m\cos 2t$.

Các ví dụ minh họa

Ví dụ . Tính các tích phân sau:

1) $I_1 = \int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$ **2)** $I_2 = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$

3) $I_3 = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$ **4)** $I_4 = \int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **5)** $I_5 = \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **6)** $I_6 = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}dx$

7) $I_7 = \int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}$ **8)** $I_8 = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ **9)** $I_9 = \int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx$ **10)** $I_{10} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{7+\cos 2x}}$

Giải:

1) $I_1=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$ Đặt $x=2\sin t$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\begin{cases}dx=2\cos tdt\\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t\end{cases}$ và $x:0\to 2$ thì $t:0\to\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I_1=\int_0^{\pi/2}4\sin^2 t.2\cos t.2\cos tdt=4\int_0^{\pi/2}\sin^2 2tdx=2\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt=2\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\pi$$

2) $I_2=\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$ Đặt $x=\frac{1}{\cos t}$ với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{\sin tdt}{\cos^2 t}\\ \sqrt{x^2-1}=\tan t\end{cases}$ và $x:1\to 2$ thì $t:0\to\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan t.\frac{\sin tdt}{\cos^2 t.\frac{1}{\cos^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\cos t}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos tdt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)d\sin t-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos tdt=\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|-\sin t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) $I_3=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+3}}$

Đặt $x+1=\sqrt{3}\tan t$ (với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) $\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt\\ \sqrt{(x+1)^2+3}=\frac{\sqrt{3}}{\cos t}\end{cases}$ và $x:0\to 2$ thì $t:\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow I_3=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t.\frac{\sqrt{3}}{\cos t}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\cos t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{\cos^2 t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin t}{(1-\sin t)(1+\sin t)}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)d\sin t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\ln 3}{2}$$

4) $I_4=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Cách 1: Đặt $x=\frac{1}{\cos t}$ với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{\sin tdt}{\cos^2 t}\\ \sqrt{x^2-1}=\tan t\end{cases}$ và $x:\sqrt{2}\to 2$ thì $t:\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{3}$

Khi đó $I_4=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin tdt}{\cos^2 t.\tan t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\cos t}$. Để giải tiếp I_4 ta có thể đổi biến hoặc dùng kĩ thuật vi phân. Cụ thể:

Cách 1.1: Đặt $u=\sin t\Rightarrow du=\cos tdt$ và $t:\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{3}$ thì $x:\frac{\sqrt{2}}{2}\to\frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $I_4=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{\cos^2 t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{1-\sin^2 t}=\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{du}{1-u^2}=\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{du}{(1-u)(1+u)}=\frac12\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt3}{2}}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du$

$$=\frac12\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt3}{2}}=\ln(2\sqrt2+\sqrt6-\sqrt3-2)$$

Cách 1.2: $I_4=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{\cos^2 t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{(1-\sin t)(1+\sin t)}=\frac12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{[(1-\sin t)+(1+\sin t)]\cos tdt}{(1-\sin t)(1+\sin t)}=\frac12\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{1+\sin t}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos tdt}{1-\sin t}\right]$

$$=\frac12\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(1+\sin t)}{1+\sin t}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(1-\sin t)}{1-\sin t}\right]=\frac12\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln(2\sqrt2+\sqrt6-\sqrt3-2)$$

Cách 2:

$$I_4=\int_{\sqrt2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int_{\sqrt2}^{2}\frac{(x+\sqrt{x^2-1})dx}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}}=\int_{\sqrt2}^{2}\frac{d(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})}=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_{\sqrt2}^{2}=\ln(2\sqrt2+\sqrt6-\sqrt3-2)$$

Cách 3: (Cách trình bày khác của Cách 2)

Cách trình bày 3.1:

Đặt $t=x+\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=t-x\Rightarrow x^2-1=(t-x)^2\Leftrightarrow x=\frac{t^2+1}{2t}\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{t^2-1}{2t^2}dt\\ \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2-1}=\frac{t^2-1}{2t}\end{cases}$

và $x:\sqrt2\to2$ thì $t:1+\sqrt2\to2+\sqrt3$, khi đó :

$$I_4=\int_{1+\sqrt2}^{2+\sqrt3}\frac{\frac{t^2-1}{2t^2}dt}{\frac{t^2-1}{2t}}=\int_{1+\sqrt2}^{2+\sqrt3}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_{1+\sqrt2}^{2+\sqrt3}=\ln(2\sqrt2+\sqrt6-\sqrt3-2)$$

Cách trình bày 3.2:

Đặt $t=x+\sqrt{x^2-1}\Rightarrow dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{t}{\sqrt{x^2-1}}dx\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{dt}{t}$

và $x:\sqrt2\to2$ thì $t:1+\sqrt2\to2+\sqrt3$, khi đó : $I_4=\int_{1+\sqrt2}^{2+\sqrt3}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_{1+\sqrt2}^{2+\sqrt3}=\ln(2\sqrt2+\sqrt6-\sqrt3-2)$

5) $I_5=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Đặt $x=\sin t$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\begin{cases}dx=\cos tdt\\ \sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t\end{cases}$ và cận $t:0\to{}^{\pi}\!/\!_4$

$$\Rightarrow I_5=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2 t.\cos tdt}{\cos t}=\int_0^{\pi/4}\sin^2 tdt=\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos2x}{2}dt=\left(\frac12x-\frac{\sin2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{\pi-2}{8}$$

6) $I_6=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}dx$ Đặt $x=\sqrt{3}\tan t$ với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt\\ \sqrt{3+x^2}=\sqrt{3(1+\tan^2 t)}=\frac{\sqrt{3}}{|\cos t|}=\frac{\sqrt{3}}{\cos t}\end{cases}$

và cận $t:0\to\pi/4$ $\Rightarrow I_6=\int_0^{\pi/4}\frac{3\tan^2 t}{\frac{\sqrt{3}}{\cos t}}.\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt=3\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$

Đặt $u=\sin t\Rightarrow du=\cos tdt$ và cận $u:0\to\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow I_{24}=3\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2 t.\cos t}{\cos^4 t}dt=3\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2 t.\cos tdt}{(1-\sin^2 t)^2}=3\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{u^2du}{(1-u^2)^2}$

Mà ta có: $\frac{u^2}{(1-u^2)^2}=\frac{u^2-1+1}{(u^2-1)^2}=\frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{4}.\frac{[(u+1)-(u-1)]^2}{(u+1)^2(u-1)^2}=\frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{2}{u^2-1}\right]$

$=\frac{1}{2(u^2-1)}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\right]$

$$\Rightarrow I_6=\frac{3}{4}\int_0^{\sqrt{2}/2}\left[\frac{2}{u^2-1}+\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\right]du=\frac{3}{4}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2}=\frac{3}{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}$$

7) $I_7=\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}$

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$ và $x:1\to e$ thì $t:0\to 1$. Khi đó $I_7=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+3t^2}}$

Cách 1: Đặt $t=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan u$ với $u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}dt=\frac{du}{\sqrt{3}\cos^2 u}\\ \sqrt{1+3t^2}=\frac{1}{\cos u}\end{cases}$ và $t:0\to 1$ thì $u:0\to\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow I_7=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{du}{\cos u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos udu}{\cos^2 u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin u}{(1-\sin u)(1+\sin u)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1+\sin u}+\frac{1}{1-\sin u}\right)d\sin u$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$$

Cách 2: $I_7=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+3t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{3}+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{t+\sqrt{\frac{1}{3}+t^2}}{\left(t+\sqrt{\frac{1}{3}+t^2}\right)\sqrt{\frac{1}{3}+t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{d\left(t+\sqrt{\frac{1}{3}+t^2}\right)}{\left(t+\sqrt{\frac{1}{3}+t^2}\right)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{\frac{1}{3}+t^2}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$$

8) $I_8=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ Đặt $x=\sin^2 t$ với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}dx=2\sin t\cos tdt\\ \sqrt{x-x^2}=\sqrt{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}=\sin t\cos t\end{cases}$

và cận $t:\pi/6\to\pi/4$ $\Rightarrow I_8=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{2\sin t\cos tdt}{\sin t\cos t}=2\int_{\pi/6}^{\pi/4}dt=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$

9) $I_9=\int_1^2\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx$ Đặt $x=2\cos 2t$ với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}dx=-4\sin 2tdt\\ \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}=\sqrt{\frac{2-2\cos 2t}{2+2\cos 2t}}=\sqrt{\frac{4\sin^2 t}{4\cos^2 t}}=\frac{\sin t}{\cos t}\end{cases}$

và cận $t:\pi/6\to 0$ $\Rightarrow I_9=\int_0^{\pi/6}\frac{1}{4\cos^2 2t}.\frac{\sin t}{\cos t}.4\sin 2tdt=\int_0^{\pi/6}\frac{2\sin^2 t}{\cos^2 2t}dt=\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos^2 2t}{\cos^2 2t}dt=\int_0^{\pi/6}\left(\frac{1}{\cos^2 2t}-1\right)dt$

$$=\left(\frac{\tan 2t}{2}-t\right)\Bigg|_0^{\pi/6}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$$

10) $I_{10}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\sqrt{7+\cos 2x}}$

Ta có: $\sqrt{7+\cos 2x}=\sqrt{6+2\cos^2 x}=\sqrt{8-2\sin^2 x}$

Nên đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos tdt$ và cận $t:0\to 1$ $\Rightarrow I_{10}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\sqrt{8-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

Đặt $t=2\sin u$ với $u\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\begin{cases}dt=2\cos udu\\ \sqrt{4-4\sin^2 u}=2\cos u\end{cases}$ và cận $u:0\to\pi/6$

$$\Rightarrow I_{10}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/6}\frac{2\cos udu}{2\cos u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/6}du=\frac{u}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{\pi/6}=\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$$

Bài luyện

Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$ (Đs: $\ln(1+\sqrt{2})$)

2) $I_2=\int_0^{2014}\sqrt{2014^2-x^2}dx$ (Đs: $\frac{2014^2\pi}{4}$)

3) $I_3=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ (Đs: $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

4) $I_4=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ (Đs: $\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{6}$)

5) $I_5=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{x+1}{\sqrt{x(2-x)}}dx$ (Đs: $1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$)

6) $I_6=\int_0^{\ln\frac{3}{2}}\frac{e^x}{\sqrt{2e^x-e^{2x}}}dx$ (Đs: $\frac{\pi}{6}$)

DẠNG 3: $I_3=\int_{\alpha}^{\beta} f(x).g(x)dx$ **(3*)** Với $f(x),g(x)$ là hai trong bốn hàm:

logarit (log), đa thức (đa) (hoặc kể cả **phân thức), lượng giác (lượng)** và **mũ (mũ)**.

CÁCH GIẢI CHUNG

(3*) $\xrightarrow[dv]{\text{Đặt } u}$ Thứ tự ưu tiên

1 ↓	u	**1 (Nhất) – log**
2 ↓	↓	**2 (Nhì) – đa**
3 ↓	↓	**3 (Tam) – lượng**
4	dv	**4 (Tứ) – mũ**

$\begin{cases} u=f(x) \\ dv=g(x)dx \end{cases} \to \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\int g(x)dx \end{cases} \longrightarrow I_3$

$I_3=\int_{\alpha}^{\beta} udv = uv\Big|_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} vdu$

***CHÚ Ý*:**

*+) Như vậy khi kết hợp hai trong bốn hàm trên cho ta một bài toán. Vì vậy về mặt lí thuyết ta có thể tạo ra được $C_4^2=6$ bài toán của Dạng 3. Song trên thực tế, trong phạm vi kì thi Đại Học – Cao Đẳng thì thường xuất hiện 4 dạng là : (**loga**, **đa thức**); (**đa thức**, **lượng giác**); (**đa thức**, **mũ**) và (**lượng giác**, **mũ**) – dạng này chưa xuất hiện (kể từ kì thi 3 chung).*

*+) Khi gặp lượng giác và mũ ta có thể đặt "u→dv" theo thứ tự "**lượng giác → mũ**" hoặc ngược lại đều được và phải sử dụng hai lần tích phân từng phần. Cả hai lần tích phân từng phần trong trường hợp này phải thống nhất theo cùng thứ tự. Nếu không sẽ xảy ra hiện tượng I = I.*

+) Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần thì số lần thực hiện phụ thuộc vào bậc của hàm logarit và đa thức. Cụ thể:

**) Nếu trong biểu thức tích phân có $\log_a^n f(x)$ (hoặc $\ln^n f(x)$) $\Rightarrow$ tích phân từng phần n lần.*

**) Nếu trong biểu thức tích phân có đa thức bậc n: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$*

(không có hàm logarit) $\Rightarrow$ tích phân từng phần n lần.

+) Nếu $I=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)e^{ax+b}dx$ mà $f(x)$ có bậc n $(n\ge 2)$ (theo CHÚ Ý trên ta phải tính tích phân từng phần n lần) song trong trường hợp này có thể có cách "khắc phục" (không phải tính tích phân từng phần) bằng việc tách ghép và sử dụng công thức: $\int [f(x)+f'(x)]e^xdx=f(x)e^x+C$ (trong bài các em phải CM).

*+) Các em tham khảo thêm **kĩ thuật chọn hệ số** qua 5 câu tích phân ở* **Ví dụ 4**.

+) Về mặt ý tưởng, việc dùng phương pháp tích phân từng phần là việc ta chuyển từ tích phân ban đầu $\int_{\alpha}^{\beta} udv$ về tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} vdu$ đơn giản hơn bằng cách đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=g(x)dx \end{cases}$ mà thông thường thì $f'(x)$ và $\int g(x)dx$ dễ tính. Vì vậy phạm vi áp dụng phương pháp này không chỉ dừng lại ở hai hàm khác tên gọi mà còn sử dụng cho cùng một dạng hàm, nhiều hơn hai hàm….

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_2^3 \ln(x^2-x)dx$ **(D – 2004)** **2)** $I_2=\int_0^1 (e^{-2x}+x)e^x dx$ **(CĐ – 2009)** **3)** $I_3=\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$ **(D – 2006)**

4) $I_4=\int_1^e x^3\ln^2 x dx$ **(D – 2007)** **5)** $I_5=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$ **(D – 2008)** **6)** $I_6=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x dx$ **(A, A1 – 2013)**

Giải :

1) $I_1=\int_2^3 \ln(x^2-x)dx$ **(D – 2004)** Đặt $\begin{cases} u=\ln(x^2-x) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{2x-1}{x^2-x} \\ v=x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = x\ln(x^2-x)\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x-1}dx = 3\ln 6-2\ln 2-\int_2^3\left(2+\frac{1}{x-1}\right)dx = 3\ln 6-2\ln 2-\left(2x+\ln|x-1|\right)\Big|_2^3 = 3\ln 3-2$$

2) $I_2=\int_0^1 (e^{-2x}+x)e^x dx$ **(CĐ – 2009)**

Ta có: $I_2=\int_0^1 (e^{-2x}+x)e^x dx=\int_0^1 e^{-x}dx+\int_0^1 xe^x dx = A+B$ (*)

+) Tính $A=\int_0^1 e^{-x}dx=-\int_0^1 e^{-x}d(-x)=-e^{-x}\Big|_0^1=\dfrac{e-1}{e}$ (1)

+) Tính $B=\int_0^1 xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases} \Rightarrow B = xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx = e-e^x\Big|_0^1=1$ (2)

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_2=\dfrac{2e-1}{e}$

3) $I_3=\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$ **(D – 2006)**

Đặt $\begin{cases} u=x-2 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow I_3=\dfrac{(x-2)e^{2x}}{2}\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\dfrac{2-e^2}{2}-\dfrac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1=\dfrac{5-3e^2}{4}$

4) $I_4=\int_1^e x^3\ln^2 x dx$ **(D – 2007)** (Vì hàm ln$x$ có dạng bậc 2 nên phải từng phần 2 lần)

+) Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ dv=x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{2\ln x}{x}dx \\ v=\dfrac{x^4}{4} \end{cases} \Rightarrow I_4=\dfrac{x^4\ln^2 x}{4}\Big|_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x^3\ln x dx=\dfrac{e^4}{4}-\dfrac{1}{2}I$ (1) Với $I=\int_1^e x^3\ln x dx$

+) Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases} \Rightarrow I = \dfrac{x^4 \ln x}{4}\Big|_1^e - \dfrac{1}{4}\int_1^e x^3 dx = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{x^4}{16}\Big|_1^e = \dfrac{3e^4+1}{16}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $I_4 = \dfrac{5e^4-1}{32}$

5) $I_5 = \int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^3}dx$ **(D – 2008)** Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{cases} \Rightarrow I_5 = -\dfrac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^2 + \dfrac{1}{2}\int_1^2 \dfrac{dx}{x^3} = -\dfrac{\ln 2}{8} - \dfrac{1}{4x^2}\Big|_1^2 = \dfrac{3-2\ln 2}{16}$

6) $I_6 = \int_1^2 \dfrac{x^2-1}{x^2}\ln x dx$ **(A, A1 – 2013)** Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv = \dfrac{x^2-1}{x^2}dx = \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x+\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow I_6 = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right).\dfrac{dx}{x} = \dfrac{5}{2}\ln 2 - \int_1^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx = \dfrac{5}{2}\ln 2 - \left(x-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \dfrac{5}{2}\ln 2 - \dfrac{3}{2}$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1) $I_1 = \int_1^3 \dfrac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$ **(B – 2009)** **2)** $I_2 = \int_1^e (2x-\dfrac{3}{x})\ln x dx$ **(D – 2010)** **3)** $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{1+x\sin x}{\cos^2 x}dx$ **(B – 2011)**

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x)dx$ **(D – 2012)** **5)** $I_5 = \int_1^3 \dfrac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx$ **(A, A1 – 2012)** **6)** $I_6 = \int_0^1 x^5 e^x dx$

Giải :

1) $I_1 = \int_1^3 \dfrac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$ **(B – 2009)**

Ta có: $I_1 = \int_1^3 \dfrac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx = 3\int_1^3 \dfrac{dx}{(x+1)^2} + \int_1^3 \dfrac{\ln x}{(x+1)^2}dx = 3A+B$ (*)

+) Tính $A = \int_1^3 \dfrac{dx}{(x+1)^2} = \int_1^3 \dfrac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x+1}\Big|_1^3 = \dfrac{1}{4}$ (1)

+) Tính $B = \int_1^3 \dfrac{\ln x}{(x+1)^2}dx$ Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

$\Rightarrow B = -\dfrac{\ln x}{x+1}\Big|_1^3 + \int_1^3 \dfrac{dx}{x(x+1)} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}\Big|_1^e = -\dfrac{\ln 3}{4} + \int_1^3\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)dx = -\dfrac{\ln 3}{4} + \ln\dfrac{x}{x+1}\Big|_1^3 = \dfrac{3}{4}\ln 3 - \ln 2$ (2)

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_1 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}\ln 3 - \ln 2$

2) $I_2=\int_1^e(2x-\frac{3}{x})\ln xdx$ **(D – 2010)**

Ta có: $I_2=\int_1^e(2x-\frac{3}{x})\ln xdx=2\int_1^e x\ln xdx-3\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=2A-3B$ (*)

+) Tính $A=\int_1^e x\ln xdx$ Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow A=\left.\frac{x^2\ln x}{2}\right|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}=\frac{e^2+1}{4}\quad(1)$$

+) Tính $B=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$

C1: (Sử dụng kĩ thuật vi phân) $B=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=B=\int_1^e\ln xd(\ln x)=\left.\frac{\ln^2x}{2}\right|_1^e=\frac{1}{2}$ (2)

C2 : Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$ và cận $t:0\to1\Rightarrow B=\int_0^1 tdt=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$ (2)

(thực chất **C2** là cách trình bày khác của **C1**)

C3: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\frac{dx}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=\ln x\end{cases}\Rightarrow B=\ln^2x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=1-B\Rightarrow2B=1\Leftrightarrow B=\frac{1}{2}$ (2)

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_2=2.\frac{e^2+1}{4}-\frac{3}{2}=\boxed{\frac{e^2-2}{2}}$

3) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+x\sin x}{\cos^2x}dx$ **(B – 2011)**

Ta có: $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+x\sin x}{\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2x}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2x}dx=A+B$ (*)

+) $A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2x}=\tan x\Big|_0^{\pi/3}=\sqrt3$ (1)

+) $B=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2x}dx$ Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\frac{\sin x}{\cos^2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos x}\end{cases}$

$\Rightarrow B=\left.\frac{x}{\cos x}\right|_0^{\pi/3}-\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos x}=\frac{2\pi}{3}-I$ với $I=\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos x}$ Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và cận $t:0\to\sqrt3/2$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\pi/3}\frac{\cos xdx}{1-\sin^2x}=-\int_0^{\sqrt3/2}\frac{dt}{t^2-1}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_0^{\sqrt3/2}=-\ln(2-\sqrt3)\Rightarrow B=\frac{2\pi}{3}+\ln(2-\sqrt3)\quad(2)$$

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_3=\boxed{\sqrt3+\frac{2\pi}{3}+\ln(2-\sqrt3)}$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x)dx$ **(D – 2012)**

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} + I = \frac{\pi^2}{32} + I$$

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\left.\frac{x\cos 2x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{2}dx = 0 + \left.\frac{\sin 2x}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow I_4 = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4} = \frac{\pi^2+8}{32}$$

5) $I_5 = \int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx$ **(A, A1 – 2012)** $\quad I_5 = \int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx = \int_1^3 \frac{dx}{x^2} + \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^3 + I = \frac{2}{3} + I$

Tính $I = \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$ Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x+1} \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\left.\frac{\ln(x+1)}{x}\right|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{\ln 2}{3} + \int_1^3 \frac{(x+1)-x}{x(x+1)}dx = \frac{\ln 2}{3} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{\ln 2}{3} + \ln\left.\left|\frac{x}{x+1}\right|\right|_1^3 = \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$$

$\Rightarrow I_5 = \frac{2}{3} + \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$ (Các em có thể đặt luôn: $\begin{cases} u = 1+\ln(x+1) \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)dx = \dfrac{x+2}{x+1}dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$ …)

6) $I_6 = \int_0^1 x^5e^x dx$

Nhận xét 1: *Về mặt lí thuyết bài toán này ta hoàn toàn có thể giải theo phương pháp tích phân từng phần. Song ta phải sử dụng tới 5 lần tích phân từng phần (vì bậc của đa thức x^5 là 5 – khá dài). Lúc này ta sẽ có cách "khắc phục như sau":*

Ta luôn có $\int [f(x)+f'(x)]e^x dx = f(x)e^x + C \quad (*)$

Thật vậy: $\left[f(x)e^x + C\right]' = f'(x)e^x + f(x)e^x = \left[f(x)+f'(x)\right]e^x$ (đpcm)

(Vì vậy để áp dụng (*) chúng ta sẽ phải tách ghép x^5 về dạng trên)

Áp dụng (*) ta được:

$$I_6 = \int_0^1 x^5e^x dx = \int_0^1 \left[(x^5+5x^4) - 5(x^4+4x^3) + 20(x^3+3x^2) - 60(x^2+2x) + 120(x+1) - 120\right]e^x dx$$

$$= \int_0^1 (x^5+5x^4)e^x dx - 5\int_0^1 (x^4+4x^3)e^x dx + 20\int_0^1 (x^3+3x^2)e^x dx - 60\int_0^1 (x^2+2x)e^x dx + 120\int_0^1 (x+1)e^x dx - 120\int_0^1 e^x dx$$

$$= \left.(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x\right|_0^1 = 120 - 44e$$

Nhận xét 2:

*) *Như vậy qua bài toán trên ta thấy việc sử dụng công thức (*) sẽ giúp giảm bớt thao tác lập đi lập lại phương pháp tích phân từng phần (nếu bậc của đa thức lớn) .*

*) *Và từ bài toán trên chúng ta có thể đưa ra đáp số tổng quát cho như sau:*

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} x^n e^x dx=\left[x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-...+(-1)^{n-1}n!x+(-1)^n n!\right]e^x\Big|_{\alpha}^{\beta}=?$$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}$ **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\ln(1+\cos x)dx$ **3)** $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx$

4) $I_4=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos^2(\ln x)dx$ **5)** $I_5=\int_{-1}^{0}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^3}$ **6)** $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xe^{2x}\cos xdx$

Giải :

1) $I_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}$ Đặt $\begin{cases}u=\ln(\sin x)\\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{\cos x}{\sin x}dx=\cot xdx\\ v=\tan x\end{cases}$

