A 2014 MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Somme de projecteurs

Notations

On note $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension n sur le corps des réels et T un endomorphisme de X.

Soit $\mathscr{B}$ une base de X, on note $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ la matrice représentant T dans cette base.

On note $N(\mathrm{T})$ le noyau de T et $R(\mathrm{T})$ l'image de T.

On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité.

On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent, c'est-à-dire tel que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$.

On note I l'endomorphisme identité de X, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n$ et $\mathbb{O}$ la matrice nulle.

1 Trace

Si $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant :

$$\operatorname{tr} \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Question 1 *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_n$, montrer que $\operatorname{tr} \mathbb{A}\mathbb{B} = \operatorname{tr} \mathbb{B}\mathbb{A}$.*

Question 2 *Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ associée à T est indépendante de la base $\mathscr{B}$.*

On appelle trace de T, notée $\operatorname{tr} \mathrm{T}$, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.

Question 3 *Démontrer que si $\mathrm{T} \neq 0$ n'est pas une homothétie, alors pour $n \geq 2$, il existe un vecteur $x \in X$ tel que x et $\mathrm{T}x$ ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).*

Question 4 *Montrer que si $\mathrm{T} \neq 0$ n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ soit de la forme suivante :*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & \mathbb{A} & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right] \quad \text{où } \mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n-1}.$$

Question 5 *En déduire que si* $\operatorname{tr}\mathrm{T}=0$, *il existe une base* $\mathscr{B}'$ *dans laquelle la diagonale de* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ *est nulle.*

2 Projecteurs

Soit P un projecteur de X.

Question 6 *Démontrer que* $X = N(\mathrm{P}) \oplus R(\mathrm{P})$.

Question 7 *En déduire que* $\operatorname{rg}\mathrm{P}=\operatorname{tr}\mathrm{P}$.

Supposons maintenant que le rang de P soit égal à 1.

Question 8 *Démontrer qu'il existe* $\mu \in \mathbf{R}$ *tel que* $\mathrm{PTP}=\mu\mathrm{P}$.

Question 9 *Montrer que si* μ *est le nombre réel dont l'existence découle de la question* **8**, *il existe une base* $\mathscr{C} = \left\{f_1, f_2, \ldots, f_n\right\}$ *dans laquelle*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \left[\begin{array}{c|c} \mu & \times \quad \times \\ \hline \times & \\ \times & \mathbb{B} \end{array}\right] \tag{1}$$

où $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_{n-1}$.

On pose $\mathrm{P}' = \mathrm{I} - \mathrm{P}$, $\mathbb{T}'_{\mathscr{B}} = \mathbb{I}_n - \mathbb{T}_{\mathscr{B}}$.

Question 10 *Montrer que* $R\left(\mathrm{P}'\right) = N(\mathrm{P})$ *et que* $R(\mathrm{P}) = N\left(\mathrm{P}'\right)$.

Question 11 *Montrer que si* $\mathrm{P}'\mathrm{T}\mathrm{P}'$ *n'est pas proportionnel à* P', *alors* $\mathbb{B}$, *défini en* (1), *n'est pas la matrice d'une homothétie.*

Soit $t \in \mathbf{R}$, on admettra qu'il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $\mathrm{LTL}= t\mathrm{L}$ et d'autre part $\mathrm{L}'\mathrm{T}\mathrm{L}'$ ne soit pas proportionnel à $\mathrm{L}' = \mathrm{I} - \mathrm{L}$.

On suppose que T n'est pas une homothétie, et que les t_i, $i = 1, n$ sont tels que $\operatorname{tr}\mathrm{T}= \sum_{i=1}^{n} t_i$.

Question 12 *A l'aide des questions* **9** *et* **11** *démontrer qu'il existe une base* $\mathscr{C}$ *telle que*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \left[\begin{array}{c|c} t_1 & \times \quad \times \\ \hline \times & \\ \times & \mathbb{B} \end{array}\right] \quad \text{où } \mathbb{B} \text{ n'est pas une homothétie.}$$

Question 13 *En dimension* $n = 2$, *démontrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}''$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ *ait pour éléments diagonaux les* t_i, $i = 1, 2$.

Question 14 *En dimension* $n > 2$, *démontrer par récurrence qu'il existe une base* $\mathscr{B}''$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ *ait pour éléments diagonaux les* t_i, $i = 1, n$.

3 Somme de projecteurs

Question 15 *Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de X est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.*

Question 16 *Montrer que si* T *est un endomorphisme de X et si c'est une somme finie de projecteurs* P_i, $i = 1, m$, *alors* $\operatorname{tr}\mathrm{T} \in \mathbf{N}$ *et* $\operatorname{tr}\mathrm{T} \geq \operatorname{rg}\mathrm{T}$.

On suppose désormais que T vérifie $\operatorname{tr}\mathrm{T} \in \mathbf{N}$ et $\operatorname{tr}\mathrm{T} \geq \operatorname{rg}\mathrm{T}$. On pose $\rho = \operatorname{rg}\mathrm{T}$ et $\theta = \operatorname{tr}\mathrm{T}$.

Question 17 *Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ est de la forme suivante :*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \begin{array}{cc} \rho & \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{array}\right] \\ & \rho \end{array}$$

Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ ne soit pas la matrice d'une homothétie

Question 18 *A l'aide de la question* **14** *montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}''} = \begin{bmatrix} t_1 & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & t_\rho & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \times \\ \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où les } t_i,\ i = 1, \rho \text{ sont des entiers non nuls.}$$

Question 19 *En déduire que* T *est la somme d'un nombre fini de projecteurs.*

On suppose maintenant que $\mathbb{T}_1$ est la matrice d'une homothétie.

Question 20 *Démontrer que là encore,* T *est la somme d'un nombre fini de projecteurs.*

Fin de l'épreuve