Khi đó $I_1=\tan x\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dx=\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{1}{2}-x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2-\frac{\pi}{6}$

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\ln(1+\cos x)dx$ Đặt $\begin{cases}u=\ln(1+\cos x)\\ dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}dx\\ v=-\cos x\end{cases}$

Khi đó $I_2=-\cos x\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}dx=\ln 2-I$ **(*)**

Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\cos x}\sin xdx$ Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:2\to 1$

Suy ra $I=\int_1^2\frac{t-1}{t}dt=\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^2=1-\ln 2$ (2*)

Thay (2*) vào (*) ta được: $I_2=2\ln 2-1$

3) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$ Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\tan x\end{cases}$

$$\Rightarrow I_3=\frac{1}{2}\left(x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos x}{\cos x}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$$

4) $I_4=\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos^2(\ln x)dx=\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\frac{1+\cos(2\ln x)}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{1}{2}\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(2\ln x)dx=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}+\frac{1}{2}I$ **(*)**

+) Tính $I=\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(2\ln x)dx$ Đặt $\begin{cases}u=\cos(2\ln x)\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{2\sin(2\ln x)}{x}dx\\v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=x\cos(2\ln x)\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}+2\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\sin(2\ln x)dx=-e^{\frac{\pi}{2}}-1+2J\quad(1)$$

+) Tính $J=\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\sin(2\ln x)dx$ Đặt $\begin{cases}u=\sin(2\ln x)\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2\cos(2\ln x)}{x}dx\\v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow J=x\sin(2\ln x)\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}-2\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(2\ln x)dx=-2I\quad(2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $I=-e^{\frac{\pi}{2}}-1-4I\Leftrightarrow I=-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}$ **(2*)**

Thay (2*) vào (*) ta được: $I_4=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{10}=\boxed{\frac{2e^{\frac{\pi}{2}}-3}{5}}$

5) $I_5=\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^3}$ Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\dfrac{xdx}{(x^2+1)^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\displaystyle\int\frac{xdx}{(x^2+1)^3}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^3}=-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I_5=-\frac{x}{4(x^2+1)^2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}I\quad(*)$$

Tính $I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ Đặt $x=\tan t\Rightarrow dt=\frac{dt}{\cos^2 t}=(1+\tan^2 t)dt$ và $x:-1\to 0$ thì $t:-\frac{\pi}{4}\to 0$

Khi đó $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{(1+\tan^2 t)dt}{(1+\tan^2 t)^2}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{dt}{1+\tan^2 t}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ (2*)

Thay (2*) vào (*) ta được: $I_5=-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{\pi}{32}}$

6) $I_6=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}xe^{2x}\cos xdx$

Nhận xét: Vì dưới dấu tích phân xuất hiện đồng thời ba hàm (đa thức , lượng giác, mũ) nên chúng ta sẽ tính tích phân từng phần theo cụm (quan niệm lượng giác và mũ là một hàm) . Trước khi đi tính $I_6=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}xe^{2x}\cos xdx$ ta sẽ đi tính nguyên hàm $A=\int xe^{2x}\cos xdx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}\cos 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int e^{2x}\cos 2xdx = I \end{cases}$ (*)

+) Tính $I = \int e^{2x}\cos 2xdx$

Đặt $\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2xdx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow I = \dfrac{e^{2x}\cos 2x}{2} + \int e^{2x}\sin 2xdx = \dfrac{e^{2x}\cos 2x}{2} + J$ (1)

+) Tính $J = \int e^{2x}\sin 2xdx$

Đặt $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2xdx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow J = \dfrac{e^{2x}\sin 2x}{2} - \int e^{2x}\cos 2xdx = \dfrac{e^{2x}\cos 2x}{2} - I$ (2)

Thay (2) vào (1) $\Rightarrow I = \dfrac{e^{2x}\cos 2x}{2} + \dfrac{e^{2x}\sin 2x}{2} - I \Leftrightarrow I = \dfrac{e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)}{4}$ (2*)

Từ (*) và (2*) $\Rightarrow A = \dfrac{xe^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)}{4} - \dfrac{1}{4}\int e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)dx$ (3*)

Mà theo (2) : $\int e^{2x}\sin 2xdx = J = \dfrac{e^{2x}\sin 2x}{2} - \int e^{2x}\cos 2xdx \Rightarrow \int e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)dx = \dfrac{e^{2x}\sin 2x}{2}$ (4*)

Thay (4*) vào (3*) ta được:

$$A = \int xe^{2x}\cos xdx = \frac{xe^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)}{4} - \frac{1}{4}.\frac{e^{2x}\cos 2x}{2} = \frac{e^{2x}(2x\sin 2x + 2x\cos 2x - \cos 2x)}{8}$$

Suy ra $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{2x}\cos xdx = \dfrac{e^{2x}(2x\sin 2x + 2x\cos 2x - \cos 2x)}{8}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{e^{\pi}(1-\pi)+1}{8}$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau:

1) $I_1 = \int_0^1 x\ln(2+x^2)dx$ **2)** $I_2 = \int_0^1 \dfrac{\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{(x+1)^3}dx$ **3)** $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x}dx$

4) $I_4 = \int_{-1}^0 \dfrac{3x+1}{4x^3+28x^2+65x+50}dx$ **5)** $I_5 = \int_1^4 \left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln\left(x+\sqrt{x}-1\right)dx$

Giải :

1) $I_1 = \int_0^1 x\ln(2+x^2)dx$

Cách giải thứ nhất (Cách giải "thông thường")

+) Đặt $\begin{cases} u = \ln(2+x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{2+x^2}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$, khi đó $I_1 = \dfrac{x^2}{2}\ln(2+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x^3}{2+x^2}dx = \dfrac{1}{2}\ln 3 - I$ (*)

+) Tính $I=\int_0^1 \frac{x^3}{2+x^2}dx$ Đặt $t=2+x^2 \Rightarrow dt=2xdx \Leftrightarrow xdx=\frac{dt}{2}$ và $x:0\to 1$ thì $t:2\to 3$

Khi đó $I=\int_0^1 \frac{x^2}{2+x^2}xdx=\int_2^3 \frac{t-2}{t}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_2^3\left(1-\frac{2}{t}\right).dt=\frac{1}{2}\left(t-2\ln|t|\right)\Big|_2^3=\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}$ (2*)

Thay (2*) vào (*) ta được: $I=\frac{1}{2}\ln 3-\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}$

Cách giải thứ hai (Sử dụng "***kĩ thuật chọn hệ số***")

Đặt $\begin{cases} u=\ln(2+x^2) \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{2x}{2+x^2}dx \\ v=\frac{x^2}{2}+1=\frac{2+x^2}{2} \end{cases}$ (ở đây $v=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$ và ta chọn $C=1$ nên $v=\frac{x^2}{2}+1$)

Khi đó $I_1=\frac{2+x^2}{2}\ln(2+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1 xdx=\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}$

CHÚ Ý : *Qua câu tích phân đầu tiên ở* **Ví dụ 4** *các em được làm quen thêm một* ***kĩ thuật chọn hệ số*** *cho phương pháp tích phân từng phần . Kĩ thuật này được hiểu như sau: Khi đi tính tích phân từng phần, ở khâu đặt* $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\int g(x)dx=G(x)+C \end{cases}$ *với* C *là hằng số bất kì (chọn số nào cũng được)*

Và theo một "thói quen" thì chúng ta thường chọn $C=0$ *(* Cách giải thứ nhất *cho* I_1 *trong* **Ví dụ 4** *đi theo cách chọn này). Nhưng đôi khi việc chọn* $C=0$ *lại làm cho tích phân* $\int_\alpha^\beta vdu$ *không được "đẹp" cho lắm . Vì ta có quyền chọn* C *là số thực bất kì nên ta sẽ chọn hệ số* C *thích hợp mà ở đó biểu thức* vdu *là đơn giản nhất. Các em hãy theo dõi tiếp* Cách giải thứ hai *này ở các ý tiếp theo của* **Ví dụ 4**.

2) $I_2=\int_0^1 \frac{\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{(x+1)^3}dx$

Cách giải thứ nhất (Cách giải "thông thường")

+) Đặt $\begin{cases} u=\ln(4x^2+8x+3) \\ dv=\frac{dx}{(x+1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{8x+8}{4x^2+8x+3}dx \\ v=\frac{-1}{2(x+1)^2} \end{cases}$

Khi đó $I_2=\frac{-\ln(4x^2+8x+3)}{2(x+1)^2}\Big|_0^1+4\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(4x^2+8x+3)}=\frac{-\ln 15}{8}+\frac{\ln 3}{2}+4I$ (*)

+) Tính $I=\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(4x^2+8x+3)}$

Ta phân tích: $\frac{1}{(x+1)(4x^2+8x+3)}=\frac{1}{(x+1)(2x+1)(2x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{2x+3}$

$$\Leftrightarrow 1 = A(2x+1)(2x+3) + B(x+1)(2x+3) + C(x+1)(2x+1) \quad (2^*)$$

Chọn x lần lượt các giá trị $-1;-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}$ thay vào (2*) ta được: $\begin{cases} A=-1 \\ B=C=1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} \right) dx = \left(-\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln\left|4x^2+8x+3\right| \right)\Big|_0^1 = -\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{15}{3}$ (3*)

Thay (3*) vào (2*) ta được: $I_2 = \frac{-\ln 15}{8} + \frac{\ln 3}{2} + 4\left(-\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{15}{3} \right) = \frac{15}{8}\ln 15 - \frac{3}{2}\ln 3 - 4\ln 2$

Cách giải thứ hai (Sử dụng "***kĩ thuật chọn hệ số***")

Đặt $\begin{cases} u = \ln(4x^2+8x+3) \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{8x+8}{4x^2+8x+3}dx \\ v = \dfrac{-1}{2(x+1)^2} + 2 = \dfrac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2} \end{cases}$ $\left(v = \int \frac{dx}{(x+1)^3} = \frac{-1}{2(x+1)^2} + C \text{ và chọn } C = 2 \right)$

Khi đó $I_2 = \frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2}\ln(4x^2+8x+3)\Big|_0^1 - 4\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \frac{15}{8}\ln 15 - \frac{3}{2}\ln 3 - 4\ln|x+1|\Big|_0^1 = \frac{15}{8}\ln 15 - \frac{3}{2}\ln 3 - 4\ln 2$

3) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x}dx$

Cách giải thứ nhất (Cách giải "thông thường")

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x + 2\cos x) \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_3 = \tan x \ln(\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x}dx$$

Khi đó việc đi tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x}dx$ sẽ trở nên phức tạp .

Lúc này cần sự "lên tiếng" của ***kĩ thuật chọn hệ số***

Cách giải thứ hai (Sử dụng "***kĩ thuật chọn hệ số***")

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x + 2\cos x) \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}dx \\ v = \tan x + 2 = \dfrac{\sin x + 2\cos x}{\cos x} \end{cases}$

Khi đó $I_3 = \frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x}\ln(\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - 2\sin x}{\cos x}dx$

$$= 3\ln 3 - \frac{7}{2}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\cos x}{\cos x}$$

$$= 3\ln 3 - \frac{7}{2}\ln 2 - \left(x + 2\ln|\cos x| \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\ln 3 - \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$$

4) $I_4=\int_{-1}^{0}\frac{3x+1}{4x^3+28x^2+65x+50}dx=\int_{-1}^{0}\frac{3x+1}{(x+2)(2x+5)^2}dx$

Cách giải thứ nhất (Cách giải "thông thường")

Ta phân tích: $\frac{3x+1}{(x+2)(2x+5)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x+5}+\frac{C}{(2x+5)^2}$

$$\Leftrightarrow 3x+1=A(2x+5)^2+B(x+2)(2x+5)+C(x+2)$$

Lần lượt ta chọn x bằng $-2;-\frac{5}{2};0$ ta được: $\begin{cases}-5=A\\ -\frac{13}{2}=-\frac{C}{2}\\ 1=25A+10B+2C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-5\\ B=10\\ C=13\end{cases}$

Vậy $I_4=\int_{-1}^{0}\left[\frac{-5}{x+2}+\frac{10}{2x+5}+\frac{13}{(2x+5)^2}\right]dx=\left[5\ln\left|\frac{2x+5}{x+2}\right|-\frac{13}{2(2x+5)}\right]\Bigg|_{-1}^{0}=5\ln\frac{5}{6}+\frac{13}{15}$

Cách giải thứ hai (Sử dụng "***kĩ thuật chọn hệ số***")

Đặt $\begin{cases}u=\frac{3x+1}{x+2}\\ dv=\frac{dx}{(2x+5)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{5}{(x+2)^2}dx\\ v=-\frac{1}{2(2x+5)}+\frac{1}{2}=\frac{x+2}{2x+5}\end{cases}$

Khi đó $I_4=\frac{3x+1}{2x+5}\Big|_{-1}^{0}-5\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+2)(2x+5)}=\frac{13}{15}-5\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{2}{2x+5}\right)dx=\frac{13}{15}-5\ln\left|\frac{x+2}{2x+5}\right|\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{13}{15}+5\ln\frac{5}{6}$

5) $I_5=\int_{1}^{4}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln\left(x+\sqrt{x}-1\right)dx$

Cách giải thứ nhất (Cách giải "thông thường")

Đặt $t=x+\sqrt{x}-1\Rightarrow dt=\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ và $x:1\to 4$ thì $t:1\to 5$

Khi đó $I_5=\int_{1}^{5}\ln t\,dt$ Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\ dv=dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dt}{t}\\ v=t\end{cases}\Rightarrow I_5=t\ln t\Big|_1^5-\int_1^5 dt=5\ln 5-t\Big|_1^5=5\ln 5-4$

Cách giải thứ hai (Sử dụng "***kĩ thuật chọn hệ số***")

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+\sqrt{x}-1\right)\\ dv=\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}-1}dx=\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}-1\right)}dx\\ v=x+\sqrt{x}-1\end{cases}$

Khi đó $I_5=\left(x+\sqrt{x}-1\right)\ln\left(x+\sqrt{x}-1\right)\Big|_1^4-\int_1^4\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}dx=5\ln 5-\int_1^4\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=5\ln 5-\left(x+\sqrt{x}\right)\Big|_1^4=5\ln 5-4$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_2^3\frac{x^2+3x}{(x^2-1)^3}dx$ **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$

Giải :

1) $I_1=\int\limits_2^3 \frac{x^2+3x}{(x^2-1)^3}dx=\int\limits_2^3 \frac{x(x+3)}{(x^2-1)^3}dx$

+) Đặt $\begin{cases} u=x+3 \\ dv=\dfrac{xdx}{(x^2-1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=dx \\ v=\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2-1)^3}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^3}=-\frac{1}{4(x^2-1)^2} \end{cases}$

Khi đó $I_1=-\left.\frac{x+3}{4(x^2-1)^2}\right|_2^3+\frac{1}{4}\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x^2-1)^2}=\frac{133}{1152}+\frac{1}{4}I$ (*)

+) Tính $I=\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x^2-1)^2}$ Ta có:

$$\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{4}.\frac{[(x+1)-(x-1)]^2}{(x+1)^2.(x-1)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right]$$

Khi đó $I=\frac{1}{4}\int\limits_2^3\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right]dx=\frac{1}{4}\left.\left(-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)\right|_2^3=\frac{7}{48}+\frac{1}{4}\ln\frac{2}{3}$ (2*)

Thay (2*) vào (*) ta được: $I_1=\frac{133}{1152}+\frac{1}{4}\left(\frac{7}{48}+\frac{1}{4}\ln\frac{2}{3}\right)=\frac{175}{1152}+\frac{1}{16}\ln\frac{2}{3}$

2) $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}.\frac{x}{\cos x}dx$

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{x}{\cos x} \\ dv=\dfrac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=\dfrac{d(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}dx \\ v=\displaystyle\int \frac{d(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2}=-\frac{1}{x\sin x+\cos x} \end{cases}$

Khi đó $I_2=-\left.\frac{x}{(x\sin x+\cos x)\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=-\frac{2\pi}{4+\pi}+\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{2\pi}{\pi+4}+1=\frac{4-\pi}{4+\pi}$

Nhận xét: Do $(x\sin x+\cos x)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

nên ta tách $\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}=\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}.\frac{x}{\cos x}$

Ví dụ 6. ***Tính các tích phân sau:***

1) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin x)e^x}{1+\cos x}dx$ **2)** $I_2=\int\limits_1^2 \frac{1+x\ln x}{x}e^x dx$ **3)** $I_3=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$ **4)** $I_4=\int\limits_0^1 \frac{(x^2+1)e^x}{(1+x)^2}dx$

Giải :

1) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin x)e^x}{1+\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{1+\cos x}dx$ **(*)**

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx = \dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}dx = \dfrac{dx}{1+\cos x} \\ v = e^x \end{cases}$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x \sin x}{1+\cos x}dx = \dfrac{e^x \sin x}{1+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x}{1+\cos x}dx = \sqrt{e^\pi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x}{1+\cos x}dx$ **(2*)**

Thay **(2*)** vào **(*)** ta được: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x}{1+\cos x}dx + \sqrt{e^\pi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x}{1+\cos x}dx = \sqrt{e^\pi}$

2) $I_2 = \int_1^2 \dfrac{1+x\ln x}{x}e^x dx = \int_1^2 \dfrac{e^x}{x}dx + \int_1^2 e^x \ln x dx$ **(*)**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int_1^2 e^x \ln x dx = e^x \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \dfrac{e^x}{x}dx = e^2 \ln 2 - \int_1^2 \dfrac{e^x}{x}dx$ **(2*)**

Thay **(2*)** vào **(*)** ta được: $I_2 = \int_1^2 \dfrac{e^x}{x}dx + e^2\ln 2 - \int_1^2 \dfrac{e^x}{x}dx = e^2 \ln 2$

3) $I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$ **(*)**

Đặt $\begin{cases} u = e^{x+\frac{1}{x}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{x+\frac{1}{x}}dx = x e^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx = \dfrac{e^2(2-\sqrt{e})}{2} - \int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$ **(2*)**

Thay **(2*)** vào **(*)** ta được: $I_3 = \dfrac{e^2(2-\sqrt{e})}{2} - \int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx = \dfrac{e^2(2-\sqrt{e})}{2}$

4) $I_4 = \int_0^1 \dfrac{(x^2+1)e^x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \dfrac{\left[(1+x)^2-2x\right]e^x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 e^x dx - 2\int_0^1 \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

$= e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \dfrac{(1+x-1)e^x}{(1+x)^2}dx = e-1-2\left(\int_0^1 \dfrac{e^x}{1+x}dx - \int_0^1 \dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx\right)$ **(*)**

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{1+x} \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{dx}{(1+x)^2} \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \dfrac{e^x}{1+x}dx = \dfrac{e^x}{1+x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx = \dfrac{e}{2}-1+\int_0^1 \dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx$ **(2*)**

Thay **(2*)** vào **(*)** ta được: $I_4 = e-1-2\left(\dfrac{e}{2}-1+\int_0^1 \dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx - \int_0^1 \dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx\right) = 1$

Nhận xét: Bốn câu tích phân ở Ví dụ 6 đều có đặc điểm chung là tích phân xuất hiện lượng triệt tiêu.

DẠNG 4: $I_4=\int\limits_\alpha^\beta f(e^u)u'dx$ **(4*1)** hoặc $I_4=\int\limits_\alpha^\beta f(\sin u,\cos u).u'dx$ **(4*2)**

Trong đó $u\neq ax+b\ (a\neq 0)$

CÁCH GIẢI CHUNG

(4*1) **(4*2)** → Đặt $t=u$ — $dt=u'dx$

x	α	β
t	α_0	β_0

(4*1) → $I_4=\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f(e^t)dt$

(4*2) → $I_4=\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\sin t,\cos t)dt$

→ **Tích phân cơ bản**

Chú thích:

Nếu dưới dấu tích phân có hàm lượng giác và hàm mũ có dạng $\sin u$ *và* e^u *mà* $u\neq ax+b$ *(nghĩa là* u *không là hàm bậc nhất hoặc bậc không) thì việc đầu tiên ta phải làm là đổi biến* $t=u$ *. Sau đó đưa về các tích phân cơ bản.*

Ví dụ minh họa

Ví dụ Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{\sin x}+\cos x)\cos xdx$ **(D – 2005)** **2)** $I_2=\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^3x+e^{\sin^2x}).\sin 2xdx$ **3)** $I_3=\int\limits_0^1\frac{e^{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2+2x+1}dx$

4) $I_4=\int\limits_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ **5)** $I_5=\int\limits_0^1\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$ **6)** $I_6=\int\limits_0^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}dx$

7) $I_7=\int\limits_{1-\frac{\pi^2}{4}}^{1}\cos\sqrt{1-x}dx$ **8)** $I_8=\int\limits_0^{\pi/2}e^{\sin^2x}\sin x\cos^3xdx$ **9)** $I_9=\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2x\cos^4(\sin x)dx$

Giải : 1) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{\sin x}+\cos x)\cos xdx$ **(D – 2005)** Ta có: $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos xdx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx=A+B$ (*)

+) Tính $B=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$ (1)

+) Tính $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos xdx$ Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và cận $t: 0\to 1\Rightarrow A=\int\limits_0^1e^tdt=e^t\Big|_0^1=e-1$ (2)

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_1=\frac{\pi}{4}+e-1$

(Ta có thể sử dụng kĩ thuật vi phân để tính A: $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}d(\sin x)=e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=e-1$)

2) $I_2=\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^3x+e^{\sin^2x}).\sin 2xdx$

Ta có : $I_2=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3x\sin 2xdx+\int\limits_0^{\pi/2}e^{\sin^2x}.\sin 2xdx=2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4x\sin xdx+\int\limits_0^{\pi/2}e^{\sin^2x}.\sin 2xdx=2A+B$ (*)

+) Tính $A=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4x\sin xdx$ Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ và cận $t:1\to 0$ $\Rightarrow A=\int\limits_0^1 t^4dt=\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1=\frac{1}{5}$ (1)

(Ta có thể sử dụng kĩ thuật vi phân để tính A: $A=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4x\sin xdx=A=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4xd(\cos x)=\left.\frac{\cos^5x}{5}\right|_0^{\pi/2}=\frac{1}{5}$)

+) Tính $B=\int\limits_0^{\pi/2}e^{\sin^2x}.\sin 2xdx$ Đặt $t=\sin^2x\Rightarrow dt=2\sin x\cos xdx=\sin 2xdx$ và cận $t:\ 0\to 1$

$\Rightarrow B=\int\limits_0^1 e^tdt=e^t\Big|_0^1=e-1$ (2) Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_2=\frac{5e-3}{5}$

3) $I_3=\int\limits_0^1\frac{e^{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2+2x+1}dx$ Đặt $t=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow dt=\frac{2}{(x+1)^2}dx=\frac{2dx}{x^2+2x+1}$ và cận $t:-1\to 0$

$$\Rightarrow I_3=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 e^tdt=\left.\frac{e^t}{2}\right|_{-1}^0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}=\frac{e-1}{2e}$$

4) $I_4=\int\limits_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow dx=2tdt$ và cận $t:\ 0\to 2$

$$\Rightarrow I_4=\int\limits_0^2\frac{e^t}{t}.2tdt=2\int\limits_0^2 e^tdt=2e^t\Big|_0^2=2e^2-2$$

5) $I_5=\int\limits_0^1\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$ Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow dx=2tdt$ và cận $t:\ 0\to 1$

$\Rightarrow I_5=\int\limits_0^1 te^tdt$ Đặt $\begin{cases}u=t\\dv=e^tdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\v=e^t\end{cases}$ $\Rightarrow I_5=te^t\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^tdt=e-e^t\Big|_0^1=e-(e-1)=1$

6) $I_6=\int\limits_0^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}dx$ Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow dx=2tdt$ và cận $t:0\to\pi/2$

$\Rightarrow I_6=2\int\limits_0^{\pi/2}t\sin tdt$ Đặt $\begin{cases}u=t\\dv=\sin tdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\v=-\cos t\end{cases}$ $\Rightarrow I_6=-2t\cos t\Big|_0^{\pi/2}+2\int\limits_0^{\pi/2}\cos tdt=0+2\sin t\Big|_0^{\pi/2}=2$

7) $I_7=\int\limits_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1\cos\sqrt{1-x}dx$ Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=1-x\Rightarrow 2tdt=-dx$ và cận: $t:\pi/2\to 0$

$\Rightarrow I_7=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0\cos t.(-2tdt)=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt$ Đặt $\begin{cases}u=t\\du=\cos tdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\u=\sin t\end{cases}$

$$\Rightarrow I_7 = 2\left(t\sin t\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt \right) = 2\left(\frac{\pi}{2} + \cos t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \boxed{\pi - 2}$$

8) $I_8 = \int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x\,dx$ Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2\sin x\cos x\,dx$ và cận $t:\ 0 \to 1$

$$I_8 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x.e^{\sin^2 x}.\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t).e^{\sin^2 x}.2\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)e^t dt$$

Đặt $\begin{cases} u = 1-t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dt \\ v = e^t \end{cases} \Rightarrow I_8 = \frac{1}{2}\left((1-t)e^t\Big|_0^1 + \int_0^1 e^t dt\right) = -\frac{1}{2} + \frac{e^t}{2}\Bigg|_0^1 = \boxed{\frac{e-2}{2}}$

9) $I_9 = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\cos^4(\sin x)dx$ Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$ và cận $t:\ 0 \to 1$

$$\Rightarrow I_8 = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\cos^4(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin x.\cos^4(\sin x).\cos x\,dx = 2\int_0^1 t.\cos^4 t\,dt$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \cos^4 t\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \int \cos^4 t\,dt = \int\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \int \frac{1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}}{4}dt = \frac{3}{8}t + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32} \end{cases}$

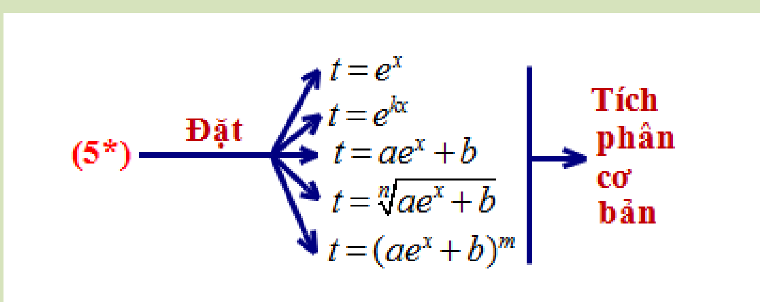
$$\Rightarrow I_9 = 2\left(\frac{3t^2}{8} + \frac{t}{4}\sin 2t + \frac{t}{32}\sin 4t\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{3}{4}t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 4t}{16}\right)dt$$

$$= \frac{12 + 8\sin 2 + \sin 4}{12} - \left(\frac{3t^2}{8} - \frac{\cos 2t}{4} - \frac{\cos 4t}{64}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{12 + 8\sin 2 + \sin 4}{12} - \frac{41 - 16\cos 2 - \cos 4}{64}$$

$$= \boxed{\frac{69 + 128\sin 2 + 16\sin 4 + 48\cos 2 + 3\cos 4}{192}}$$

DẠNG 5: $I_5 = \int_\alpha^\beta f(e^x)dx$ (5*)

CÁCH GIẢI CHUNG



Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_1^3\frac{dx}{e^x-1}$ **(D – 2009)** 2) $I_2=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$ **(B – 2006)** 3) $I_3=\int_0^1\frac{dx}{e^{2x}+5}$

4) $I_4=\int_0^1\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx$ 5) $I_5=\int_0^1\frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$ 6) $I_6=\int_0^1\frac{(1+e^x)^3}{e^x}dx$ 7) $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Giải :

1) $I_1=\int_1^3\frac{dx}{e^x-1}$ **(D – 2009)**

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$ và $x:1\to 3$ thì $t:e\to e^3$

Khi đó: $I_1=\int_1^3\frac{e^x dx}{e^x(e^x-1)}=\int_e^{e^3}\frac{dt}{t(t-1)}=\int_e^{e^3}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Bigg|_e^{e^3}=\ln\frac{e^2+e+1}{e^2}$

2) $I_2=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$ **(B – 2006)**

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$ và $x:\ln 3\to\ln 5$ thì $t:3\to 5$

Khi đó: $I_2=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x dx}{e^{2x}+2-3e^x}=\int_3^5\frac{dt}{t^2-3t+2}=\int_3^5\frac{dt}{(t-1)(t-2)}=\int_3^5\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Bigg|_3^5=\ln\frac{3}{2}$

3) $I_3=\int_0^1\frac{dx}{e^{2x}+5}$

Đặt $t=e^{2x}\Rightarrow dt=2e^{2x}dx$ và $x:0\to 1$ thì $t:1\to e^2$

Khi đó: $I_3=\int_0^1\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}(e^{2x}+5)}=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{dt}{t(t+5)}=\frac{1}{10}\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+5}\right)dt=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{t}{t+5}\right|\Bigg|_1^{e^2}=\frac{1}{10}\ln\frac{6e^2}{e^2+5}$

4) $I_4=\int_0^1\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx$ Đặt $t=e^{-x}\Rightarrow dt=-e^{-x}dx$ và cận $t:1\to {}^1\!/_e$

$\Rightarrow I_4=\int_0^1\frac{e^{-x}.e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=-\int_1^{1/e}\frac{t}{t+1}dt=\int_{1/e}^1\frac{t}{t+1}dt=\int_{1/e}^1\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_{1/e}^1=\ln\frac{e+1}{2}-\frac{1}{e}$

5) $I_5=\int_0^1\frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}=\int_0^1\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$ Đặt $t=e^{2x}\Rightarrow dt=2e^{2x}dx$ và cận $t:1\to e^2$

$\Rightarrow I_5=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{2}\ln|t+1|\Big|_1^{e^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$

6) $I_6 = \int_0^1 \frac{(1+e^x)^3}{e^x}dx$ Đặt $t = 1+e^x \Rightarrow \begin{cases} dt = e^x dx \\ e^x = t-1 \end{cases}$ và cận $t: 2 \to 1+e$

$$\Rightarrow I_6 = \int_0^1 \frac{(1+e^x)^3 e^x}{e^{2x}}dx = \int_2^{1+e} \frac{t^3}{(t-1)^2}dt = \int_2^{1+e}\left[t+2+\frac{3t-2}{(t-1)^2}\right]dt$$

$$= \int_2^{1+e}\left[t+2+\frac{3(t-1)+1}{(t-1)^2}\right]dt = \int_2^{1+e}\left[t+2+\frac{3}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right]dt = \left(\frac{t^2}{2}+2t+3\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}\right)\Bigg|_2^{1+e} = \frac{e^3+6e^2+e-2}{2e}$$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$ và cận $t: 1 \to 2$ $\Rightarrow I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+3)e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \int_1^2 \frac{t+3}{t^2+3t+2}dt$ (*)

$$= \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}(2t+3)+\frac{3}{2}}{t^2+3t+2}dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d(t^2+3t+2)}{t^2+3t+2}+\frac{3}{2}\int_1^2 \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d(t^2+3t+2)}{t^2+3t+2}+\frac{3}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln(t^2+3t+2)+\frac{3}{2}\ln\frac{t+1}{t+2}\right)\Bigg|_1^2 = 3\ln 3 - 4\ln 2$$

(Từ (*) các em có thể dùng phương pháp đồng nhất hệ số: $\frac{t+3}{t^2+3t+2} = \frac{t+3}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}$

$$\Rightarrow t+3 = A(t+2)+B(t+1) \quad (2*)$$

Ta tìm A, B theo 2 cách: <u>**C1**</u>: chọn $t=-1 \Rightarrow A = 2$ và chọn $t = -2 \Rightarrow B = -1$

<u>**C2**</u>: (2*) $\Leftrightarrow t+3 = (A+B)t + 2A + B \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B=-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_8 = \int_1^2\left(\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt = \left(2\ln|t+1|-\ln|t+2|\right)\Big|_1^2 = 3\ln 3 - 4\ln 2 \ )$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1) $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$ **(A – 2010)** **2)** $I_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$ **3)** $I_3 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x}{2+(1+e^x)^3}dx$

4) $I_4 = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ **5)** $I_5 = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x+1)^3}}$ **6)** $I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}}$

<u>**Giải**</u> :

1) $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$ **(A – 2010)**

<u>**Nhận xét**</u>: *Vì biểu thức dưới dấu tích phân có cả phần đa thức liên hệ bởi phép toán cộng nên ta sẽ nghĩ tới việc "triệt tiêu" nó bằng cách cô lập (tách) thành hai tích phân để tính.*

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+2e^x} = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + I = \frac{1}{3}+I$$

Tính $I=\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+2e^x}$ Đặt $t=1+2e^x \Rightarrow dt=2e^x dx \Leftrightarrow e^x dx=\frac{dt}{2}$ và $x:0\to 1$ thì $t:3\to 1+2e$

Khi đó: $I=\frac{1}{2}\int_3^{1+2e}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_3^{1+2e}=\frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$ $\Rightarrow I_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$

(Các bạn có thể tính I theo kĩ thuật vi phân: $I=\int_0^1\frac{e^x dx}{1+2e^x}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1+2e^x)}{1+2e^x}=\frac{1}{2}\ln|1+2e^x|\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$)

CHÚ Ý: Bài toán trên các bạn có thể trình bày theo cách ngắn gọn sau:

$$I_1=\int_0^1\frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx=\int_0^1 x^2dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(2e^x+1)}{1+2e^x}=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\ln|2e^x+1|\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$$

2) $I_2=\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$

Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow t^2=e^x-1\Rightarrow\begin{cases}2tdt=e^x dx\\ e^x=t^2+1\end{cases}$ và $x:\ln 2\to\ln 5$ thì $t:1\to 2$

Khi đó: $I_2=\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}.e^x dx=\int_1^2\frac{t^2+1}{t}.2tdt=2\int_1^2(t^2+t)dt=2\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{23}{3}$

3) $I_3=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x}{2+(1+e^x)^3}dx$

Đặt $t=(1+e^x)^3\Rightarrow dt=3(1+e^x)^2.e^x dx\Leftrightarrow e^x(1+e^x)^2dx=\frac{dt}{3}$ và $x:0\to\ln 2$ thì $t:8\to 27$

Khi đó: $I_3=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x(e^{2x}+2e^x+1)}{2+(1+e^x)^3}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x(1+e^x)^2dx}{2+(1+e^x)^3}=\frac{1}{3}\int_8^{27}\frac{dt}{2+t}=\frac{1}{3}\ln|t+2|\Big|_8^{27}=\frac{1}{3}\ln\frac{29}{10}$

4) $I_4=\int_0^{\ln 3}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow\begin{cases}2tdt=e^x dx\\ e^x=t^2-1\end{cases}$ cận $t:\sqrt{2}\to 2$

$$\Rightarrow I_4=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x dx}{e^x\sqrt{e^x+1}}=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{2tdt}{(t^2-1)t}=2\int_{\sqrt{2}}^2\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^2=2\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 3$$

5) $I_5=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x+1)^3}}$ Đặt $t=e^x+1\Rightarrow dt=e^x dx$ và cận $t:2\to 4$ $\Rightarrow I_5=\int_2^4\frac{dt}{\sqrt{t^3}}=\int_2^4 t^{-3/2}.dt=\frac{-2}{\sqrt{t}}\Big|_2^4=\sqrt{2}-2$

6) $I_6=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}}$

Nhận xét:

Nếu bài toán này ta đặt $t=\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}\Rightarrow t^2=2e^{2x}+2e^x+1\Rightarrow tdt=(2e^{2x}+e^x)dx$ *khi đó chúng ta phải chỉnh lại tích phân (để rút được theo* tdt *) bằng cách biến đổi:* $I_6=\int_0^1\frac{(2e^{2x}+e^x)dx}{(2e^{2x}+e^x)\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}}$ *nhưng ta không rút được biểu thức* $(2e^{2x}+e^x)$ *dưới mẫu số theo* t *được* **.** *Như vậy hướng đi này không khả thi. Nếu* *ta chuyển sang hướng khác bằng cách đặt* $t=e^x$ *thì* $I_6=\int_0^1\frac{e^x dx}{e^x\sqrt{2e^{2x}+2e^x+1}}=\int_1^e\frac{dt}{t\sqrt{2t^2+2t+1}}$ *nếu làm tiếp thì sẽ khá dài và phức tạp. Nhưng chúng ta hãy quan sát kĩ lại biểu thức :* $2e^{2x}+2e^x+1=(1+e^x)^2+e^x$ *giá như nó có dạng* u^2+a^2 .

Điều giá như này gợi ý chúng ta nhân thêm e^{-2x} *:* $e^{-2x}(2e^{2x}+2e^x+1)=2+2e^{-x}+e^{-2x}=(1+e^{-x})^2+1$ *. Và khi đó ta có lời giải bài toán như sau:*

Đặt $t=(1+e^{-x})\Rightarrow dt=-e^{-x}dx$ và cận $t:2\to 1+e^{-1}$

$$\Rightarrow I_6=\int_0^1\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}(2e^{2x}+2e^x+1)}}=\int_0^1\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{(1+e^{-x})^2+1}}=\int_{1+e^{-1}}^2\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\int_{1+e^{-1}}^2\frac{1}{(t+\sqrt{t^2+1})}.\frac{(t+\sqrt{t^2+1})dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\int_{1+e^{-1}}^2\frac{d(t+\sqrt{t^2+1})}{(t+\sqrt{t^2+1})}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_{1+e^{-1}}^2=\ln\frac{(2+\sqrt5)e}{e+1+\sqrt{2e^2+2e+1}}$$

DẠNG 6: $I_6=\int_\alpha^\beta\frac{f(\ln x)}{x}dx$ (6*) (TỔNG QUÁT : $I_6=\int_\alpha^\beta\frac{u'}{u}f(\ln u)dx$)

CÁCH GIẢI CHUNG

(6*) Đặt $\to$
- $t=\ln x$
- $t=a+b\ln x$
- $t=\sqrt[n]{a+b\ln^m x}$
- $t=(a+b\ln^m x)^n$

$\to$ Tích phân cơ bản

CHÚ Ý:

Nếu trong bài có $\log_a u$ *ta nên chuyển về* $\ln u$ *bằng công thức:* $\log_a u=\log_a e.\log_e u=\frac{\ln u}{\ln a}$

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_1^e\frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$ **(B – 2010)**

2) $I_2=\int_1^e\frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$ **(B – 2004)**

3) $I_3=\int_1^e\frac{\log_2^3 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx$

4) $I_4=\int_0^1\frac{\ln\frac{3+x}{3-x}}{9-x^2}dx$

5) $I_5=\int_e^{e^3}\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$

6) $I_6=\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

Giải :

1) $I_1=\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$ **(B – 2010)** Đặt $t=2+\ln x\Rightarrow \begin{cases} dt=\frac{dx}{x} \\ \ln x=t-2 \end{cases}$ và $x:1\to e$ thì $t:2\to 3$

$$\Rightarrow I_1=\int_2^3 \frac{t-2}{t^2}dt=\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\left(\ln t+\frac{2}{t}\right)\Bigg|_2^3=\boxed{-\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}}$$

2) $I_2=\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$ **(B – 2004)**

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow \begin{cases} 2tdt=\frac{3dx}{x} \\ \ln x=\frac{t^2-1}{3}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x}=\frac{2}{3}tdt \\ \ln x=\frac{t^2-1}{3}\end{cases}$ và $x:1\to e$ thì $t:1\to 2$

$$\Rightarrow I_2=\int_1^2 t.\frac{t^2-1}{3}.\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{9}\int_1^2(t^4-t^2)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\boxed{\frac{116}{135}}$$

3) $I_3=\int_1^e \frac{\log_2^3 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln^2 x}\Rightarrow t^2=1+3\ln^2 x\Rightarrow \begin{cases} 2tdt=\frac{6\ln x}{x}dx \\ \ln^2 x=\frac{t^2-1}{3}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \frac{\ln x}{x}dx=\frac{tdt}{3} \\ \ln^2 x=\frac{t^2-1}{3}\end{cases}$ và $x:1\to e$ thì $t:1\to 2$

$$I_3=\int_1^e \frac{(\log_2 e.\ln x)^3}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx=\frac{1}{\ln^3 2}\int_1^e \frac{\ln^2 x}{\sqrt{1+3\ln^2 x}}.\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{\ln^3 2}\int_1^2 \frac{\frac{t^2-1}{3}}{t}.\frac{tdt}{3}$$

$$=\frac{1}{9\ln^3 2}\int_1^2(t^2-1)dt=\frac{1}{9\ln^3 2}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^2=\boxed{\frac{4}{27\ln^3 2}}$$

4) $I_4=\int_0^1 \frac{\ln\frac{3+x}{3-x}}{9-x^2}dx$ Đặt $t=\ln\frac{3+x}{3-x}\Rightarrow dt=\left[\frac{6}{(3-x)^2}:\frac{3+x}{3-x}\right]dx=\frac{6dx}{9-x^2}$ và cận $t:0\to \ln 2$

$$\Rightarrow I_4=\frac{1}{6}\int_0^{\ln 2} tdt=\frac{t^2}{12}\Bigg|_0^{\ln 2}=\boxed{\frac{\ln^2 2}{12}}$$

5) $I_5=\int_e^{e^3}\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$ Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow t^2=1+\ln x\Rightarrow \begin{cases} 2tdt=\frac{dx}{x} \\ \ln x=t^2-1\end{cases}$ và cận $t:\sqrt{2}\to 2$

$$\Rightarrow I_5=\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t}{t^2-1}.2tdt=2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2}{t^2-1}dt=2\int_{\sqrt{2}}^2\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^2=\boxed{4-2\sqrt{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 3}$$

6) $I_6=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$ và $x:1\to\sqrt{e}$ thì $t:0\to\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I_6=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ Đặt với $t=\sin u$ với $u\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\begin{cases}dt=\cos u du\\ \sqrt{1-t^2}=\cos u\end{cases}$ và $t:0\to\frac{1}{2}$ thì $u:0\to\frac{\pi}{6}$

Khi đó $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos u du}{\cos u}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}du=u\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx$ **2)** $I_2=\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ **3)** $I_3=\int_1^{e}\frac{\sqrt{1+\ln^2 x}\ln x}{x}dx$

4) $I_4=\int_1^{e}\frac{\ln x.\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x}dx$ **5)** $I_5=\int_1^{e}\frac{\ln^3 x-2\log_2 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx$ **6)** $I_6=\int_1^{e^2}\frac{2\ln x-1}{x\left(8\ln^2 x-8\ln x+3\right)}dx$

Giải :

1) $I_1=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx$ Đặt $t=\sqrt{1+2\ln x}\Rightarrow t^2=1+2\ln x\Rightarrow\begin{cases}tdt=\frac{dx}{x}\\ 2\ln x=t^2-1\end{cases}$ và cận $t:1\to\sqrt{2}$

$$\Rightarrow I_1=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{3-(t^2-1)}{t}.tdt=\int_1^{\sqrt{2}}\left(4-t^2\right)dt=\left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}-11}{3}$$

2) $I_2=\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$ và cận $t:1\to 2$

$\Rightarrow I_2=\int_1^2\ln tdt$ Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\ dv=dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dt}{t}\\ v=t\end{cases}\Rightarrow I_2=t\ln t\Big|_1^2-\int_1^2 dt=\left(t\ln t-t\right)\Big|_1^2=2\ln 2-1$

3) $I_3=\int_1^{e}\frac{\sqrt{1+\ln^2 x}\ln x}{x}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+\ln^2 x}\Rightarrow t^2=1+\ln^2 x\Rightarrow tdt=\frac{\ln x}{x}dx$ và cận $t:1\to\sqrt{2}$ $\Rightarrow I_3=\int_1^{\sqrt{2}}t.tdt=\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

4) $I_4=\int_1^{e}\frac{\ln x.\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x}dx$

Đặt $t=\sqrt[3]{1+\ln^2 x}\Rightarrow t^3=1+\ln^2 x\Rightarrow 3t^2dt=\frac{2\ln x}{x}dx\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}dx=\frac{3}{2}t^2dt$ và cận $t:1\to\sqrt[3]{2}$

$$\Rightarrow I_4=\int_1^{e}\sqrt[3]{1+\ln^2 x}.\frac{\ln xdx}{x}=\int_1^{\sqrt[3]{2}}t.\frac{3}{2}t^2dt=\frac{3}{2}\int_1^{\sqrt[3]{2}}t^3dt=\frac{3}{8}t^4\Big|_1^{\sqrt[3]{2}}=\frac{6\sqrt[3]{2}-3}{8}$$

5) $I_5=\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x-2\log_2 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln^2 x}\Rightarrow t^2=1+3\ln^2 x\Rightarrow \begin{cases} 2tdt=\dfrac{6\ln x}{x}dx\Rightarrow \dfrac{\ln x}{x}dx=\dfrac{1}{3}tdt\\ \ln^2 x=\dfrac{t^2-1}{3}\end{cases}$ và cận $t:1\to 2$

$$\Rightarrow I_5=\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x-2\log_2 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx=\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x-2\log_2 e.\ln x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx=\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x-2\log_2 e}{\sqrt{1+3\ln^2 x}}.\frac{\ln x}{x}dx=\int\limits_1^2 \frac{\frac{t^2-1}{3}-\frac{2}{\ln 2}}{t}.\frac{1}{3}tdt$$

$$=\frac{1}{9}\int\limits_1^2\left(t^2-1-\frac{6}{\ln 2}\right)dt=\frac{1}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t-\frac{6}{\ln 2}t\right)\Bigg|_1^2=\frac{4}{27}-\frac{2}{3\ln 2}$$

6) $I_6=\int\limits_1^{e^2}\frac{2\ln x-1}{x\left(8\ln^2 x-8\ln x+3\right)}dx=\int\limits_1^{e^2}\frac{2\ln x-1}{x.\left[2\left(2\ln x-1\right)^2+1\right]}dx$

Đặt $t=(2\ln x-1)^2\Rightarrow dt=\frac{4(2\ln x-1)}{x}dx\Leftrightarrow\frac{2\ln x-1}{x}dx=\frac{dt}{4}$ và $x:1\to e^2$ thì $t:1\to 9$

Khi đó $I_6=\frac{1}{4}\int\limits_1^9\frac{dt}{2t+1}=\frac{1}{8}\ln|2t+1|\Big|_1^9=\frac{1}{8}\ln\frac{19}{3}$

DẠNG 7: $I_7=\int\limits_\alpha^\beta \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx$ **(7*1)** hoặc $I_7=\int\limits_\alpha^\beta \frac{f(\cot x)}{\sin^2 x}dx$ **(7*2)**

CÁCH GIẢI CHUNG

(7*1) hoặc **(7*2)** **Đặt** $t=\tan x$ hoặc $t=\cot x$

x	α	β
t	α_0	β_0

$\longrightarrow I_7=\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f(t)dt$: **Tích phân cơ bản**

<u>**CHÚ Ý**</u>:

+) *Khi gặp tích phân* $I=\int\limits_\alpha^\beta\frac{f(\tan x)}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x}dx$ *thì ta phân tích*

$$I=\int\limits_\alpha^\beta\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x(a\tan^2 x+b\tan x+c)}dx \text{ sau đó đặt } t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0}\frac{f(t)}{at^2+bt+c}dx$$ *(tích phân hữu tỉ - các bạn xem lại ở lớp tích phân hữu tỉ)*

+) *Các bạn có thể sử dụng kĩ thuật vi phân nếu biểu thức dưới dấu tích phân "đơn giản" .*

+) *Chú ý cận* $[\alpha;\beta]$ *để biến đổi hợp lý về* **(7*1)** *hoặc* **(7*2)**.

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx$ **(A – 2008)** **2)** $I_2=\int_0^{\pi/4}\frac{\tan^3 x-3}{\sin^2 x-\sin 2x-3\cos^2 x}dx$ **3)** $I_3=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x(2-\sin 2x)}{\cos^3 x}dx$

4) $I_4=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ **5)** $I_5=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$ **6)** $I_6=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\cos^3 x}$

Giải :

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx$ **(A – 2008)** $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos^2 x.(1-\tan^2 x)}dx$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$ và $x:0\to\frac{\pi}{6}$ thì $t:0\to\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{t^4}{1-t^2}dt=-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left[t^2+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt$$

$$=-\left(\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\frac{10\sqrt{3}}{27}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$$

2) $I_2=\int_0^{\pi/4}\frac{\tan^3 x-3}{\sin^2 x-\sin 2x-3\cos^2 x}dx$

Ta có: $I_2=\int_0^{\pi/4}\frac{\tan^3 x-3}{\cos^2 x.(\tan^2 x-2\tan x-3)}dx$. Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$ và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:0\to 1$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^1\frac{t^3-3}{t^2-2t-3}dt=\int_0^1\left(t+2+\frac{7t+3}{t^2-2t-3}\right)dt=\int_0^1\left(t+2+\frac{6(t+1)+t-3}{(t+1)(t-3)}\right)dt=\int_0^1\left(t+2+\frac{6}{t-3}+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+2t+6\ln|t-3|+\ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{2}+7\ln 2-6\ln 3$$

3) $$I_3=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x(2-\sin 2x)}{\cos^3 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}-\frac{2\sin^2 x\cos x}{\cos^3 x}\right)dx=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx-2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan xd(\tan x)-2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=2\left(\frac{\tan^2 x}{2}-\tan x+x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\pi-4$$

4) $I_4=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2dx}{\sin x.\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x.\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}$

$$=-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}{\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\ln\frac{3}{2}$$

5) $I_5=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\left[\sin x\left(1+\cot x\right)\right]^3}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^3 x.(1+\cot x)^3}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x.(1+\cot x)^3}$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\cot x)}{(1+\cot x)^3}=\frac{1}{2(1+\cot x)^2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}$$

(Ta có thể tính I_5 theo Cách 2 như sau : $I_5=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow dt=dx$ và $x:\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:\frac{\pi}{2}\to\frac{3\pi}{4}$. Khi đó:

$$I_5=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3 t}dt=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin t-\cos t}{\sin^3 t}dt=\frac{1}{4}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dt}{\sin^2 t}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{d\sin t}{\sin^3 t}\right)=\frac{1}{4}\left(-\cot t+\frac{1}{2\sin^2 t}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{3}{8}$$)

6) $I_6=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\cos^3 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\tan x.\cos^4 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan x}.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}.\frac{dx}{\cos^2 x}$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$ và $x:\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{3}$ thì $t:1\to\sqrt{3}$

Khi đó $I_6=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1+t^2}{t}.dt=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t}+t\right)dt=\left(\ln|t|+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}=1+\frac{1}{2}\ln 3$

Nhận xét: +) *Ba ý* I_3,I_4,I_5 *do biểu thức dưới dấu tích phân đơn giản, nên ta đã sử dụng kĩ thuật vi phân.*

+) *Ở tích phân* I_5 *nếu đổi lại đề (đổi lại cận)* $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$ *thì cách làm đầu tiên bằng việc biến đổi* $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin xdx}{\left[\sin x\left(1+\cot x\right)\right]^3}$ *sẽ không chính xác vì* $\sin x=0$ *tại* $x=0$*. Lúc này ta biến đổi theo* $\cos x$ *như sau* $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin xdx}{\left[\cos x\left(\tan+1\right)\right]^3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin xdx}{\cos^3 x\left(\tan+1\right)^3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan xdx}{\cos^2 x\left(\tan+1\right)^3}\ldots$

Nếu tiếp tục đổi lại cận $I_5=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}$ *thì cách biến đổi theo* $\cos x$ *khi đó cũng không chính xác.*

Song Cách 2 vẫn phát huy tác dụng . Ngoài ra ta còn cách giải khác (sẽ được nói kĩ hơn ở các lớp tích phân đặc biệt).

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{(2-\tan^2 x)^3.\cos^5 x}dx$ **2)** $I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos x.\sqrt{1+2\cos^2 x}}dx$ **3)** $I_3=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{5\sin x\cos^2 x+2\cos x}dx$

Giải : 1) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{(2-\tan^2 x)^3.\cos^5 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^3 x}{(2-\tan^2 x)^3.\cos^2 x}dx$

Đặt $t=2-\tan^2 x\Rightarrow dt=-\frac{2\tan x}{\cos^2 x}dx\Leftrightarrow\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx=-\frac{dt}{2}$ và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:2\to 1$. Khi đó:

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x}{(2-\tan^2 x)^3}.\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx=\int\limits_1^2\frac{2-t}{t^3}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\left(\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{8}$$

2) $I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos x.\sqrt{1+2\cos^2 x}}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos x.\sqrt{\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\right)}}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos^2 x.\sqrt{3+\tan^2 x}}dx$

Đặt $t=\sqrt{3+\tan^2 x}\Rightarrow t^2=3+\tan^2 x\Rightarrow tdt=\frac{\tan t}{\cos^2 t}dt$ và $x:\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{3}$ thì $t:2\to\sqrt{6}$.

Khi đó: $I_2=\int\limits_2^{\sqrt{6}}\frac{tdt}{t}=\int\limits_2^{\sqrt{6}}dt=t\Big|_2^{\sqrt{6}}=\sqrt{6}-2$

3) $I_3=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{5\sin x\cos^2 x+2\cos x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin^3 x\left(5\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+2\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\sin^2 x}\right)}dx$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x\left[5\cot^2 x+2\cot x\left(1+\cot^2 x\right)\right]}=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x\left(2\cot^3 x+5\cot^2 x+2\cot x\right)}$$

Đặt $t=\cot x\Rightarrow dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}$ và $x:\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:\sqrt{3}\to 1$. Khi đó : $I_3=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{2t^3+5t^2+2t}$

Ta phân tích $\frac{1}{2t^3+5t^2+2t}=\frac{1}{t(t+2)(2t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{2t+1}\Leftrightarrow 1=A(t+2)(2t+1)+Bt(2t+1)+Ct(t+2)$

Lần lượt chọn x bằng $0;-2;-\frac{1}{2}$ ta được: $A=\frac{1}{2}$; $B=\frac{1}{6}$ và $C=-\frac{4}{3}$, suy ra:

$$I_3=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2t}+\frac{1}{6(t+2)}-\frac{4}{3(2t+1)}\right]dt=\left(\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{6}\ln|t+2|-\frac{2}{3}\ln|2t+1|\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=\frac{3}{4}\ln 3+\frac{1}{6}\ln(\sqrt{3}+2)-\frac{2}{3}\ln(2\sqrt{3}+1)$$

Bài luyện

Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x\left(\sin x-\cos x\right)}$ (Đs: $\ln\frac{3-\sqrt{3}}{3}$)

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ (Đs: $\sqrt{2}\ln 2$)

3) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^3}dx$ (Đs: $\frac{3}{32}$)

4) $I_4=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ (Đs: $\frac{42\sqrt{3}-8}{15}$)

DẠNG 8: $I_8=\int_\alpha^\beta\frac{kg(x)+f\left(g(x)\right).g'(x)}{g(x)}dx$ **(8*)**

CÁCH GIẢI CHUNG

(8*) $I_8=\int_\alpha^\beta k\,dx+\int_\alpha^\beta\frac{f\left(g(x)\right)}{g(x)}g'(x)dx$
$=A+I$

$\to I=\int_\alpha^\beta\frac{f\left(g(x)\right)}{g(x)}g'(x)dx$ $\xrightarrow{\text{Đặt } t=g(x)}$ $I=\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\frac{f(t)}{t}dt$

x	α	β
t	α_0	β_0

$\to A=\int_\alpha^\beta k\,dx$ — $I_8=A+I$: **Tích phân cơ bản**

Trong bài thường $k\in\left\{0;\pm1;\pm2;x;x^2...\right\}$

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$ **(B – 2003)** **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x.\cos x}{1+\cos x}dx$ **(B – 2005)**

3) $I_3=\int_0^1\frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$ **(A – 2010)** **4)** $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$ **(A – 2011)**

Giải :

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$ **(B – 2003)** Ta có: $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx$ Đặt $t=1+\sin 2x$

$\Rightarrow dt=2\cos 2xdx\Leftrightarrow\cos 2xdx=\frac{dt}{2}$ và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:1\to 2$ $\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln 2$

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x.\cos x}{1+\cos x}dx$ **(B – 2005)** Ta có: $I_2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x.\sin x}{1+\cos x}dx$

Đặt $t=1+\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:2\to 1$

$$\Rightarrow I_2=2\int_2^1\frac{(t-1)^2}{t}.(-dt)=2\int_1^2\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=2\left(\frac{t^2}{2}-2t+\ln|t|\right)\Big|_1^2=-1+2\ln 2$$

3) $I_3=\int_0^1\frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$ **(A – 2010)** Có : $I_3=\int_0^1\frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1\frac{e^xdx}{1+2e^x}=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+I=\frac{1}{3}+I$

Tính $I=\int_0^1\frac{e^xdx}{1+2e^x}$ Đặt $t=1+2e^x\Rightarrow dt=2e^xdx\Leftrightarrow e^xdx=\frac{dt}{2}$ và $x:0\to 1$ thì $t:3\to 1+2e$

Khi đó: $I=\frac{1}{2}\int_3^{1+2e}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_3^{1+2e}=\frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$ $\Rightarrow I_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$

4) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$ **(A – 2011)**

+) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(x\sin x+\cos x)+x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+I=x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+I=\frac{\pi}{4}+I$

+) Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$ Đặt $t=x\sin x+\cos x\Rightarrow dt=x\cos xdx$ và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:1\to\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$

$$\Rightarrow I=\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)}=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right)\Rightarrow I_4=\frac{\pi}{4}+\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right)$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_1^e\frac{x+1+(x^2+1)\ln x}{1+x\ln x}dx$ **2)** $I_2=\int_1^e\frac{2x^3+1+\left(x^4+1\right)\ln x}{2+x\ln x}dx$

Giải : **1)** $I_1=\int_1^e\frac{x+1+(x^2+1)\ln x}{1+x\ln x}dx=\int_1^e\frac{x(1+x\ln x)+1+\ln x}{1+x\ln x}dx=\int_1^e\left(x+\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx=\int_1^e xdx+I$ (*)

+) $\int_1^e xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2-1}{2}$ (1) +) $I=\int_1^e\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx=\int_1^e\frac{d(1+x\ln x)}{1+x\ln x}=\ln|1+x\ln x|\Big|_1^e=\ln(e+1)$ (2)

Thay (1), (2) vào (*) $\Rightarrow I_1=\frac{e^2-1}{2}+\ln(e+1)$

2) $I_2=\int_1^e\frac{2x^3+1+\left(x^4+1\right)\ln x}{2+x\ln x}dx=\int_1^e\frac{x^3(2+x\ln x)+1+\ln x}{2+x\ln x}dx=\int_1^e\left(x^3+\frac{1+\ln x}{2+x\ln x}\right)dx$

$$=\int_1^e x^3dx+\int_1^e\frac{d(2+x\ln x)}{2+x\ln x}=\left(\frac{x^4}{4}+\ln|2+x\ln x|\right)\Big|_1^e=\frac{e^2-1}{4}+\ln\frac{e+2}{2}$$

CHÚ Ý: *Nếu biểu thức dưới dấu tích phân đơn giản, các em có thể bỏ qua bước đổi biến bằng kĩ thuật vi phân. Ở I_1 và I_2 ta đã sử dụng :* $I=\int_\alpha^\beta \frac{u'}{u}dx=\int_\alpha^\beta \frac{du}{u}=\ln|u|\Big|_\alpha^\beta=?$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(x+1)\sin 2x+x\sin x}{1+2\cos x}dx$ **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x+2\sin x.(\cos x+2x\sin x)}{1+\sin x\sin 3x}dx$

<u>Giải</u> :

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(x+1)\sin 2x+x\sin x}{1+2\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x.(1+2\cos x)+\sin 2x}{1+2\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin xdx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{1+2\cos x}dx=A+B$ (*)

+) Tính $A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin xdx$ Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\sin xdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=-\cos x\end{cases}$

Khi đó $A=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos xdx=-\frac{\pi}{6}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$ (1)

+) Tính $B=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{1+2\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x\cos x}{1+2\cos x}dx$

Đặt $t=1+2\cos x\Rightarrow dt=-2\sin xdx\Leftrightarrow \sin xdx=-\frac{dt}{2}$ và cận $x:0\to\frac{\pi}{3}$ thì $t:3\to 2$

Khi đó $B=\int_2^3\frac{t-1}{t}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_2^3\left(1-\frac{1}{t}\right).dt=\frac{1}{2}\left(t-\ln|t|\right)\Big|_2^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ (2)

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_1=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x+2\sin x.(\cos x+2x\sin x)}{1+\sin x\sin 3x}dx$ Ta có:

$$\begin{cases}x+2\sin x.(\cos x+2x\sin x)=x.(4\sin^2 x+1)+\sin 2x\\ 1+\sin x\sin 3x=1-\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos 2x\right)=\frac{1-\cos 4x+1+\cos 2x}{2}=\frac{\sin^2 2x+\cos^2 x}{4}=\frac{(4\sin^2 x+1)\cos^2 x}{4}\end{cases}$$

Khi đó $I_2=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x.(4\sin^2 x+1)+\sin 2x}{(4\sin^2 x+1)\cos^2 x}dx=4\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{(4\sin^2 x+1)\cos^2 x}dx\right)=4\left(A+B\right)$ (*)

+) Tính $A=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$ Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\tan x\end{cases}$

Khi đó $A=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\cos x}{\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$ (1)

+) Tính $B=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{(4\sin^2 x+1)\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\frac{4\sin^2 x+1}{\cos^2 x}.\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\left(1+5\tan^2 x\right)}d\tan x$

$$=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(1+5\tan^2 x\right)}{\left(1+5\tan^2 x\right)}=\frac{1}{5}\ln\left|1+5\tan^2 x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{5}\ln 2 \qquad (2)$$

Thay (1) và (2) vào (*) ta được: $I_2=4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2+\frac{4}{5}\ln 2\right)=\boxed{\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{4}{5}\ln 2}$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+\sin^2 x-\sin x}{x+\cos x}dx$ **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+\sin^2 x-3\cos^2 x-2\sin x}{x+2\cos x}dx$

3) $I_3=\int_1^{e}\frac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx$ **4)** $I_4=\int_1^{e}\frac{2x^2+(1+2\ln x)x+\ln^2 x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}dx$

Giải :

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+\sin^2 x-\sin x}{x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\cos^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x}{x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+\cos x)(x-\cos x)+1-\sin x}{x+\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(x+\cos x)}{x+\cos x}$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\sin x+\ln\left|x+\cos x\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi^2}{8}-1+\ln\frac{\pi}{2}}$$

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+\sin^2 x-3\cos^2 x-2\sin x}{x+2\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-4\cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x}{x+2\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x-2\cos x)(x+2\cos x)+1-2\sin x}{x+2\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-2\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\sin x}{x+2\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-2\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(x+2\cos x)}{x+2\cos x}$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-2\sin x+\ln\left|x+2\cos x\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi^2}{8}-2+\ln\frac{\pi}{4}}$$

3) $I_3=\int_1^e \frac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx=\int_1^e\frac{(x+x^2\ln x)+1-x}{x+x^2\ln x}dx=\int_1^e\left(1+\frac{1-x}{x+x^2\ln x}\right)dx$

$$=\int_1^e\left(1+\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)dx=\int_1^e dx-\int_1^e\frac{d\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)}{\frac{1}{x}+\ln x}=\left.\left(x-\ln\left|\frac{1}{x}+\ln x\right|\right)\right|_1^e=e-\ln(e+1)$$

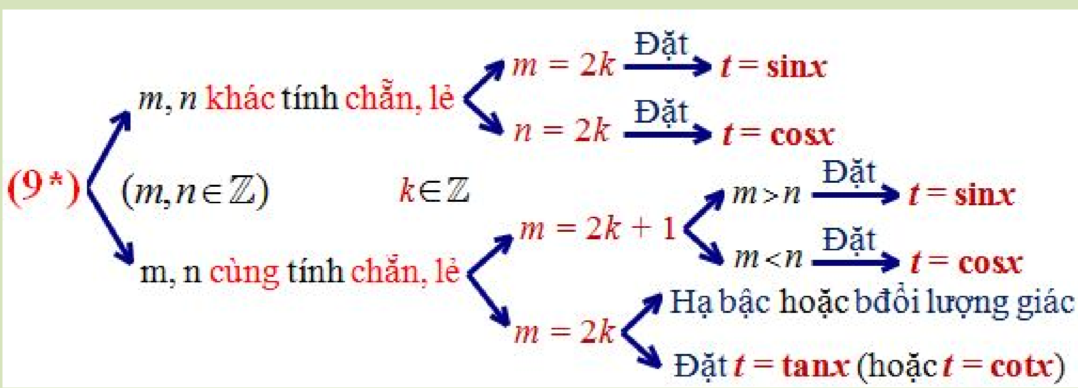
4) $I_4=\int_1^e\frac{2x^2+(1+2\ln x)x+\ln^2x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}dx=\int_1^e\frac{\left(x^2+2x\ln x+\ln^2x\right)+x^2+x}{x^2.\left(x+\ln x\right)^2}dx=\int_1^e\frac{\left(x+\ln x\right)^2+x.(x+1)}{x^2.\left(x+\ln x\right)^2}dx$

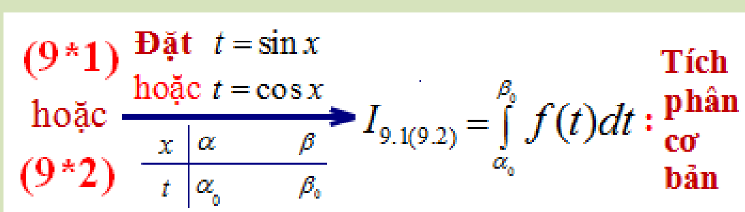
$$=\int_1^e\left[\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}\right]dx=\int_1^e\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(x+\ln x\right)^2}\right]dx=\int_1^e\frac{dx}{x^2}+\int_1^e\frac{d\left(x+\ln x\right)}{\left(x+\ln x\right)^2}=-\left.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\ln x}\right)\right|_1^e=\frac{2e^2-1}{e^2+e}$$

DẠNG 9: $I_9=\int_\alpha^\beta \sin^m x.\cos^n xdx$ **(9*)** $(m,n\in\mathbb{Z})$

hoặc $I_{9.1}=\int_\alpha^\beta f(\sin x).\cos xdx$ **(9*1)** ; $I_{9.2}=\int_\alpha^\beta f(\cos x).\sin xdx$ **(9*2)**

CÁCH GIẢI CHUNG





CHÚ Ý:

+) Các em xem thêm **DẠNG 7** *cho đầy đủ các trường hợp.*

+) Nếu biểu thức dưới dấu tích phân đơn giản, các em có thể bỏ qua bước đổi biến bằng kĩ thuật vi phân.

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3x-1)\cos^2xdx$ **(A – 2009)** **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^32x\cos^4xdx$ **3)** $I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2x\cos^4x}$

4) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin2x.(\sin^3x\sin3x+\cos^3x\cos3x)dx$ **5)** $I_5=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3x}{\sin^2x}dx$

Giải :

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3x-1)\cos^2xdx$ **(A – 2009)** Ta có : $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx=A-B$

+) Tính $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

+) Tính $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5xdx$ (ở đây $m=0;n=5$) Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:0\to1$

Khi đó : $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2x)^2\cos xdx=\int_0^1(1-t^2)^2dt=\int_0^1(t^4-2t^2+1)dt=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3+t\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}$

$$\Rightarrow I_1=\boxed{\frac{8}{15}-\frac{\pi}{4}}$$

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^32x\cos^4xdx=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\cos^7xdx$ (ở đây $m=3;n=7$)

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:0\to1$

Khi đó $I_2=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2x)\cos^7x\sin xdx=8\int_1^0(1-t^2)t^7.(-dt)=8\int_0^1(t^7-t^9)dt=8\left(\frac{t^8}{8}-\frac{t^{10}}{10}\right)\Big|_0^1=\boxed{\frac{1}{5}}$

3) $I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2x\cos^4x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin^2x+\cos^2x)}{\sin^2x\cos^4x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^4x}+\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2x}.\frac{dx}{\cos^2x}+4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^22x}$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\tan^2x\right).d(\tan x)+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(2x)}{\sin^22x}=\left(\tan x+\frac{\tan^3x}{3}-2\cot(2x)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\boxed{\frac{8\sqrt{3}-4}{3}}$$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x.(\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x)dx$

Ta có: $\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \sin x(1-\cos^2 x)\sin 3x + \cos x(1-\sin^2 x)\cos 3x$

$= (\sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x) - \sin x \cos x(\cos x \sin 3x + \sin x \cos 3x)$

$= \cos 2x - \sin x \cos x.\sin 4x$ (*áp dụng công thức hiệu của cos và tổng của sin*)

$= \cos 2x - 2\sin x \cos x.\sin 2x \cos 2x = \cos 2x - \sin^2 2x \cos 2x$

$= \cos 2x - \sin^2 2x \cos 2x = \cos 2x(1-\sin^2 2x) = \cos^3 2x$

Khi đó: $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos^3 2x dx$

Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2\sin 2x dx$ và cận $t: 1 \to 0$ $\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 t^3 dt = \left.\frac{t^4}{8}\right|_0^1 = \frac{1}{8}$

(Trong trường hợp này các em có thể sử lý nhanh bằng kĩ thuật vi phân

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos^3 2x dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2x d(\cos 2x) = -\left.\frac{\cos^4 2x}{8}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}$$)

<u>Nhận xét</u> :

Nếu biểu thức dưới dấu tích phân đơn giản, các bạn có thể bỏ qua bước đổi biến bằng kĩ thuật vi phân.

5) $I_5 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$ Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ và $x: \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{2}$ thì $t: \frac{1}{2} \to 1$

Khi đó $I_5 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cos x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\cos x dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt = \left.\left(-\frac{1}{t}-t\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ **2)** $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x + \cos 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$ **3)** $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx$ **(B – 2003)**

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x} dx$ **(B – 2005)** **5)** $I_5 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} dx$ **6)** $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}} dx$

7) $I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x + 4\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$ **8)** $I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x dx}{1+\cos^2 x}$ **9)** $I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 2x} dx$

<u>Giải</u> :

1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt$ và cận $t: 1 \to 0$

$$\Rightarrow I_1 = -\int_1^0 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$ Đặt $t = \tan u \Rightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{du}{\cos^2 u} = (1+\tan^2 u)du \\ 1+t^2 = 1+\tan^2 u \end{cases}$ và cận $u: 0 \to \dfrac{\pi}{4}$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 u)du}{1+\tan^2 u} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du = u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x + \cos 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x}dx$ Ta có: $\begin{cases} \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x \\ \sin 4x + \cos 2x = (2\sin 2x + 1)\cos 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\sin 2x+1)\cos 2x}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\sin 2x+1)\cos 2x}{4-3\sin^2 2x}dx$$ Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2x dx$ và $t: 0 \to 1$

$$I_2 = 2\int_0^1 \frac{2t+1}{4-3t^2}dt = -\int_0^1 \frac{\frac{2}{3}.6t+2}{3t^2-4}dt = -\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{6tdt}{3t^2-4} - 2\int_0^1 \frac{dt}{3t^2-4} = -\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{d(3t^2-4)}{3t^2-4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\sqrt{3}t+2)-(\sqrt{3}t-2)}{(\sqrt{3}t-2)(\sqrt{3}t+2)}dt$$

$$= -\frac{2}{3}\ln|3t^2-4|\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}t-2} - \frac{1}{\sqrt{3}t+2}\right)dt = \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}t-2}{\sqrt{3}t+2}\right|\Bigg|_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}\ln 2 - \ln\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

3) $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$ **(B – 2003)** Ta có: $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx$

Cách 1 : Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2x dx \Leftrightarrow \cos 2x dx = \dfrac{dt}{2}$ và $x: 0 \to \dfrac{\pi}{4}$ thì $t: 0 \to 1$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\ln|1+t|\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$$

Cách 2 : (Theo góc nhìn của **DẠNG 8**)

Đặt $t = 1+\sin 2x$ và $x: 0 \to \dfrac{\pi}{4}$ thì $t: 1 \to 2$ $\Rightarrow I_3 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2 = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$

4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x}dx$ **(B – 2005)** Ta có: $I_4 = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x}.\sin x dx$

Cách 1 : Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ và $x: 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ thì $t: 1 \to 0$

$$\Rightarrow I_4 = 2\int_1^0 \frac{t^2}{1+t}.(-dt) = 2\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1 = \boxed{-1+2\ln 2}$$

Cách 2 : (Theo góc nhìn của **DẠNG 8**)

Đặt $t = 1+\cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ và $x: 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ thì $t: 2 \to 1$

$$\Rightarrow I_4 = 2\int_2^1 \frac{(t-1)^2}{t}.(-dt) = 2\int_1^2\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t|\right)\Bigg|_1^2 = \boxed{-1+2\ln 2}$$

5) $I_5=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2\sin x}{(2+\sin x)^2}\cos xdx$

Đặt $t=2+\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $x:-\frac{\pi}{2}\to 0$ thì $t:1\to 2$

Khi đó $I_5=\int_1^2\frac{2(t-2)}{t^2}dt=\int_1^2\left(\frac{2}{t}-\frac{4}{t^2}\right)dt=\left(2\ln|t|+\frac{4}{t}\right)\Big|_1^2=2\ln 2-2$

6) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}dx$

+) Ta có: $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{(1-2\sin^2 x)\sqrt{1-2\sin^2 x}}dx$

+) Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $t:0\to\frac{1}{2}$ $\Rightarrow I_6=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-2t^2)\sqrt{1-2t^2}}$ (*)

+) Ta sẽ đi tính nguyên hàm $I=\int\frac{dt}{(1-2t^2)\sqrt{1-2t^2}}$

Đặt $t=\frac{1}{u}\Rightarrow dt=-\frac{du}{u^2}$ $\Rightarrow I=-\int\frac{du}{u^2\left(1-\frac{2}{u^2}\right)\sqrt{1-\frac{2}{u^2}}}=-\int\frac{udu}{(u^2-2)\sqrt{u^2-2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(u^2-2)}{(u^2-2)\sqrt{u^2-2}}$

$$=-\frac{1}{2}\int(u^2-2)^{-\frac{3}{2}}d(u^2-2)=\frac{1}{\sqrt{u^2-2}}+C=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-2}}+C=\frac{t}{\sqrt{1-2t^2}}+C$$

$$\Rightarrow I_6=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-2t^2)\sqrt{1-2t^2}}=\frac{t}{\sqrt{1-2t^2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

CHÚ Ý : Dạng tổng quát của (*) là $I=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}}$ và ta giải bằng cách đặt $x=\frac{1}{t}$.

7) $I_7=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x+4\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx=3A+4B$ (1)

*) Tính $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3(1-\cos^2 x)+4\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3+\cos^2 x}dx$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:1\to 0$

Khi đó $A=\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}$ Đặt $t=\sqrt{3}\tan u\Rightarrow\begin{cases}dt=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}du=\sqrt{3}\left(1+\tan^2 u\right)du\\ 3+t^2=3\left(1+\tan^2 u\right)\end{cases}$ và $t:0\to 1$ thì $u:0\to\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow A=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\left(1+\tan^2u\right)du}{3\left(1+\tan^2u\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}du=\frac{\sqrt{3}}{3}u\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\quad (2)$$

(Việc tính $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3+\cos^2x}dx$ các em có thể đặt $\cos x=\sqrt{3}\tan u$, thực chất là việc gộp 2 cách đặt trên)

*) Tính $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3\sin^2x+4(1-\sin^2x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{4-\sin^2x}dx$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:0\to 1$

Khi đó $B=\int_0^1\frac{dt}{4-t^2}=-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{(t+2)-(t-2)}{(t-2)(t+2)}dt=-\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 3\quad (3)$

Thay (2), (3) vào (1) ta được: $I_7=3A+4B=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+\ln 3$

8) $I_8=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4xdx}{1+\cos^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin 2x\cos 2xdx}{1+\frac{1+\cos 2x}{2}}=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\cos 2x}{3+\cos 2x}dx$

Cách 1 : Đặt $t=\cos 2x\Rightarrow dt=-2\sin 2xdx\Leftrightarrow \sin 2xdx=-\frac{1}{2}dt$ và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:1\to 0$

$$\Rightarrow I_8=4\int_1^0\frac{t}{3+t}.\left(-\frac{1}{2}dt\right)=2\int_0^1\frac{t}{t+3}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt=2\left(t-3\ln|t+3|\right)\Big|_0^1=2-6\ln\frac{4}{3}$$

Cách 2 : (Theo góc nhìn của **DẠNG 8**) Đặt $t=3+\cos 2x\Rightarrow dt=-2\sin 2xdx\Leftrightarrow \sin 2xdx=-\frac{1}{2}dt$

và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:4\to 3$ $\Rightarrow I_8=4\int_4^3\frac{t-3}{t}.\left(-\frac{1}{2}dt\right)=2\int_3^4\left(1-\frac{3}{t}\right)dt=2\left(t-3\ln|t|\right)\Big|_3^4=2-6\ln\frac{4}{3}$

9) $I_9=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3x\cos x}{1+\cos^22x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x.\sin x\cos x}{1+\cos^22x}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos 2x).\sin 2x}{1+\cos^22x}dx$

Đặt $t=\cos 2x\Rightarrow dt=-2\sin 2xdx\Leftrightarrow \sin 2xdx=-\frac{dt}{2}$ và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:1\to -1$

Khi đó $I_9=\frac{1}{4}\int_{-1}^1\frac{1-t}{1+t^2}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{8}\int_{-1}^1\frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{8}\int_{-1}^1\frac{tdt}{1+t^2}=\frac{1}{8}(A-B)$ (*)

+) Tính $A=\int_{-1}^1\frac{dt}{1+t^2}$ Đặt $t=\tan u\Rightarrow dt=\frac{dt}{\cos^2u}=(1+\tan^2u)du$ và $t:-1\to 1$ thì $u:-\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{4}$

$A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2u)du}{1+\tan^2u}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}du=u\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$ (1) +) Tính $B=\int_{-1}^1\frac{tdt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\Big|_{-1}^1=0$ (2)

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_9=\frac{\pi}{16}$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(x+2\cos x)\sin x}{\cos^2 x}dx$ **2)** $I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+2\sin x-3)\cos x}{\sin^3 x}dx$

<u>Giải</u> :

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(x+2\cos x)\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos x}{\cos x}=A-2B$ (*)

+) Tính $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$ Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\end{cases}$

Suy ra $A=\frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)}$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)d\sin x=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\ln(2+\sqrt{2})+\frac{1}{2}\ln 2 \quad (1)$$

+) Tính $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$ (2) . Thay (1), (2) vào (*) : $I_1=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\ln(2+\sqrt{2})+\frac{3}{2}\ln 2$

2) $I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+2\sin x-3)\cos x}{\sin^3 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin x-3)\cos x}{\sin^3 x}dx=A+B$ (*)

+) Tính $A=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$ Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}=-\frac{1}{2\sin^2 x}\end{cases}$

Suy ra $A=-\frac{x}{2\sin^2 x}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x}=0-\frac{1}{2}\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$ (1)

+) Tính $B=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin x-3)\cos x}{\sin^3 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{3}{\sin^3 x}\right)d\sin x=\left(-\frac{2}{\sin x}+\frac{3}{2\sin^2 x}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}-2$ (2)

Thay (1) và (2) vào (*) ta được: $I_2=2\sqrt{2}-\frac{3}{2}$

Bài luyện

Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^4 xdx$ ($\frac{8}{315}$) **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$ ($\frac{9}{4}$)

3) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^4 xdx$ ($\frac{\pi}{64}+\frac{1}{48}$) **4)** $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}dx$ ($\ln\frac{4}{3}$) **5)** $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)^3.\sin 2xdx$ ($\frac{15}{4}$)

DẠNG 10 : $I_{10}=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\sin x\pm\cos x,\sin x\cos x)(\cos x\mp\sin x)dx$ (10*)

CÁCH GIẢI CHUNG

$$(10^*)\xrightarrow{\text{Đặt}} t=\sin x\pm\cos x\Rightarrow\begin{cases}dt=(\cos x\mp\sin x)dx\\ \sin x\cos x=\pm\dfrac{t^2-1}{2}\end{cases}\xrightarrow{\begin{array}{c|cc}x&\alpha&\beta\\\hline t&\alpha_0&\beta_0\end{array}} I_{10}=\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f(t)dt:$$ **Tích phân cơ bản**

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{3\cos 2x-\sin 4x}{2-\sin x-\cos x}dx$ 2) $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}dx$ **(B – 2008)**

Giải :

1) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{3\cos 2x-\sin 4x}{2-\sin x-\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{(3-2\sin 2x)\cos 2x}{2-\sin x-\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{(3-2\sin 2x)(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{2-(\sin x+\cos x)}dx$

Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow\begin{cases}dt=(\cos x-\sin x)dx\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$ và $x:0\to\dfrac{\pi}{4}$ thì $t:1\to\sqrt{2}$

$$\Rightarrow I_1=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{[3-2(t^2-1)].t}{2-t}dt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{2t^3-5t}{t-2}dt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(2t^2+4t+3+\frac{6}{t-2}\right)dt$$

$$=\left.\left(\frac{2}{3}t^3+2t^2+3t+6\ln|t-2|\right)\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{13\sqrt{2}-5}{3}+6\ln(2-\sqrt{2})$$

2) $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}dx$ **(B – 2008)**

Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow\begin{cases}dt=(\cos x-\sin x)dx=-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)dx\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$ và $x:0\to\dfrac{\pi}{4}$ thì $t:1\to\sqrt{2}$

$$\Rightarrow I_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2-1+2(1+t)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{(t+1)^2}=\left.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{t+1}\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}dx$ **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4(\sin x+\cos x)-\cos 2x}{2(\sin x-\cos x-1)-\sin 2x}dx$

<u>Giải</u> :

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}\Rightarrow t^2=1+\sin x-\cos x\Rightarrow\begin{cases}\sin x-\cos x=t^2-1\\(\cos x+\sin x)dx=2tdt\end{cases}$ và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:0\to 1$

$\Rightarrow I_1=\int_0^1\frac{-(t^2-1)}{2-t}.2tdt=2\int_0^1\frac{t^3-t}{t-2}dt=2\int_0^1\left(t^2+2t+3+\frac{6}{t-2}\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}+t^2+3t+6\ln|t-2|\right)\Big|_0^1=\frac{26}{3}-12\ln 2$

<u>CHÚ Ý</u> : *Việc đặt* $t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}$ *ở* I_1 *là ta đã gộp 2 công đoạn đặt* $t=\sin x-\cos x$ *và* $u=\sqrt{1+t}$

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4(\sin x+\cos x)-\cos 2x}{2(\sin x-\cos x-1)-\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)\left[1-(\sin x-\cos x)\right]}{2(\sin x-\cos x-1)-\sin 2x}dx$

Đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow\begin{cases}dt=(\sin x+\cos x)dx\\\sin 2x=\frac{1-t^2}{2}\end{cases}$ và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:-1\to 0$

Suy ra $I_2=\int_{-1}^0\frac{4-t}{2(t-1)-\frac{1-t^2}{2}}dt=\int_{-1}^0\frac{8-2t}{t^2+4t-5}dt=\int_{-1}^0\frac{12-(2t+4)}{t^2+4t-5}dt=\int_{-1}^0\frac{12}{(t-1)(t+5)}dt-\int_{-1}^0\frac{2t+4}{t^2+4t-5}dt$

$=2\int_{-1}^0\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+5}\right)dt-\int_{-1}^0\frac{d(t^2+4t-5)}{t^2+4t-5}=\left(2\ln\left|\frac{t-1}{t+5}\right|-\ln\left|t^2+4t-5\right|\right)\Big|_{-1}^0=5\ln 2-3\ln 5$

(Các em có thể phân tích $\frac{8-2t}{t^2+4t-5}=\frac{8-2t}{(t-1)(t+5)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+5}\Leftrightarrow 8-2t=A(t+5)+B(t-1)$

Chọn t lần lượt bằng $1;-5$ ta được $\begin{cases}A=1\\B=-3\end{cases}$ hay $\frac{8-2t}{t^2+4t-5}=\frac{1}{t-1}-\frac{3}{t+5}$)

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$ **2)** $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}dx$

<u>Giải</u> : 1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2.\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}}dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{\sin x+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$ (các em có thể đặt $t=\sin x+\cos x$)

2) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}dx$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}dx\right)=\frac{1}{2}(A+B)$$

+) $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}}$

+) $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$

Ta sẽ chỉ ra $B=0$ theo các cách sau :

Cách 1 : Đặt $t=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow dt=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx\Leftrightarrow\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{dt}{2}$

và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:\frac{\sqrt{2}}{2}\to\frac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra $B=0$ (vì $t:\frac{\sqrt{2}}{2}\to\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Cách 2 : Đặt $t=\frac{\pi}{4}-x\Rightarrow dt=-dt$ và $t:\frac{\pi}{4}\to 0$, suy ra

$$B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2t\right)}{\sqrt{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}+\cos 2t+\sin 2t}dt=-B\Rightarrow B=-B\Leftrightarrow B=0$$

Cách 3 : $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x)}{\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}+\sin 2x+\cos 2x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=0$$

Khi đó $I_2=\frac{1}{2}.\frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

(Do $1=\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}\Leftrightarrow\tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0\Leftrightarrow\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ vì $\tan\frac{\pi}{8}>0$)

V. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

Ở phần ứng dụng tích phân chúng ta sẽ đi giải quyết hai bài toán về tính diện tích hình phẳng và tính thể tích khối tròn xoay . Để làm tốt được điều này các em cần làm được 2 việc:

CÔNG VIỆC 1 : Biết cách tính tích phân chứa trị tuyệt đối .

CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Nếu dưới dấu tích phân có dấu trị tuyệt đối $I=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$ thì tìm cách phá trị tuyệt đối bằng cách đi xét dấu của $f(x)$ trong đoạn $[\alpha;\beta]$. Cụ thể:

B1: Giải phương trình $f(x)=0 \Rightarrow x_i=?$ và chọn các $x_i\in[\alpha;\beta]$ rồi chuyển sang:

B2: Lập bảng xét dấu: (Giả sử ta bảng xét dấu: $\alpha \quad + \quad x_i \quad - \quad \beta$)

B3: Ta dựa vào công thức $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$ $(\alpha<\gamma<\beta)$ để tách :

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx=\int_{\alpha}^{x_i}|f(x)|dx+\int_{x_i}^{\beta}|f(x)|dx=\int_{\alpha}^{x_i} f(x)dx-\int_{x_i}^{\beta} f(x)dx.$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_0^2|x^2-x|dx$ **(D – 2003)**

2) $I_2=\int_{-2}^{1}\left(|x+1|-|x|\right)dx$

3) $I_3=\int_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx$

4) $I_4=\int_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)dx$

5) $I_5=\int_{-1}^{1}\frac{|x|\,dx}{x^4-x^2-12}$

6) $I_6=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-|x|}dx$

7) $I_7=\int_0^1\sqrt{4x^2-4x+1}dx$

8) $I_8=\int_0^3\sqrt{x^3-2x^2+x}dx$

9) $I_9=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$

10) $I_{10}=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

11) $I_{11}=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$

12) $I_{12}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}dx$

13) $I_{13}=\int_{-2}^{2}\left|2x-|x+1|\right|dx$

Giải:

1) $I_1=\int_0^2|x^2-x|dx$ **(D – 2003)** Ta xét dấu $f(x)=x^2-x$ trên $[0;2]$: $0 \quad - \quad 1 \quad + \quad 2$

(Để xét dấu của $f(x)$ trước đó các em tìm nghiệm phương trình $f(x)=0$ ra nháp được $x=0$ và $x=1$)

$$\Rightarrow I_1=\int_0^2|x^2-x|dx=\int_0^1|x^2-x|dx+\int_1^2|x^2-x|dx=-\int_0^1\left(x^2-x\right)dx+\int_1^2\left(x^2-x\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=1$$

2) $I_2=\int_{-2}^{1}\left(|x+1|-|x|\right)dx$ Ta sẽ mượn bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-2		-1		0		1
$\|x+1\|$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$\|x\|$		$-x$		$-x$	0	x	
$\|x+1\|-\|x\|$		-1		$2x+1$		1	

$$\Rightarrow I_2=\int_{-2}^{-1}\left(|x+1|-|x|\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(|x+1|-|x|\right)dx+\int_{0}^{1}\left(|x+1|-|x|\right)dx$$

$$=-\int_{-2}^{-1}dx+\int_{-1}^{0}(2x+1)dx+\int_{0}^{1}dx=-x\Big|_{-2}^{-1}+(x^2+x)\Big|_{-1}^{0}+x\Big|_{0}^{1}=0$$

3) $I_3=\int_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx$ Ta sẽ mượn bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3		-2		2		5
$\|x+2\|$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$	
$\|x-2\|$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\|x+2\|-\|x-2\|$		-4		$2x$		4	

(Nghĩa là : với $x\in[-3;-2]$ thì $|x+2|-|x-2|=-4$; với $x\in[-2;2]$ thì $|x+2|-|x-2|=2x$ ….)

$$\Rightarrow I_3=\int_{-3}^{-2}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx+\int_{-2}^{2}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx+\int_{2}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx$$

$$=-4\int_{-3}^{-2}dx+2\int_{-2}^{2}xdx+4\int_{2}^{5}dx=-4x\Big|_{-3}^{-2}+x^2\Big|_{-2}^{2}+4x\Big|_{2}^{5}=8$$

4) $I_4=\int_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)dx$ Ta sẽ mượn bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1		1		2
$\|1-x\|$		$1-x$	0	$x-1$	
$\|x+2\|$		$x+2$		$x+2$	
$x+\|1-x\|-\|x+2\|$		$-x-1$		$x-3$	

$$\Rightarrow I_4=\int_{-1}^{1}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x-1)dx+\int_{1}^{2}(x-3)dx=-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Bigg|_{1}^{2}=\frac{1}{2}$$

5) $I_5=\int\limits_{-1}^{1}\frac{|x|\,dx}{x^4-x^2-12}$

Ta có: $I_5=\int\limits_{-1}^{1}\frac{|x|\,dx}{x^4-x^2-12}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{|x|\,dx}{x^4-x^2-12}+\int\limits_{0}^{1}\frac{|x|\,dx}{x^4-x^2-12}=-\int\limits_{-1}^{0}\frac{xdx}{x^4-x^2-12}+\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{x^4-x^2-12}$

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$ và

x	-1	0
t	1	0

x	0	1
t	0	1

$\Rightarrow I_5=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2-t-12}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2-t-12}$

$$=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2-t-12}=\frac{1}{7}\int\limits_{0}^{1}\frac{(t+3)-(t-4)}{(t+3)(t-4)}dt=\frac{1}{7}\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{t-4}{t+3}\right|\Bigg|_0^1=\boxed{\frac{2}{7}\ln\frac{3}{4}}$$

6) $I_6=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-|x|}\,dx$

Ta có: $I_6=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{2-|x|}\,dx+\int\limits_{0}^{1}\sqrt{2-|x|}\,dx=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{2+x}\,dx+\int\limits_{0}^{1}\sqrt{2-x}\,dx=\int\limits_{-1}^{0}(2+x)^{\frac{1}{2}}d(2+x)-\int\limits_{0}^{1}(2-x)^{\frac{1}{2}}d(2-x)$

$$=\frac{2}{3}(2+x)\sqrt{2+x}\Big|_{-1}^{0}-\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}\Big|_{0}^{1}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}-1}{3}}$$

Chú ý : *Các em phải chứng minh nếu muốn sử dụng hai tính chất : (Đặt $x=-t$)*

+) Nếu hàm số $f(x)$ chẵn ($f(-x)=f(x)$) thì $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{\alpha}f(x)dx$

+) Nếu hàm số $f(x)$ lẻ ($f(-x)=-f(x)$) thì $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=0$

7) $I_7=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{4x^2-4x+1}\,dx$

Ta có: $I_7=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{(2x-1)^2}\,dx=\int\limits_{0}^{1}|2x-1|\,dx$

0	–	1/2	+	1

$$\Rightarrow I_7=\int\limits_{0}^{1}|2x-1|\,dx=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}|2x-1|\,dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}|2x-1|\,dx=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(1-2x)dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)dx=\left(x-x^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\left(x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

8) $I_8=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\,dx$

Ta có: $I_8=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x(x^2-2x+1)}\,dx=\int\limits_{0}^{3}|x-1|\sqrt{x}\,dx$

0	–	1	+	3

$$\Rightarrow I_8=\int\limits_{0}^{1}|x-1|\sqrt{x}\,dx+\int\limits_{1}^{3}|x-1|\sqrt{x}\,dx=\int\limits_{0}^{1}(1-x)\sqrt{x}\,dx+\int\limits_{1}^{3}(x-1)\sqrt{x}\,dx=\int\limits_{0}^{1}\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx+\int\limits_{1}^{3}\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

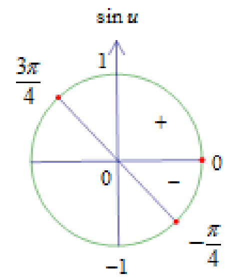
$$=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^3=\boxed{\frac{24\sqrt{3}+8}{15}}$$

9) $I_9=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|\sin x|\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin xdx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2$

10) $I_{10}=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

Ta có: $\sqrt{1-\sin 2x}=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}=\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}=|\sin x-\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

Với $x\in[0;\pi]\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$. Dựa vào đường tròn đơn vị:



*) Với $x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ thì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$ hay $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$ khi $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

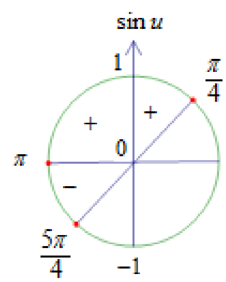
*) Với $x-\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$ hay $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$ khi $x\in\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$

$\Rightarrow I_{10}=-\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2}$

11) $I_{11}=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$

Ta có: $\sqrt{1+\sin x}=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

Với $x\in[0;2\pi]\Rightarrow\frac{x}{2}\in[0;\pi]\Rightarrow\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$. Dựa vào đường tròn đơn vị:



*) Với $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$ thì $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$ hay $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$ khi $x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$

*) Với $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left[\pi;\frac{5\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<0$ hay $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<0$ khi $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

$\Rightarrow I_{11}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx-\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx=-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}+2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=4\sqrt{2}$

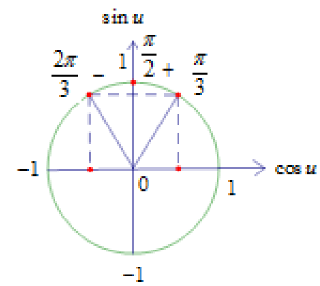
12) $I_{12}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}dx$

Ta có: $\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}=\sqrt{(\tan x-\cot x)^2}=|\tan x-\cot x|=\left|\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}\right|=2\left|\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right|$

Vì $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{3}\le 2x\le\frac{2\pi}{3}$. Dựa vào đường tròn đơn vị ta có: (hình vẽ ở trang tiếp theo)

*) $2x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\begin{cases}\sin 2x>0\\ \cos 2x>0\end{cases}$ hay $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}>0$ khi $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$

*) $2x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$ thì $\begin{cases}\sin 2x>0\\ \cos 2x<0\end{cases}$ hay $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}<0$ khi $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$



$$\Rightarrow I_{12}=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x}=\ln|\sin 2x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-\ln|\sin 2x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\boxed{2\ln\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

13) $$I_{13}=\int_{-2}^{2}\big|2x-|x+1|\big|dx=\int_{-2}^{-1}|2x+x+1|dx+\int_{-1}^{2}|2x-x-1|dx=\int_{-2}^{-1}|3x+1|dx+\int_{-1}^{2}|x-1|dx$$

$$=-\int_{-2}^{-1}(3x+1)dx-\int_{-1}^{1}(x-1)dx+\int_{1}^{2}(x-1)dx=-\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}-\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Bigg|_{1}^{2}=\boxed{6}$$

CÔNG VIỆC 2 : Đi tính diện tích hình phẳng và tính thể tích khối tròn xoay

CÔNG THỨC TÍNH

Hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$\begin{cases}y=f(x)\\ y=g(x)\\ x=a;\quad x=b>a\end{cases}\ (*)\Rightarrow\begin{cases}S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx & (2*)\\ V_{0x}=\pi\int_a^b|f^2(x)-g^2(x)|dx & (3*)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}S=\int_a^b|f(x)|dx\\ V_{0x}=\pi\int_a^b f^2(x)dx\end{cases}\ (\text{nếu } y=g(x)=0)$$

Chú ý:

1) Ta có thể áp dụng (2*) đối với biến y (các hàm số sẽ được rút x theo y - coi x là hàm của biến y)

2) Vì trục Ox, Oy có vai trò như nhau nên thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng quanh trục Oy cũng áp dụng tương tự (3*) (các hàm số sẽ được rút x theo y - coi x là hàm của biến y)

3) Chỉ áp dụng (3*) khi trên $[a;b]$ hàm $f(x), g(x)$ thuộc cùng phía so với trục Ox (nếu tính thể tích quay quanh trục Ox) và thuộc cùng phía so với trục Oy (nếu tính thể tích quay quanh trục Oy). Nếu khác phía thì chúng ta phải lấy đối xứng của một hàm nào đó qua trục tương ứng và quay về việc áp dụng cho hai hàm cùng phía (trường hợp này các em sẽ ít gặp).

4) Nếu trong biểu thức (*) không có $x=a$ hoặc không có cả hai ($x=a$ và $x=b$) thì các em phải đi viết phương trình hoành độ giao điểm: $f(x)=g(x)$ (1) để tìm thêm cận . Giả sử phương trình (1) có nghiệm $x=x_i$ với $i=\overline{1;n}$. Vì hàm số các em học là các hàm sơ cấp nên việc tìm cận chúng ta sẽ làm như sau:

+) Nếu chỉ có $x=b$ thì: cận thứ nhất $=\min\{x_i;b\}$; cận thứ hai $=\max\{x_i;b\}$

(thường b xuất hiện ở 1 trong 2 cận đó. Nếu điều này không xảy ra thì việc cho dữ kiện $x=b$ thừa - được hiểu là người ra đề cố tình hoặc không hiểu ☺)

+) Nếu không có cả $x=a$ và $x=b$ thì: cận thứ nhất $=\min\{x_i\}$; cận thứ hai $=\max\{x_i\}$ và các nghiệm còn lại (nếu có) là các điểm được chèn vào để phá trị tuyệt đối.

5) Nếu việc vẽ hình đơn giản các em nên làm điều đó, để việc phá trị tuyệt đối được dễ dàng (bỏ luôn giá trị tuyệt đối nếu thấy trên $[\alpha;\beta]$ phần $f(x)$ nằm phía trên $g(x)$ (nghĩa là hàm nào phía trên sẽ lấy để trừ hàm phía dưới, để đảm bảo $S>0$ và $V>0$)).

CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

1) $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=x+3$ (**A – 2002**). **2)** $y=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$ và $y=\frac{x^2}{4\sqrt{2}}$ (**B – 2002**).

3) $y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ (**D – 2002**). **4)** $y=(e+1)x$, $y=(1+e^x)x$ (**A – 2007**).

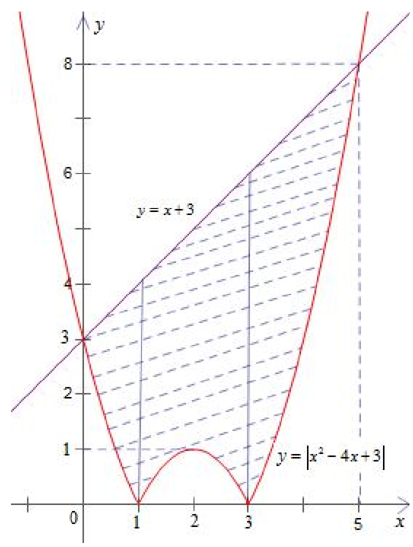
5) Parabol (P) : $y=x^2-4x+5$ và hai tiếp tuyến tại các điểm A(1;2), B(4;5) nằm trên (P).

6) $x^2+y^2=4$ và $x^2+y^2+2x=0$. **7)** $y=\left|1-\sin^2\frac{3x}{2}\right|$ **;** $y=1+\frac{12x}{\pi}$ và $x=\frac{\pi}{2}$

Giải:

1) $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=x+3$ (**A – 2002**). Phương trình hoàng độ giao điểm:

$$\left|x^2-4x+3\right|=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=x+3 \\ x^2-4x+3=-(x+3) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-5x=0 \\ x^2-3x+6=0 \quad (vn) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right.$$



C1: (Nếu vẽ hình)

$$\Rightarrow S=\int_0^5\left(x+3-\left|x^2-4x+3\right|\right)dx=\int_0^1[x+3-(x^2-4x+3)]dx$$

$$+\int_1^3[x+3+(x^2-4x+3)]dx+\int_3^5[x+3-(x^2-4x+3)]dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+5x)dx+\int_1^3(x^2-3x+6)dx+\int_3^5(-x^2+5x)dx$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_1^3+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_3^5=\boxed{\frac{109}{6}} \text{ (đvdt)}$$

C2: (Không vẽ hình):

$$\Rightarrow S=\int_0^5\left|\left|x^2-4x+3\right|-(x+3)\right|dx$$

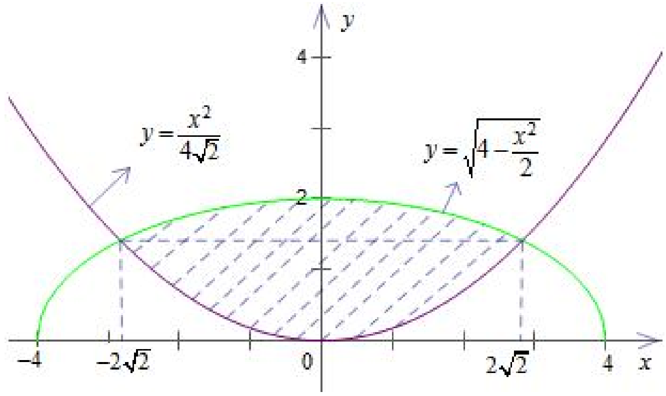
$$=\int_0^1\left|(x^2-4x+3)-(x+3)\right|dx+\int_1^3\left|-(x^2-4x+3)-(x+3)\right|dx+\int_3^5\left|x^2-4x+3-(x+3)\right|dx$$

$$=\int_0^1\left|x^2-5x\right|dx+\int_1^3\left|x^2-3x+6\right|dx+\int_3^5\left|x^2-5x\right|dx=\int_0^1(-x^2+5x)dx+\int_1^3(x^2-3x+6)dx+\int_3^5(-x^2+5x)dx$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_1^3+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_3^5=\boxed{\frac{109}{6}} \text{ (đvdt)}$$

2) $y=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$ và $y=\dfrac{x^2}{4\sqrt{2}}$ **(B – 2002).**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{x^2}{4\sqrt{2}}\Leftrightarrow 4-\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{x^4}{32}\Leftrightarrow x^2=8\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$



Trên $\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$: $\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}\ge\dfrac{x^2}{4\sqrt{2}}$ và hình phẳng đối xứng qua Oy

$$\Rightarrow S=2\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right)dx=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{16-x^2}\,dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\sqrt{2}}x^2dx=S_1-\frac{1}{2\sqrt{2}}S_2$$

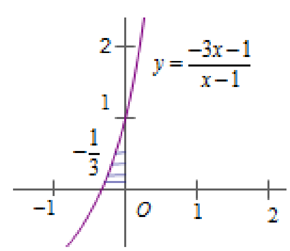
*) Tính: $S_1=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{16-x^2}\,dx$ Đặt $x=4\sin t\Rightarrow dx=4\cos t\,dt$ và $\sqrt{16-x^2}=4\cos t$ với $t:0\to \pi/4$

$$\Rightarrow S_1=16\int_0^{\pi/4}\cos^2 t\,dt=8\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2t)dt=\left(8t+4\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/4}=2\pi+4$$

*) Tính $S_2=\int_0^{2\sqrt{2}}x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^{2\sqrt{2}}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow S=2\pi+4-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.\dfrac{16\sqrt{2}}{3}=2\pi+\dfrac{4}{3}$ (đvdt)

3) $y=\dfrac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ (**D – 2002**).

Hình phẳng giới hạn bởi : $\begin{cases}y=\dfrac{-3x-1}{x-1}\\ y=0;\quad x=0\end{cases}$ (hình ảnh phác họa: )

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{-3x-1}{x-1}=0\Leftrightarrow -3x-1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow S=\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left|\frac{-3x-1}{x-1}\right|dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{-3x-1}{x-1}dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left(3+\frac{4}{x-1}\right)dx=-\left(3x+4\ln|x-1|\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{0}=-1+4\ln\frac{4}{3}$$ (đvdt)

4) $y=(e+1)x$, $y=(1+e^x)x$ (**A – 2007**).

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$(e+1)x=(1+e^x)x \Leftrightarrow x(e+1-1-e^x)=0 \Leftrightarrow x(e-e^x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ e^x=e \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Với $0\le x\le 1 \Rightarrow e^x \le e^1=e$ hay $x(e-e^x)\ge 0$

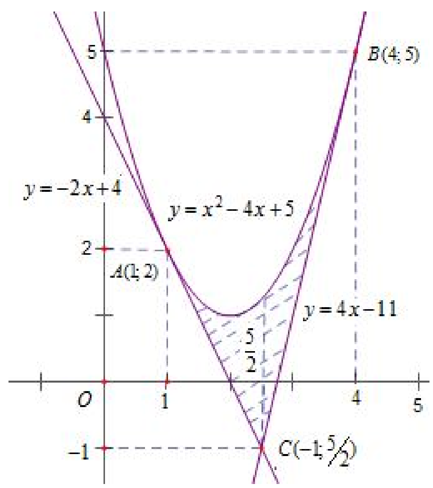
$$\Rightarrow S=\int_0^1\left|(e+1)x-(1+e^x)x\right|dx=\int_0^1\left|x(e-e^x)\right|dx=\int_0^1[x(e-e^x)]dx=e\int_0^1 xdx-\int_0^1 xe^xdx=S_1-S_2 \quad (1)$$

*) Ta có: $S_1=e\int_0^1 xdx=\left.\frac{ex^2}{2}\right|_0^1=\frac{e}{2}$ (2)

*) Ta có: $S_2=\int_0^1 xe^xdx$ Đặt : $\begin{cases} u=x \\ dv=e^xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases} \Rightarrow S_2=\left.xe^x\right|_0^1-\int_0^1 e^xdx=e-\left.e^x\right|_0^1=e-(e-1)=1$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta được diện tích hình phẳng: $\boxed{S=\frac{e}{2}-1}$ (đvdt)

5) Parabol (P) : $y=x^2-4x+5$ và hai tiếp tuyến tại các điểm A(1;2), B(4;5) nằm trên (P).



Ta có: $y'=2x-4$.Áp dụng công thức phương trình tiếp tuyến: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

Ta được phương trình tiếp tuyến tại $A(1;2)$, $B(4;5)$ lần lượt là: $y=-2x+4$ và $y=4x-11$

Vậy phương trình giao điểm của hai tiếp tuyến: $-2x+4=4x-11 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

Khi đó diện tích S được chia thành hai miền diện tích bởi điểm chia $x=\frac{5}{2}$

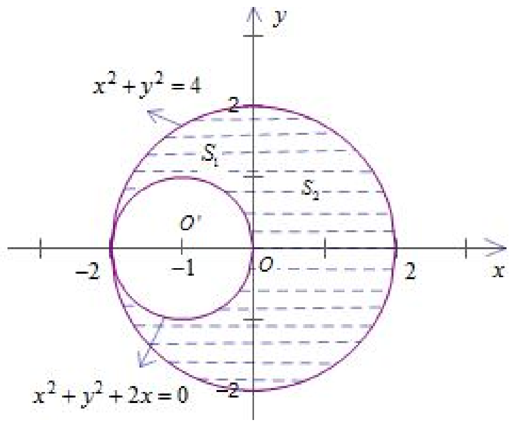
$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\left[(x^2-4x+5)-(-2x+4)\right]dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\left[(x^2-4x+5)-(4x-11)\right]dx$$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x^2-2x+1)dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(x^2-8x+16)dx=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2d(x-1)+\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2d(x-4)=\left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_1^{\frac{5}{2}}+\left.\frac{(x-4)^3}{3}\right|_{\frac{5}{2}}^4=\boxed{\frac{9}{4}}$$

CHÚ Ý:

Khi hình phẳng được giới hạn bởi 3 đường cong: $y = f(x)$; $y = g(x)$ và $y = h(x)$ thì các em phải tìm cách chia phần diện tích thành các phần mà ở đó được giới hạn bởi hai trong ba đường cong và các đường thẳng $x = a; x = b$ (nghĩa là phần biên không có có sự xuất hiện đồng thời cả 3 đường cong trên).

6) $x^2 + y^2 = 4$ và $x^2 + y^2 + 2x = 0$.



Ta có: $x^2 + y^2 = 4$: Là đường tròn tâm O có $R = 2$ (C_1)

và $x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$: Là đường tròn tâm $O'(-1;0)$ có $R' = 1$ (C_2)

Do tính đối xứng của hình phẳng cần tính (như hình vẽ) nên: $S = 2(S_1 + S_2)$

*) Với S_1 là diện tích giới hạn bởi: $\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y = \sqrt{-x^2-2x} = \sqrt{1-(x+1)^2}; \quad x = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow S_1 = \int_{-2}^{0} (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-(x+1)^2})dx$$

*) Với S_2 là phần diện tích giới hạn bởi: $\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y = 0; \quad x = 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Ta đi tính: $I = \int \sqrt{a^2 - u^2}\,du$ đặt $u = a\sin t$ với $t \in \left[-\pi/2; \pi/2\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = a\cos t dt \\ \sqrt{a^2-u^2} = a|\cos t| = a\cos t \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sin 2t}{4} + C \quad (*)$$

Áp dụng (*) với $u = a\sin t$ các em sẽ tính được: $S_1 = \frac{\pi}{2}$ và $S_2 = \pi \Rightarrow S = 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 3\pi$ (đvdt)

CHÚ Ý:

**) Thực chất nếu sử dụng kiến thức cấp 1 (các em lớp 5 đã biết cách tính diện tích hình tròn)*

Thì ta sẽ có: $S = S_{(C_1)} - S_{(C_2)} = \pi.2^2 - \pi.1^2 = 3\pi$ (là cách giải tối ưu nhất của bài toán này)

**) Cách giải trên chỉ chứng minh một điều là tích phân có thể tính được diện tích trong cả tình huống trên.*

7) $y=\left|1-\sin^2\frac{3x}{2}\right|$; $y=1+\frac{12x}{\pi}$ và $x=\frac{\pi}{2}$

$$y=\left|1-\sin^2\frac{3x}{2}\right|=\cos^2\frac{3x}{2}$$

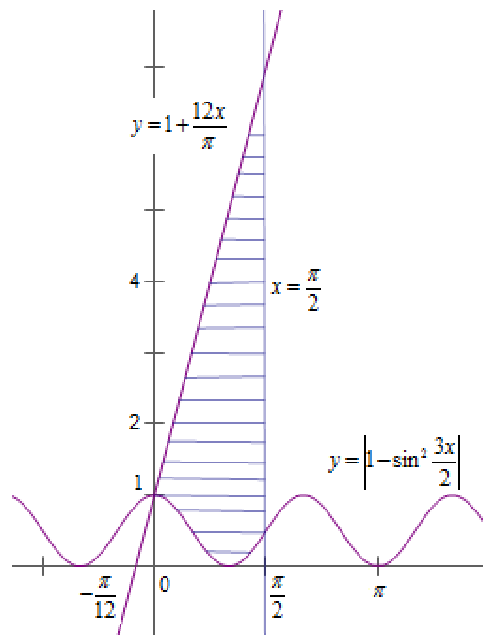
Phương trình hoành độ giao điểm: $\cos^2\frac{3x}{2}=1+\frac{12x}{\pi}$

Mà ta có: $0\le\cos^2\frac{3x}{2}\le 1\Rightarrow 0\le 1+\frac{12x}{\pi}\le 1\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}\le x\le 0$

Dựa vào đồ thị ta được nghiệm của (*) là : $x=0$

$$\Rightarrow S=\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{12x}{\pi}-\cos^2\frac{3x}{2}\right)dx=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{12x}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{\cos 3x}{2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{6x^2}{\pi}+\frac{x}{2}-\frac{\sin 3x}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{6}=\boxed{\frac{21\pi+2}{12}}$$



Ví dụ 2. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H giới hạn bởi :

1) $y=2x-x^2$ và y = 0 quay quanh trục Ox.

2) $y=x\ln x$, $y=0$, $x=e$ quay quanh trục Ox (**B – 2007**).

3) $y=2x+5$, $y=x^2+2$ quay quanh trục Ox.

Giải:

1) $y=2x-x^2$ và y = 0 quay quanh trục Ox.

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Khi đó $V_{Ox}=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)dx=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2=\boxed{\frac{16\pi}{15}}$ (đvtt)

2) $y=x\ln x$, $y=0$, $x=e$ quay quanh trục Ox (**B – 2007**).

Phương trình hoành độ giao điểm: $x\ln x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Khi đó $V_{Ox}=\pi\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx=\pi I$ (*) . Tính $I=\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx$ Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 x\\dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2\ln x}{x}dx\\v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{x^3\ln^2 x}{3}\Bigg|_1^e-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,dx=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}J$. Tính $J=\int_1^e x^2\ln x\,dx$ Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$

Suy ra $J=\frac{x^3\ln x}{3}\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Big|_1^e=\frac{2e^3+1}{9}$. Khi đó $I=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}.\frac{2e^3+1}{9}=\frac{5e^3-2}{27}$ (2*)

Thay (2*) vào (*) ta được: $V_{Ox}=\frac{\pi\left(5e^3-2\right)}{27}$ (đvtt).

3) $y=2x+5$, $y=x^2+2$ quay quanh trục Ox.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+2=2x+5\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

Với $x\in[-1;3]$ thì $2x+5\ge x^2+2$ nên khi đó ta có:

$$V_{Ox}=\pi\int_{-1}^{3}\left[(2x+5)^2-(x^2+2)^2\right]dx=\pi\int_{-1}^{3}\left(-x^4+20x+21\right)dx=\pi\left(-\frac{x^5}{5}+10x^2+21x\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{576\pi}{5}\ \text{(đvtt).}$$

Ví dụ 3

1) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x^2\ln(x+1)$; $y=\ln\frac{1}{x+1}$; $x=1$

2) Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường : $y=(x-1)e^x$ và hai trục tọa độ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

3) Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường : $y=\frac{(x-3)\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}}$; $x=2$ và trục tung. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

Giải:

1) *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:* $y=x^2\ln(x+1)$; $y=\ln\frac{1}{x+1}$; $x=1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm : $x^2\ln(x+1)=\ln\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow x^2\ln(x+1)+\ln(x+1)=0$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)\ln(x+1)=0\Leftrightarrow \ln(x+1)=0\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$$

Vậy diện tích hình phẳng : $S=\int_0^1\left|x^2\ln(x+1)-\ln\frac{1}{x+1}\right|dx=\int_0^1\left|x^2\ln(x+1)+\ln(x+1)\right|dx=\int_0^1(x^2+1)\ln(x+1)dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\dv=(x^2+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x+1}\\v=\frac{x^3}{3}+x=\frac{x^3+3x}{3}\end{cases}$

Khi đó : $S=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln(x+1)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3+3x}{x+1}dx=\frac{4}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1\left(x^2-x+4-\frac{4}{x+1}\right)dx$

$$=\frac{4}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x-4\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{23}{18}\ \text{(đvdt)}$$

2) *Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường : $y=(x-1)e^x$ và hai trục tọa độ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.*

+) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường $y=(x-1)e^x$ và $y=0$ trục hoành :

$$(x-1)e^x=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

+) Khi đó : $V_{Ox}=\pi\int_0^1 (x-1)^2e^{2x}dx=\pi I$ (*)

+) Tính $I=\int_0^1 (x-1)^2e^{2x}dx$ Đặt $\begin{cases} u=(x-1)^2 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2(x-1)dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Suy ra $I=\left.\frac{(x-1)^2e^{2x}}{2}\right|_0^1-\int_0^1 (x-1)e^{2x}dx=-\frac{1}{2}-J$ (1)

+) Tính $J=\int_0^1 (x-1)e^{2x}dx$ Đặt $\begin{cases} u=x-1 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Suy ra $J=\left.\frac{(x-1)e^{2x}}{2}\right|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}-\left.\frac{1}{4}e^{2x}\right|_0^1=\frac{3-e^2}{4}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $I=-\frac{1}{2}-\frac{3-e^2}{4}=\frac{e^2-5}{4}$ (2*)

Thay (2*) vào (*) ta được: $V_{Ox}=\boxed{\frac{\pi(e^2-5)}{4}}$ (đvtt)

3) *Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường : $y=\frac{(x-3)\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}}$; $x=2$ và trục tung. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.*

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=\frac{(x-3)\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}}$ và $y=0$ là : $\frac{(x-3)\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}}=0 \Leftrightarrow x=3$

Khi đó $V_{Ox}=\pi\int_2^3\left[\frac{(x-3)\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}}\right]^2dx=\pi\int_2^3\frac{(x^2-6x+9)(3-x)}{4+2\sqrt{-x^2+6x-5}}dx$

Đặt $t=\sqrt{-x^2+6x-5} \Rightarrow t^2=-x^2+6x-5 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt=(-2x+6)dx \\ x^2-6x=-t^2-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)dx=tdt \\ x^2-6x+9=4-t^2 \end{cases}$

và cận $x:2\to 3$ thì $t:\sqrt{3}\to 2$

Suy ra: $V_{Ox}=\pi\int_{\sqrt{3}}^2\frac{4-t^2}{4+2t}tdt=\pi\int_{\sqrt{3}}^2\frac{(2-t).t}{2}dt$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{3}}^2\left(2t-t^2\right)dt=\frac{\pi}{2}\left.\left(t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\right|_{\sqrt{3}}^2=\frac{\pi(3\sqrt{3}-5)}{2}$$

Vậy $V_{Ox}=\boxed{\frac{\pi(3\sqrt{3}-5)}{2}}$ (đvtt).

VI. CÁC LỚP TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT VÀ TÍCH PHẦN TRUY HỒI

1. CÁC LỚP TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

Sau đây các em sẽ được tìm hiểu thêm các lớp tích phân đặc biệt có dạng $I=\int_a^b f(x)dx$ *trong đó bản thân hàm* $f(x)$ *có những tính chất "đặc biệt" (các em sẽ được tìm hiểu qua ví dụ mở đầu và bốn bài toán hay gặp sau đây).*

Cách giải chung:

Đặt $x=a+b-t$ và biến đổi tạo ra tính phân xoay vòng (tạo ra I) rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I .

Chú ý: *Trong tích phân ta luôn có* $I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=...$

VÍ DỤ MỞ ĐẦU

Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

2) $I_2=\int_{12}^{20}\frac{\sqrt{\ln(101-x)}}{\sqrt{\ln(x+69)}+\sqrt{\ln(101-x)}}dx$

3) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[5]{\cos x}-\sqrt[5]{\sin x}\right)dx$

4) $I_4=\int_{-1}^{3}\left(x^3-3x^2+2\right)^{2015}dx$

5) $I_5=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$

6) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 2x+\cos^6 2x\right).\ln\left(1+\tan x\right)dx$ **(Moldova National MO – 2008)**

Giải:

1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:\frac{\pi}{4}\to 0$

Khi đó $I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right](-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln 2-\ln(1+\tan t)\right]dt$

$$=\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan t)dt=t.\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_1=\frac{\pi\ln 2}{4}-I_1$$

Vậy $I_1=\frac{\pi\ln 2}{4}-I_1\Leftrightarrow 2I_1=\frac{\pi\ln 2}{4}\Leftrightarrow I_1=\boxed{\frac{\pi\ln 2}{8}}$

2) $I_2=\int_{12}^{20}\frac{\sqrt{\ln(101-x)}}{\sqrt{\ln(x+69)}+\sqrt{\ln(101-x)}}dx$ Đặt $x=32-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:12\to 20$ thì $t:20\to 12$

Khi đó $I_2=\int_{20}^{12}\frac{\sqrt{\ln\left[101-(32-t)\right]}}{\ln\left[(32-t)+69\right]+\ln\left[101-(32-t)\right]}(-dt)=\int_{12}^{20}\frac{\sqrt{\ln(t+69)}}{\sqrt{\ln(101-t)}+\sqrt{\ln(t+69)}}dt$

$$=\int_{12}^{20}\left(1-\frac{\sqrt{\ln(101-t)}}{\sqrt{\ln(t+69)}+\sqrt{\ln(101-t)}}\right)dt=\int_{12}^{20}dt-\int_{12}^{20}\frac{\sqrt{\ln(101-t)}}{\sqrt{\ln(t+69)}+\sqrt{\ln(101-t)}}dt=t\Big|_{12}^{20}-I_2=8-I_2$$

Vậy $I_2=8-I_2\Leftrightarrow 2I_2=8\Leftrightarrow I_2=4$

3) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[5]{\cos x}-\sqrt[5]{\sin x}\right)dx$ Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:\frac{\pi}{2}\to 0$

Khi đó $I_3=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left[\sqrt[5]{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}-\sqrt[5]{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\right](-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[5]{\sin t}-\sqrt[5]{\cos t}\right)dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[5]{\cos t}-\sqrt[5]{\sin t}\right)dt=-I_3$

Vậy $I_3=-I_3\Leftrightarrow 2I_3=0\Leftrightarrow I_3=0$

4) $I_4=\int_{-1}^{3}\left(x^3-3x^2+2\right)^{2015}dx$

Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:-1\to 3$ thì $t:3\to -1$

Khi đó $I_4=\int_{-1}^{3}\left[(2-t)^3-3(2-t)^2+2\right]^{2015}dt=\int_{-1}^{3}\left(-t^3+3t^2-2\right)^{2015}dt=-\int_{-1}^{3}\left(t^3-3t^2+2\right)^{2015}dt=-I_4$

Vậy $I_4=-I_4\Leftrightarrow 2I_4=0\Leftrightarrow I_4=0$

5) $I_5=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$ Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:-\pi\to\pi$ thì $t:\pi\to-\pi$

Khi đó $I_5=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2(-t)}{1+e^{-t}}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^t.\sin^2 t}{1+e^t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+e^t-1).\sin^2 t}{1+e^t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^2 t-\frac{\sin^2 t}{1+e^t}\right)dt$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 t}{1+e^t}dt=\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}-I_5=\pi-I_5$$

Vậy $I_5=\pi-I_5\Leftrightarrow 2I_5=\pi\Leftrightarrow I_5=\frac{\pi}{2}$

6) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 2x+\cos^6 2x\right).\ln\left(1+\tan x\right)dx$ **(Moldova National MO – 2008)**

Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:\frac{\pi}{4}\to 0$

Khi đó $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^6\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)+\cos^6\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\right].\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^6 2t+\sin^6 2t\right).\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^6 2t+\sin^6 2t\right).\ln\frac{2}{1+\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 2t+\cos^6 2t\right).\left[\ln 2-\ln(1+\cot t)\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 2t+\cos^6 2t\right).\ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 2t+\cos^6 2t\right)\ln(1+\cot t)dt$$

$$=\ln 2.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 4t\right)dt-I_6=\ln 2.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 8t}{2}\right)dt-I_6=\ln 2.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 8t\right)dt-I_6$$

$$=\ln 2.\left(\frac{5}{8}t+\frac{3}{64}\sin 8t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_6=\frac{5\pi\ln 2}{32}-I_6$$

Vậy $I_6=\dfrac{5\pi\ln 2}{32}-I_6\Leftrightarrow 2I_6=\dfrac{5\pi\ln 2}{32}\Leftrightarrow I_6=\boxed{\dfrac{5\pi\ln 2}{64}}$

Bài toán 1: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-a;a]$, khi đó : $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx$

Từ đây ta có các kết quả quan trọng sau:

*) Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ, khi đó: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ (Tổng quát: Nếu $f(a+b-x)=-f(x)$ thì $\int_a^b f(x)dx=0$) (1)

*) Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, khi đó: $\begin{cases}\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx & (2)\\ \int_{-a}^{a}\dfrac{f(x)}{1+b^x}dx=\int_0^a f(x)dx \quad (0<b\neq 1) & (3)\end{cases}$

Chú ý:

+) *Trong quá trình làm bài các em không sử dụng luôn kết quả (1), (2) và (3) mà các hệ thức này sẽ xuất hiện trong quá trình giải (chúng ta chứng minh luôn) bằng việc đổi biến $x=-t$ (Tổng quát: $x=a+b-t$).*

+) *Trong tích phân ta luôn có $I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=...$*

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^5\cos x}{2+x^8}dx$ **2)** $I_2=\int_{-2}^{2}\dfrac{x^4}{1+2014^x}dx$

3) $I_3=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx$ **4)** $I_4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

Giải:

1) $I_1=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^5\cos x}{2+x^8}dx$

Nhận xét : *Nếu dựa vào kết quả ở Bài toán 1 ta có được luôn* $I_1=0$ *vì* $f(x)=\dfrac{x^5\cos x}{2+x^8}$ *lẻ trên* $[-1;1]$.

Song khi trình bày lời giải các em sẽ làm như sau:

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:-1\to 1$ thì $t:1\to -1$

Khi đó $I_1=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(-t)^5.\cos(-t)}{2+(-t)^8}dt=-\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^5.\cos t}{2+t^8}dt=-I_1\Rightarrow 2I_1=0\Leftrightarrow I_1=0$

2) $I_2=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^4}{1+2014^x}dx$ Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:-2\to 2$ thì $t:2\to -2$

Khi đó $I_2=\int\limits_{-2}^{2}\frac{(-t)^4}{1+2014^{-t}}dt=\int\limits_{-2}^{2}\frac{t^4}{1+\frac{1}{2014^t}}dt=\int\limits_{-2}^{2}\frac{t^4.2014^t}{1+2014^t}dt=\int\limits_{-2}^{2}\frac{t^4.(1+2014^t-1)}{1+2014^t}dt$

$$=\int\limits_{-2}^{2}\left(t^4-\frac{t^4}{1+2014^t}\right)dt=\left.\frac{t^5}{5}\right|_{-2}^{2}-\int\limits_{-2}^{2}\frac{t^4}{1+2014^t}dt=\frac{64}{5}-I_2\Rightarrow 2I_2=\frac{64}{5}\Leftrightarrow I_2=\frac{32}{5}$$

3) $I_3=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+e^x}-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx=A+B$ (*)

+) Tính $A=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+e^x}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^xdx}{e^x(1+e^x)}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}\right)de^x=\ln\left.\frac{e^x}{1+e^x}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$ (1)

+) Tính $B=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx$ Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:\frac{\pi}{2}\to -\frac{\pi}{2}$

Khi đó $B=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(-t)\sin(-2t)}{1+e^{-t}}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^t\sin t\sin 2t}{1+e^t}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+e^t-1)\sin t\sin 2t}{1+e^t}dt$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sin 2tdt-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\sin 2t}{1+e^t}dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3t-\cos t)dt-B$$

$$=-\frac{1}{2}\left.\left(\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-B=\frac{4}{3}-B$$

Vậy $B=\frac{4}{3}-B\Leftrightarrow 2B=\frac{4}{3}\Leftrightarrow B=\frac{2}{3}$ (2) . Thay (1), (2) vào (*) ta được: $I_3=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$

4) $I_4=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:\frac{\pi}{2}\to -\frac{\pi}{2}$

Khi đó : $I_4=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(-t)\ln\left(-t+\sqrt{1+t^2}\right)dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ln\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}dt=-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)dt=-I_4$

$$\Rightarrow 2I_4=0\Leftrightarrow I_4=0$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

1) $I_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx$ **2)** $I_2=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2-4)}$ **3)** $I_3=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

Giải:

1) $I_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx$ Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$ và cận thay đổi: $\pi/4\to-\pi/4$

$$\Rightarrow I_1=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin^6(-t)+\cos^6(-t)}{6^{-t}+1}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin^6 t+\cos^6 t}{1/6^t+1}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{6^t(\sin^6 t+\cos^6 t)}{6^t+1}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{(6^t+1-1)(\sin^6 t+\cos^6 t)}{6^t+1}dt$$

$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\sin^6 t+\cos^6 t)dt-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin^6 t+\cos^6 t}{6^t+1}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2t\right)dt-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx$$

$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt-I_1=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}.\cos 4t\right)dt-I_1=\left(\frac{5}{8}t+\frac{3}{32}\sin 4t\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-I_1=\frac{5\pi}{16}-I_1$$

Vậy $I_1=\frac{5\pi}{16}-I_1\Leftrightarrow 2I_1=\frac{5\pi}{16}\Leftrightarrow I_1=\frac{5\pi}{32}$

2) $I_2=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2-4)}$ Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$ và cận $t:1\to-1$

$$\Rightarrow I_2=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(e^{-t}+1)(t^2-4)}=\int_{-1}^{1}\frac{e^t dt}{(e^t+1)(t^2-4)}=\int_{-1}^{1}\frac{e^x dx}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+1-1}{(e^x+1)(x^2-4)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-4}-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2-4)}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Bigg|_{-1}^{1}-I_2$$

hay $I_2=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Bigg|_{-1}^{1}-I_2\Leftrightarrow 2I_2=-\frac{1}{2}\ln 3\Rightarrow I_2=-\frac{1}{4}\ln 3$

3) $I_3=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:-\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$ thì $t:\frac{1}{2}\to-\frac{1}{2}$

Khi đó $I_3=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos(-t)\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos t\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{-1}dt=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos t\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)dt=-I_3$

Vậy $I_3=-I_3\Leftrightarrow 2I_3=0\Leftrightarrow I_3=0$

Bài toán 2: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, khi đó ta có: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ (*)

Từ đây ta có kết quả sau: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, khi đó : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ (2*)

Chú ý: *Trong quá trình làm bài các em không được sử dụng luôn các kết quả* (*) và (2*) *mà các hệ thức này sẽ xuất hiện trong quá trình giải (chúng ta chứng minh luôn) bằng việc đổi biến* $x = a+b-t$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau: **1)** $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx$ **2)** $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx$

Giải: 1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx$ Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$ và $x: 0 \to \frac{\pi}{2}$ thì $t: \frac{\pi}{2} \to 0$

Khi đó $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t}\right)dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t}dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - I_1 = \frac{\pi}{2} - I_1$$

Vậy $I_1 = \frac{\pi}{2} - I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{\pi}{4}$

Chú ý: *Như vậy từ* I_1 *với cách gán* n *một giá trị cụ thể ta tạo ra được vô số bài toán kiểu như:*

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x}dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[2014]{\sin x}}{\sqrt[2014]{\sin x} + \sqrt[2014]{\cos x}}dx$; …

2) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx$ Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$ và $x: 0 \to \frac{\pi}{2}$ thì $t: \frac{\pi}{2} \to 0$

Khi đó $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{\cos t + \sin t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t + \cos^3 t - \cos^3 t}{\sin t + \cos t}dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t\cos t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin t + \cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\sin 2t\right)dt - I_2 = \left(t + \frac{1}{4}\cos 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - I_2 = \frac{\pi - 1}{2}$$

Vậy $I_2 = \frac{\pi-1}{2} - I_2 \Leftrightarrow 2I_2 = \frac{\pi-1}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{\pi-1}{4}$

Ví dụ 2. Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{\cos^2(\cos x)}-\tan^2(\sin x)\right]dx$

Giải:

$I=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{\cos^2(\cos x)}-\tan^2(\sin x)\right]dx$ (*) Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$ và cận $t:\pi/2\to 0$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{\cos^2\left(\cos(\pi/2-t)\right)}-\tan^2\left(\sin(\pi/2-t)\right)\right]dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{\cos^2(\sin t)}-\tan^2(\cos t)\right]dt=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{\cos^2(\sin x)}-\tan^2(\cos x)\right]dx \quad (2*)$$

Lấy (*) cộng với (2*) ta được: $2I=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{\cos^2(\cos x)}-\tan^2(\sin x)+\frac{1}{\cos^2(\sin x)}-\tan^2(\cos x)\right]dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[1+\tan^2(\cos x)-\tan^2(\sin x)+1+\tan^2(\sin x)-\tan^2(\cos x)\right]dx=2\int_0^{\pi/2}dx=2x\Big|_0^{\pi/2}=\pi$$

Vậy $2I=\pi\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}$

Bài toán 3: Hàm số $f(x)$ liên tục $[a;b]$ và $f(a+b-x)=f(x)$, khi đó : $\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ (*)

Từ đây ta có các kết quả quan trọng sau: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thì:

*) $\int_\alpha^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_\alpha^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx$ và đặc biệt với $\alpha=0$ thì $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ (1)

*) $\int_\alpha^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx=\pi\int_\alpha^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx$ và đặc biệt với $\alpha=0$ thì $\int_0^{2\pi} xf(\cos x)dx=\pi\int_0^{2\pi} f(\cos x)dx$ (2)

Chú ý: *Trong quá trình làm bài các em không được sử dụng luôn các kết quả (*), (1) và (2) mà các hệ thức này sẽ xuất hiện trong quá trình giải (chúng ta chứng minh luôn) bằng việc đổi biến* $x=a+b-t$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Tính các tích phân : **1)** $I_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\left(\tan x+\cot x\right)dx$ **2)** $I_2=\int_0^{\pi}\frac{x(\sin x+\cos x+\cos^3 x)}{1+\cos^2 x}dx$ **3)** $I_3=\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{3+\cos x}dx$

Giải:

1) $I_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x.\left(\tan x+\cot x\right)dx$ Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{3}$ thì $t:\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{6}$

Khi đó $I_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cot\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(\cot t+\tan t)dt$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cot t+\tan t)dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}t.(\tan t+\cot t)dt=\frac{\pi}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin t}dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos t}dt\right)-I_1$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin t}{\sin t}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\cos t}{\cos t}\right)-I_1=\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-I_1=\frac{\pi}{2}\ln 3-I_1$$

Vậy $I_1=\frac{\pi}{2}\ln 3-I_1\Leftrightarrow 2I_1=\frac{\pi}{2}\ln 3\Leftrightarrow I_1=\frac{\pi}{4}\ln 3$ (*)

2) $I_2=\int_0^{\pi}\frac{x(\sin x+\cos x+\cos^3 x)}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x+x\cos x.(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}x\cos xdx=A+B$ (*)

+) Tính $A=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:0\to\pi$ thì $t:\pi\to 0$

Khi đó $A=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi}\frac{t.\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-A$

Vậy $A=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$

Đặt $\cos t=\tan u\Rightarrow -\sin tdt=\frac{du}{\cos^2 u}=(1+\cot^2 u)du\Leftrightarrow \sin tdt=-(1+\cot^2 u)du$ và $t:0\to\pi$ thì $u:\frac{\pi}{4}\to-\frac{\pi}{4}$

Suy ra $A=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\cos^2 u)du}{1+\cos^2 u}=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{\pi}{2}u\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{4}$ (1)

+) Tính $B=\int_0^{\pi}x\cos xdx$ Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\sin x\end{cases}$

Khi đó $B=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=0+\cos x\Big|_0^{\pi}=-2$ (2)

Thay (1) , (2) vào (*) ta được: $I_2=\frac{\pi^2}{4}-2$

3) $I_3=\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{3+\cos x}dx$ Đặt $x=2\pi-t\Rightarrow dx=-dt$ và $x:0\to 2\pi$ thì $t:2\pi\to 0$

Khi đó $I_3=\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{3+\cos x}dx=\int_0^{2\pi}\frac{(2\pi-t)\sin(2\pi-t)}{3+\cos(2\pi-t)}dt=\int_0^{2\pi}\frac{(2\pi-t)\sin t}{3+\cos t}dt=2\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{3+\cos t}dt-\int_0^{2\pi}\frac{t.\sin t}{3+\cos t}dt$

$$=-2\pi\int_0^{2\pi}\frac{d(3+\cos t)}{3+\cos t}-I_3=-2\pi\ln|3+\cos t|\Big|_0^{2\pi}-I_3=0-I_3=-I_3$$

Vậy $I_3=-I_3\Leftrightarrow I_3=0$

Bài toán 4: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì T, khi đó : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ (*)

Từ đó ta suy ra $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$ (2*)

Chứng minh: (Trong bài thi muốn sử dụng tính chất này các em cần chứng minh như sau)

Ta có: $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$ (1)

Xét tích phân: $\int_T^{a+T} f(x)dx$ Đặt $x = t + T \Rightarrow dx = dt$ và $x: T \to a+T$ thì $t: 0 \to a$

Khi đó $\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = -\int_a^0 f(t)dt = -\int_a^0 f(x)dx \Rightarrow \int_a^0 f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = 0$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ (*)

Chú ý: $f(x)$ có chu kì là T thì $f(x+T) = f(x)$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Tính các tích phân sau: **1)** $I_1 = \int_0^{2014\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$ **2)** $I_2 = \int_0^{2014\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}dx$

Giải:

1) $I_1 = \int_0^{2014\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$ Xét hàm $f(x) = \sqrt{1-\cos 2x}$ với $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $f(x+\pi) = \sqrt{1-\cos 2(x+\pi)} = \sqrt{1-\cos 2x} = f(x)$

Do đó áp dụng tính chất $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ (*) (trong bài các em phải **Chứng minh**) ta được:

$$I_1 = \int_0^{2014\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx + ... + \int_{2013\pi}^{2014\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx + \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx + ... + \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$$

$$= 2014\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = 2014\int_0^{\pi} \sqrt{2}\left|\sin x\right|dx = 2014\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x dx = -2014\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = 4028\sqrt{2}$$

Chú ý: Cách trình bày vừa rồi cũng là cách ta đi chứng minh $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$ (2*)

2) $I_2 = \int_0^{2014\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}dx$ **Hướng dẫn:** $f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = \left|\tan\frac{x}{2}\right|$ và $f(x+2\pi) = f(x)$

2. TÍCH PHÂN TRUY HỒI

Ở phần này các em sẽ đi tìm hiểu các dạng tích phân truy hồi $I_n = \int_\alpha^\beta f(x,n)dx$ với các câu hỏi hay gặp là:

1. Thiết lập công thức truy hồi $I_n = g(I_{n\pm k})$ với $k = \overline{1;n}$.
2. Chứng minh công thức truy hồi cho trước.
3. Sau khi thiết lập được công thức truy hồi yêu cầu đi tính I_n ứng với một vài giá trị n nào đó hoặc tính giới hạn của hàm số hoặc dãy số có liên quan với I_n.

CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Xét tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$

1. Tìm mối liên hệ giữa I_n và I_{n+2}.
2. Tính I_5 và I_6.
3. Tính I_n
4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = (n+1)I_n.I_{n+1}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Giải:

1. Tìm mối liên hệ giữa I_n và I_{n+2}.

+) Ta có: $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.(1-\cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.\cos^2 xdx = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.\cos^2 xdx$ (1)

+) Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.\cos^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.\cos x.\cos xdx$

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = \sin^n x.\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin xdx \\ v = \int \sin^n x.\cos xdx = \int \sin^n x.d\sin x = \dfrac{\sin^{n+1} x}{n+1} \end{cases}$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.\cos^2 xdx = \left.\dfrac{\cos x.\sin^{n+1} x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} xdx = 0 + \dfrac{I_{n+2}}{n+1} = \dfrac{I_{n+2}}{n+1}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $I_{n+2} = I_n - \dfrac{I_{n+2}}{n+1} \Leftrightarrow I_n = I_{n+2} + \dfrac{I_{n+2}}{n+1} \Leftrightarrow \boxed{I_n = \dfrac{n+2}{n+1}I_{n+2}}$

2. Tính I_5 và I_6. Ta có $I_n = \dfrac{n+2}{n+1}I_{n+2} \Leftrightarrow I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$. Khi đó :

$$\begin{cases} I_5 = \dfrac{4}{5}I_3 = \dfrac{4}{5}.\dfrac{2}{3}I_1 = \dfrac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = -\dfrac{8}{15}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{8}{15} \\ I_6 = \dfrac{5}{6}I_4 = \dfrac{5}{6}.\dfrac{3}{4}I_2 = \dfrac{15}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \dfrac{15}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 2x}{2}dx = \dfrac{15}{48}\left(x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{15\pi}{96} \end{cases}$$

3. Tính I_n Ta có: $\begin{cases} I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\ I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 2x}{2} dx = \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$. Với $I_n = \dfrac{n+2}{n+1} I_{n+2}$ (*)

+) Với n chẵn hay $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Áp dụng (*) ta được: $\begin{cases} I_2 = \dfrac{4}{3} I_4 \\ I_4 = \dfrac{6}{5} I_6 \\ ..... \\ I_{2k-2} = \dfrac{2k}{2k-1} I_{2k} \end{cases}$

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_2 = \frac{4.6...2k}{3.5...(2k-1)} I_{2k} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{4.6...2k}{3.5...(2k-1)} I_{2k} \Leftrightarrow I_{2k} = \frac{3.5...(2k-1)}{4.6...2k}.\frac{\pi}{4}$$

+) Với n lẻ hay $n = 2k-1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Áp dụng (*) ta được: $\begin{cases} I_1 = \dfrac{3}{2} I_3 \\ I_3 = \dfrac{5}{4} I_5 \\ ..... \\ I_{2k-3} = \dfrac{2k-1}{2k-2} I_{2k-1} \end{cases}$

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_1 = \frac{3.5...(2k-1)}{2.4...(2k-2)} I_{2k-1} \Leftrightarrow 1 = \frac{3.5...(2k-1)}{2.4...(2k-2)} I_{2k-1} \Leftrightarrow I_{2k-1} = \frac{2.4...(2k-2)}{3.5...(2k-1)}$$

4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = (n+1)I_n.I_{n+1}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Ta có: $u_n = (n+1)I_n.I_{n+1} = (n+1).\dfrac{n+2}{n+1} I_{n+2}.I_{n+1} = (n+2).I_{n+1}.I_{n+2} = u_{n+1}$

Vậy $u_{n+1} = u_n$ nên $u_n = u_{n-1} = ... = u_1 = 2I_1.I_2 = 2.1.\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

Chú ý: $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ (xem lại Bài toán 2 ở lớp tích phân đặc biệt)

Ví dụ 2. Xét tích phân $I_n = \int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$ **1.** Tính I_n . **2.** Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

Giải:

1. Tính $I_n = \int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$. Đặt $\begin{cases} u = (1-x^2)^n \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n.(1-x^2)^{n-1}.(-2x)dx \\ v = x \end{cases}$

Suy ra $I_n = x(1-x^2)^n\Big|_0^1 + 2n\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}dx$

$$= 2n\int_0^1\left[1-(1-x^2)\right]\left(1-x^2\right)^{n-1}dx = 2n\left[\int_0^1\left(1-x^2\right)^{n-1}dx - \int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx\right] = 2n\left(I_{n-1}-I_n\right)$$

$$= 2n\int_0^1\left[1-(1-x^2)\right]\left(1-x^2\right)^{n-1}dx = 2n\left[\int_0^1\left(1-x^2\right)^{n-1}dx - \int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx\right] = 2n\left(I_{n-1}-I_n\right)$$

Vậy $I_n = 2n\left(I_{n-1}-I_n\right) \Leftrightarrow I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$ (*)

Từ (*) ta có: $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \dfrac{2n}{2n+1}.\dfrac{2n-2}{2n-1}I_{n-2} = \dfrac{2n}{2n+1}.\dfrac{2n-2}{2n-1}...\dfrac{4}{5}.I_1 = \dfrac{4.6.8...2n}{5.7.9.(2n+1)}I_1$ (1)

Mặt khác: $I_1 = \int_0^1\left(1-x^2\right)dx = \left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{2}{3}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $I_n = \dfrac{2.4.6.8...2n}{3.5.7.9.(2n+1)}$

2. Ta có: $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1} \Rightarrow I_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2(n+1)+1}I_n \Leftrightarrow \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+2}{2n+3} = 1$

Ví dụ 3. Xét tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$

1. Chứng minh rằng: $I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$ **2.** Tính I_5 và I_6.

<u>Giải</u>:

1. Chứng minh rằng: $I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$

Ta có: $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(\tan^{n+2}x + \tan^n x\right) - \tan^n x\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\tan^n x\left(1+\tan^2 x\right) - \tan^n x\right]dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x d\tan x - I_n = \frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$$

Vậy $I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$ (đpcm).

2. Tính I_5 và I_6.

Ta có: $\begin{cases} I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{d\cos x}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{2}\ln 2 \\ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \left(\tan x - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{4-\pi}{4} \end{cases}$

Áp dụng công thức truy hồi $I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$

Ta có: $\begin{cases} I_5=\dfrac{1}{4}-I_3=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}-I_1\right)=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)=\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{1}{4} \\ I_6=\dfrac{1}{5}-I_4=\dfrac{1}{5}-\left(\dfrac{1}{3}-I_2\right)=\dfrac{1}{5}-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{4-\pi}{4}\right)=\dfrac{13}{15}-\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Ví dụ 4.

1. Xét tích phân $I_n=\int\limits_0^1\dfrac{e^{nx}dx}{1+e^x}$, với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $I_n=\dfrac{e^{n-1}-1}{n-1}-I_{n-1}$.

2. Xét tích phân $I_n=\int\limits_0^3(3-x)^n e^x dx$, với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $I_n=-3^n+nI_{n-1}$.

Giải:

1. Xét tích phân $I_n=\int\limits_0^1\dfrac{e^{nx}dx}{1+e^x}$, với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $I_n=\dfrac{e^{n-1}-1}{n-1}-I_{n-1}$.

Ta có $I_n+I_{n-1}=\int\limits_0^1\dfrac{e^{nx}dx}{1+e^x}+\int\limits_0^1\dfrac{e^{(n-1)x}dx}{1+e^x}=\int\limits_0^1\dfrac{e^{(n-1)x}\left(e^x+1\right)dx}{1+e^x}=\int\limits_0^1 e^{(n-1)x}dx=\left.\dfrac{e^{(n-1)x}}{n-1}\right|_0^1=\dfrac{e^{n-1}-1}{n-1}$

hay $I_n=\dfrac{e^{n-1}-1}{n-1}-I_{n-1}$ (đpcm).

2. Xét tích phân $I_n=\int\limits_0^3(3-x)^n e^x dx$, với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $I_n=-3^n+nI_{n-1}$.

Đặt $\begin{cases} u=(3-x)^n \\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=-n(3-x)^{n-1}dx \\ v=e^x\end{cases}$

Khi đó $I_n=(3-x)^n.e^x\Big|_0^3+n\int\limits_0^3(3-x)^{n-1}e^x dx=-3^n+nI_{n-1}$

Vậy $I_n=-3^n+nI_{n-1}$ (đpcm).

Ví dụ 5. Cho $I_n=\int\limits_0^1\sqrt{1-x}.x^n dx$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết (u_n) là dãy số cho bởi $u_n=\dfrac{I_n}{I_{n+1}}$ hãy tính $\lim u_n$.

Giải: Đặt $\begin{cases} u=x^n \\ dv=\sqrt{1-x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=nx^{n-1}dx \\ v=\int\sqrt{1-x}dx=-\dfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\end{cases}$ Khi đó :

$$I_n=-\dfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}.x^n\Big|_0^1+\dfrac{2}{3}n.\int\limits_0^1(1-x)\sqrt{1-x}.x^{n-1}dx=\dfrac{2}{3}n\left(\int\limits_0^1\sqrt{1-x}.x^{n-1}dx-\sqrt{1-x}.x^n dx\right)=\dfrac{2}{3}n\left(I_{n-1}-I_n\right)$$

Vậy $I_n=\dfrac{2}{3}n\left(I_{n-1}-I_n\right)\Leftrightarrow(2n+3)I_n=2nI_{n-1}\Leftrightarrow I_n=\dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}$

Suy ra $I_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+5}I_n\Leftrightarrow\dfrac{I_n}{I_{n+1}}=\dfrac{2n+2}{2n+5}\Rightarrow\lim u_n=\lim I_{n+1}=\lim\dfrac{2n+2}{2n+5}=1$

VII. DÙNG TÍCH PHÂN ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC C_n^k

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Bước 1 : Khai triển $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$.

Bước 2 : Lấy tích phân hai vế với cận thích hợp : $\int_\alpha^\beta (1+x)^n dx = \int_\alpha^\beta \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right) dx$

(Nếu mỗi hệ số trong đẳng thức cần chứng minh có chứa $b^k - a^k$ thì ta chọn cận tích phân là $\int_a^b$).

DẤU HIỆU NHẬN BIẾT : Các hệ số trong đẳng thức cần chứng minh có dạng phân số, đồng thời các mẫu số thường tăng hoặc giảm đi một đơn vị.

CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Với $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

1) $8C_n^0 + \frac{20^2 - 12^2}{2} C_n^1 + \frac{20^3 - 12^3}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{20^{n+1} - 12^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{21^{n+1} - 13^{n+1}}{n+1}$

2) $4C_n^0 + \frac{4^2}{2} C_n^1 + \frac{4^3}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{4^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{5^{n+1} - 1}{n+1}$.

3) $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

4) $5C_n^0 + \frac{6^2 - 1}{2} C_n^1 + \frac{6^3 - 1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{6^{n+1} - 1}{n+1} C_n^n = \frac{7^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$

Giải:

1) $8C_n^0 + \frac{20^2 - 12^2}{2} C_n^1 + \frac{20^3 - 12^3}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{20^{n+1} - 12^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{21^{n+1} - 13^{n+1}}{n+1}$

+) Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$

+) Suy ra: $\int_{12}^{20} (1+x)^n dx = \int_{12}^{20} \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right) dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_{12}^{20} = \left.\left(C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + C_n^2 \frac{x^3}{3} + \ldots + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_{12}^{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{21^{n+1} - 13^{n+1}}{n+1} = 8C_n^0 + \frac{20^2 - 12^2}{2} C_n^1 + \frac{20^3 - 12^3}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{20^{n+1} - 12^{n+1}}{n+1} C_n^n$$

Hay $8C_n^0 + \frac{20^2 - 12^2}{2} C_n^1 + \frac{20^3 - 12^3}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{20^{n+1} - 12^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{21^{n+1} - 13^{n+1}}{n+1}$ (đpcm).

2) $4C_n^0+\frac{4^2}{2}C_n^1+\frac{4^3}{3}C_n^2+...+\frac{4^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{5^{n+1}-1}{n+1}$.

+) Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

+) Suy ra: $\int_0^4(1+x)^n dx=\int_0^4\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^4=\left.\left(C_n^0x+C_n^1\frac{x^2}{2}+C_n^2\frac{x^3}{3}+...+C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_0^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{5^{n+1}-1}{n+1}=4C_n^0+\frac{4^2}{2}C_n^1+\frac{4^3}{3}C_n^2+...+\frac{4^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

Hay $4C_n^0+\frac{4^2}{2}C_n^1+\frac{4^3}{3}C_n^2+...+\frac{4^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{5^{n+1}-1}{n+1}$ (đpcm).

3) $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

+) Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

+) Suy ra: $\int_0^1(1+x)^n dx=\int_0^1\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\left.\left(C_n^0x+C_n^1\frac{x^2}{2}+C_n^2\frac{x^3}{3}+...+C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1}=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n$$

Hay $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (đpcm).

4) $5C_n^0+\frac{6^2-1}{2}C_n^1+\frac{6^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{6^{n+1}-1}{n+1}C_n^n=\frac{7^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$

+) Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

+) Suy ra: $\int_1^6(1+x)^n dx=\int_1^6\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_1^6=\left.\left(C_n^0x+C_n^1\frac{x^2}{2}+C_n^2\frac{x^3}{3}+...+C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_1^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{7^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}=5C_n^0+\frac{6^2-1}{2}C_n^1+\frac{6^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{6^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

Hay $5C_n^0+\frac{6^2-1}{2}C_n^1+\frac{6^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{6^{n+1}-1}{n+1}C_n^n=\frac{7^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$ (đpcm).

Ví dụ 2 (B – 2003) Cho n là số nguyên dương. Tính tổng: $C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$

Giải:

+) Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

+) Suy ra: $\int_1^2(1+x)^n dx=\int_1^2\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_1^2=\left.\left(C_n^0x+C_n^1\frac{x^2}{2}+C_n^2\frac{x^3}{3}+...+C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}=C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

Vậy $C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$

Ví dụ 3 :Với $n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

1) $C_n^0-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-\frac{1}{4}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}$

2) $\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ **(A – 2007)**

3) $C_{2n}^0+\frac{1}{3}C_{2n}^2+\frac{1}{5}C_{2n}^4+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}=\frac{4^n}{2n+1}$

Giải:

1) $C_n^0-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-\frac{1}{4}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}$

+) Ta có: $(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+...+(-1)^nC_n^nx^n$

+) Suy ra: $\int_0^1(1-x)^n dx=\int_0^1\left(C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+...+(-1)^nC_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow -\left.\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\left.\left(C_n^0x-C_n^1\frac{x^2}{2}+C_n^2\frac{x^3}{3}-C_n^3\frac{x^4}{4}+...+(-1)^nC_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}=C_n^0-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-\frac{1}{4}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n$$

Hay $C_n^0-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-\frac{1}{4}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}$ (đpcm).

2) $\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ **(A – 2007)**

+) Ta có: $\begin{cases}(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^3x^3+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n} & (1)\\(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2-C_{2n}^3x^3+...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n} & (2)\end{cases}$

+) Lấy (1) – (2) ta được: $(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}=2\left(C_{2n}^1x+C_{2n}^3x^3+C_{2n}^5x^5+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}=C_{2n}^1x+C_{2n}^3x^3+C_{2n}^5x^5+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}$$

+) Suy ra: $\int_0^1\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\int_0^1\left(C_{2n}^1x+C_{2n}^3x^3+C_{2n}^5x^5+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{(1+x)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^1=\left(C_{2n}^1\frac{x^2}{2}+C_{2n}^3\frac{x^4}{4}+C_{2n}^5\frac{x^6}{6}+...+C_{2n}^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2n}-1}{2n+1}=\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}$$

Hay $\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ (đpcm).

3) $C_{2n}^0+\frac{1}{3}C_{2n}^2+\frac{1}{5}C_{2n}^4+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}=\frac{4^n}{2n+1}$

+) Ta có: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

+) Suy ra: $\int_{-1}^1(1+x)^{2n}dx=\int_{-1}^1\left(C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_{-1}^1=\left(C_{2n}^0x+C_{2n}^1\frac{x^2}{2}+C_{2n}^2\frac{x^3}{3}+...+C_{2n}^{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_{-1}^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1}=2C_{2n}^0+\frac{2}{3}C_{2n}^2+\frac{2}{5}C_{2n}^4+...+\frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n}$$

Hay $C_{2n}^0+\frac{1}{3}C_{2n}^2+\frac{1}{5}C_{2n}^4+...+\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}=\frac{4^n}{2n+1}$ (đpcm).

VIII. KINH NGHIỆM GIẢI BÀI TOÁN TÍCH PHÂN ĐẠI HỌC

Qua 7 phần chúng ta được tìm hiểu ở trên, các em sẽ nhận thấy trong tích phân ta có trong tay hai công cụ chính để giải quyết là ĐỔI BIẾN và TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN cùng một vài kĩ thuật để làm cho hai công cụ trên phát huy tác dụng như: Tách tích phân (dùng phương pháp đồng nhất hệ số, thêm bớt…), kĩ thuật nhân, chia dưới dấu tích phân, kĩ thuật vi phân, dùng các công thức để biến đổi (công thức lượng giác, hằng đẳng thức…), sử dụng tích phân liên kết (quan sát để tìm tích phân liên kết, sử dụng cận để đổi biến, sử dụng các đẳng thức và tính chẵn lẻ của hàm số…). Vì vậy chúng ta có thể tổng kết lại như sau :

Khi đứng trước một bài toán tích phân các em sẽ có những hướng đi :

TH1: Nếu dưới dấu tích phân có căn :

+) Hướng tư duy 1: Đặt t bằng căn (đã đúng cho tất cả các đề thi Đại Học – Cao Đẳng từ 2002 – 2013).
Nếu không ổn hãy chuyển sang:

+) Hướng tư duy thứ 2: Với tích phân $I=\int_{\alpha}^{\beta} f(\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ mà $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ta biến đổi về dạng:

*) $\sqrt{m^2-u^2}$ thì đặt $u=m\sin t \quad (u=m\cos t)$ *) $\sqrt{u^2-m^2}$ thì đặt $u=\dfrac{m}{\cos t} \quad (u=\dfrac{m}{\sin t})$

*) $\sqrt{u^2+m^2}$ thì đặt $u=m\tan t \quad (u=m\cot t)$ *) $\sqrt{u-u^2}$ thì đặt $u=\sin^2 t \quad (u=\cos^2 t)$

Với tích phân $I=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\sqrt{\dfrac{m\pm x}{m\mp x}}\right)dx$ thì đặt $x=m\cos 2t$.

__CHÚ Ý__: Với tích phân có dạng $\int_{\alpha}^{\beta}\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}$ thì ta có thể không dùng tới phương pháp trên. Cụ thể ta biến đổi:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x+\sqrt{x^2\pm k})dx}{(x+\sqrt{x^2\pm k})\sqrt{x^2\pm k}}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d(x+\sqrt{x^2\pm k})}{(x+\sqrt{x^2\pm k})}=\ln(x+\sqrt{x^2\pm k})\Big|_{\alpha}^{\beta}=...$$

Nếu vẫn chưa ổn hãy chuyển sang :

+) Hướng tư duy thứ 3: Nhân với lượng liên hợp tương ứng rồi quay về 2 hướng tư duy đầu.

TH2 : Nếu dưới dấu tích phân có hàm lượng giác và hàm mũ có dạng $\sin u$ và e^u mà $u\neq ax+b$ (nghĩa là u không là hàm bậc nhất hoặc bậc không) thì điều đầu tiên là đặt $t=u$. Sau đó quay về **TH1** hoặc **TH3**.

TH3: Nếu dưới dấu tích phân xuất hiện hai trong bốn hàm: log, đa thức (kể cả phân thức), lượng giác và mũ liên hệ với nhau bởi phép nhân thì đi theo :

+) Hướng tư duy 1:Sử dụng tích phân từng phần theo thứ tự ưu tiên "u→dv" là :

"log → đa thức → lượng giác → mũ"

(nghĩa là anh nào đứng trước trong thứ tự thầy nêu thì đặt là u còn anh đứng sau là dv: $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$)

(Các em có thể có cách nhớ "hài hước" theo thứ tự "u→dv" là: "nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ").
Nếu vẫn chưa ổn thì chuyển sang:

+) Hướng tư duy 2: Sử dụng kĩ thuật vi phân ($du=u'dx \quad (**)$) và đổi biến

Nếu sử dụng (**) :

+) theo chiều thuận (từ Trái →Phải): các em phải đi tính đạo ĐẠO HÀM.

+) theo chiều nghịch (từ Phải →Trái): các em phải đi tính NGUYÊN HÀM.

Các em có thể nhớ theo cách sau : "đưa vào vi phân thì tính NGUYÊN HÀM, đưa ra thì tính ĐẠO HÀM".

TH4: Nếu dưới dấu tích phân có dạng hữu tỉ: $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x)}{g(x)}dx$

+) Hướng tư duy 1: Nếu bậc $f(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc $g(x)$. Thì thực hiện phép chia chuyển I về dạng:

$I=\int_{\alpha}^{\beta}\left(h(x)+\frac{r(x)}{g(x)}\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}h(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{r(x)}{g(x)}dx=I_1+I_2$. Với I_1 tính đơn giản và tính I_2 sẽ chuyển sang:

+) Hướng tư duy 2: Nếu bậc của $f(x)$ nhỏ hơn bậc $g(x)$ thì hãy đi theo thứ tự:

*) Hướng tư duy 2.1: Nếu $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{ax+b}\Rightarrow I=A\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax+b}=\frac{A}{a}\ln|ax+b|\Big|_{\alpha}^{\beta}=?$

*) Hướng tư duy 2.2: Nếu $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ thì biến đổi $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{k\left(ax^2+bx+c\right)'+l}{ax^2+bx+c}dx$

$$=k\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+l\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}=k\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}+l.I_3$$

và đi tính $I_3=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ bằng cách chuyển sang Hướng tư duy 2.3:

*) Hướng tư duy 2.3: Nếu $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{ax^2+bx+c}\Rightarrow I=A\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ thì:

**) <u>Khả năng 1</u>: $I=A\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{a(x_2-x_1)}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{x-x_2}-\frac{1}{x-x_1}\right)dx=\frac{A}{a(x_2-x_1)}\ln\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}=?$

**) <u>Khả năng 2</u>: $I=A\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a(x-x_0)^2}=-\frac{A}{a(x-x_0)}\Big|_{\alpha}^{\beta}=?$

**) <u>Khả năng 3</u>: $I=\frac{A}{a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(x+x_0)^2+k^2}$ thì đặt $x+x_0=k\tan t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{kdt}{\cos^2 t}=k(1+\tan^2 t)dt\\(x+x_0)^2+k^2=k^2(1+\tan^2 t)\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{A}{a}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{k(1+\tan^2 t)}{k^2(1+\tan^2 t)}dt=\frac{A}{ka}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}dt=\frac{A(\beta_1-\alpha_1)}{ka}\Big|_{\alpha}^{\beta}=?$$

*) Hướng tư duy 2.4: Nếu $g(x)$ có bậc lớn hơn 2 thì tìm cách đưa về 3 hướng tư duy 2.1, 2.2, 2.3 bằng các kĩ thuật: +) Đổi biến hoặc tách ghép, nhân, chia để giảm bậc.

+) Đồng nhất hệ số theo thuật toán:

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^m(cx^2+dx+e)^n}=\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+...+\frac{A_m}{(ax+b)^m}+\frac{B_1x+C_1}{(cx^2+dx+e)}+\frac{B_2x+C_2}{(cx^2+dx+e)^2}+...+\frac{B_nx+C_n}{(cx^2+dx+e)^n}$$

Sau đó quy đồng bỏ mẫu số rồi dùng tính chất "hai đa thức bằng nhau khi các hệ số tương ứng bằng nhau" từ đó ta sẽ tìm được các A_i,B_j,C_j $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ hoặc có thể dùng cách chọn x để tìm các A_i,B_j,C_j.

TH5: Nếu dưới dấu tích phân có dạng lượng giác: $I=\int_{\alpha}^{\beta} f(\sin x,\cos x)dx$ thì:

+) Hướng tư duy 1: Nếu $I=\int_{\alpha}^{\beta}\sin^m x.\cos^n xdx$ $(m,n\in Z)$ thì dựa vào tính chẵn, lẻ để đổi biến.Cụ thể:

*) Nếu m,n khác tính chẵn lẻ thì các em sẽ đặt t theo anh mang mũ chẵn. Cụ thể :

**) m chẵn, n lẻ thì đặt $t=\sin x$ **) m lẻ, n chẵn thì đặt $t=\cos x$

*) Nếu m,n cùng tính chẵn lẻ. Cụ thể :

**) m,n đều lẻ thì đặt $t=\sin x$ hoặc $t=\cos x$ (kinh nghiệm là nên đặt theo anh mang mũ lớn hơn).

**) m,n đều chẵn thì đặt $t=\tan x$ (hoặc $t=\cot x$) hoặc dùng công thức hạ bậc, biến đổi lượng giác.

+) Hướng tư duy 2 : Nếu $I=\int_{\alpha}^{\beta} f(\sin x).\cos xdx$ thì đặt $t=\sin x$

và $I=\int_{\alpha}^{\beta} f(\cos x).\sin xdx$ thì đặt $t=\cos x$

+) Hướng tư duy 3: Nếu $f(\sin x,\cos x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ trong đó $h(x),g(x)$ chứa các hàm lượng giác thì:

*) Hướng tư duy 3.1 : Ý nghĩ đầu tiên hãy tính $g'(x)$ và nếu phân tích được $h(x)=u.g(x)+l(g(x)).g'(x)$

thì khi đó $I=\int_{\alpha}^{\beta}udx+\int_{\alpha}^{\beta}r(g(x)).g'(x)dx=I_1+I_2$ và tính $I_2=\int_{\alpha}^{\beta}r(g(x)).g'(x)dx$ bằng các đổi biến: $t=g(x)$

(Hướng tư duy này có thể áp dụng với $h(x),g(x)$ chứa các hàm khác như loga, đa thức, mũ…)

Nếu việc phân tích $h(x)$ gặp khó khăn ta chuyển tới việc làm "thủ công" qua Hướng tư duy 3.2

*) Hướng tư duy 3.2: Nếu $h(x),g(x)$ là các hàm bậc nhất theo $\sin x$ và $\cos x$ thì dùng phương pháp đồng nhất hệ số. Cụ thể :

**) $\dfrac{h(x)}{g(x)}=\dfrac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}=A\dfrac{c\sin x+d\cos x}{c\sin x+d\cos x}+B\dfrac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x}$. Khi đó:

$$I=A\int_{\alpha}^{\beta}dx+B\int_{\alpha}^{\beta}\frac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x}dx=A\int_{\alpha}^{\beta}dx+B\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d(c\sin x+d\cos x)}{c\sin x+d\cos x}=\left(A.x+B\ln\left|c\sin x+d\cos x\right|\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}=?$$

**) $\dfrac{h(x)}{g(x)}=\dfrac{a\sin x+b\cos x+e}{c\sin x+d\cos x+h}=A\dfrac{c\sin x+d\cos x+h}{c\sin x+d\cos x+h}+B\dfrac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x+h}+C\dfrac{1}{c\sin x+d\cos x+h}$.

Khi đó: $I=\left(Ax+B\ln\left|c\sin x+d\cos x+h\right|\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}+C.I_3$ và ta tính $I_3=\int_{\alpha}^{\beta}\dfrac{dx}{c\sin x+d\cos x+h}$ bằng hai cách:

C1: Dùng công thức biến đổi lượng giác để chuyển về các công thức lượng giác trong bảng nguyên hàm . Nếu không ổn hãy chuyển sang :

C2: Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ và $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ Sau đó quay về **TH4**

*) Hướng tư duy 3.3: Nếu $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx$ (**hoặc** $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{f(\cot x)}{\sin^2 x}dx$) thì đặt $t=\tan x$ (**hoặc** $t=\cot x$)

Với trường hợp hay gặp : $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{f(\tan x).dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x}$ (hoặc $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{f(\cot x).dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x}$)

thì biến đổi: $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x(a\tan^2 x+b\tan x+c)}dx$ sau đó đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}\Rightarrow I=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{f(t)}{at^2+bt+c}dt$

Sau đó quay về **TH4**

*) Hướng tư duy 3.4: Nếu $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(\sin x\pm\cos x;\sin x\cos x)dx$ đặt $t=\sin x\pm\cos x\Rightarrow\begin{cases}dt=(\cos x\mp\sin x)dx\\ \sin x\cos x=\pm\frac{t^2-1}{2}\end{cases}$

Sau đó quay về **TH4**

TH6: Khi gặp tích phân chỉ chứa hàm log hoặc chỉ chứa hàm mũ thì ta có các hướng đi sau :

*) Hướng tư duy 1: Nếu có dạng $I=\int\limits_{a}^{b}\frac{f(\ln u)}{u}dx$ thì đặt $t=\ln u$

(hoặc đặt $t=g(\ln u)$ nghĩa là đặt t bằng một hàm theo $\ln u$).

Nếu dưới dấu tích phân có mặt $\log_a u$ thì các em nên chuyển về $\ln u$ bằng công thức : $\log_a u=\frac{\ln u}{\ln a}$.

*) Hướng tư duy 2: Nếu có dạng $I=\int\limits_{a}^{b}f(e^x)dx$ thì đặt $t=e^x$ (hoặc t bằng một hàm theo e^x).

TH7: Nếu dưới dấu tích phân có dấu trị tuyệt đối $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$ thì tìm cách phá trị tuyệt đối bằng cách đi xét dấu của $f(x)$ trong đoạn $[\alpha;\beta]$. Cụ thể:

B1: Giải phương trình $f(x)=0\Rightarrow x_i=?$ và chọn các $x_i\in[\alpha;\beta]$ rồi chuyển sang:

B2: Lập bảng xét dấu: (Giả sử ta bảng xét dấu: 

)

B3: Ta dựa vào công thức $\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx+\int\limits_{\gamma}^{\beta}f(x)dx$ ($\alpha<\gamma<\beta$) để tách :

$I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx=\int\limits_{\alpha}^{x_i}|f(x)|dx+\int\limits_{x_i}^{\beta}|f(x)|dx=\int\limits_{\alpha}^{x_i}f(x)dx-\int\limits_{x_i}^{\beta}f(x)dx$. Sau đó chuyển về sáu **TH** đầu.

TH8: Khi bài toán yêu cầu tính diện tích hình phẳng hoặc thể tích vật thể tạo ra khi quay hình phẳng qua trục Ox, Oy thì các em cần nhớ kiến thức sau:

Hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$\begin{cases}y=f(x)\\ y=g(x)\\ x=a;\quad x=b>a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S=\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|dx & (2^*)\\ V_{0x}=\pi\int\limits_a^b|f^2(x)-g^2(x)|dx & (3^*)\end{cases}\to\begin{cases}S=\int\limits_a^b|f(x)|dx\\ V_{0x}=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx\end{cases}\text{(nếu } y=g(x)=0)$$

Nếu không dựa vào hình vẽ và cần phá trị tuyệt đối thì chuyển về **TH6** .