D Y N A M I K A

DYNAMIKA: badanie ruchu ciał materialnych oraz związków pomiędzy siłami i ruchem, korzystając z pojęć kinematyki.

SIŁA – pojęcie pierwotne

SIŁA – wynik wzajemnego mechanicznego oddziaływania na siebie co najmniej dwóch ciał. Oddziaływania te przejawiają się przez wyprowadzenie ciała ze stanu spoczynku lub zmianę parametrów ruchu ciała już poruszającego się[1].

PRAWA NEWTONA (1687)

I prawo Newtona (prawo bezwładności)

II prawo Newtona (prawo zmienności ruchu)

III prawo Newtona (prawo akcji i reakcji)

Prawa Newtona są słuszne przy założeniu istnienia NIERUCHOMEGO UKŁADU ODNIESIENIA, związanego z ABSOLUTNĄ PRZESTRZENIĄ oraz czasu niezależnego od układu odniesienia - CZASU ABSOLUTNEGO.

Układ Galileusza, układ bezwładnościowy (inercyjny)

W ZAGADNIENIACH TECHNICZNYCH
UKŁADEM ODNIESIENIA JEST ZIEMIA

(w pewnych przypadkach – SŁOŃCE).

[1] Uwaga – szersza definicja pojęcia siły została przedstawiona we wprowadzeniu do mechaniki (rozdz. 1).

DYNAMICZNE RÓWNANIE RUCHU PUNKTU MATERIALNEGO

MASA
(stały współczynnik proporcjonalności)

$$\boxed{m \cdot \vec{a} = \vec{P}}$$

PRZYSPIESZENIE PUNKTU wywołane oddziaływaniem siły P

SIŁA DZIAŁAJĄCA NA PUNKT MATERIALNY

SKALARNIE:

$$\boxed{m \cdot a = P}$$

MASA [kg]

PRZYSPIESZENIE [m/s^2]

$$\boxed{\text{SIŁA: } P = m \cdot a = \boxed{kg\frac{m}{s^2}} = 1 \text{ NEWTON (niuton)}}$$

ZASADA NIEZALEŻNOŚCI DZIAŁANIA SIŁ

Przyspieszenie punktu materialnego na który działają siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n$, równe jest sumie geometrycznej przyspieszeń, które miał ten punkt, gdyby każda z tych sił działała na niego osobno.

ZAGADNIENIE (ZADANIE) PROSTE

$\vec{P} \longrightarrow$ **OBIEKT** (punkt, ciało) $\longrightarrow \vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{z}(t)$

Znane skutki – nieznane przyczyny

Rozwiązywanie zagadnień prostych:

Dane: równania ruchu $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$

Szukane: siły

$$P_x = m \cdot \ddot{x}$$

$$P_y = m \cdot \ddot{y}$$

$$P_z = m \cdot \ddot{z}$$

Wypadkowa wartość siły: $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$

Cosinusy kierunkowe wypadkowej:

$$\cos(\vec{P}, x) = \frac{P_x}{P}, \cos(\vec{P}, y) = \frac{P_y}{P}, \cos(\vec{P}, z) = \frac{P_z}{P}$$

ZAGADNIENIE (ZADANIE) ODWROTNE

Znane przyczyny – nieznane skutki

Rozwiązywanie zagadnień odwrotnych:

Dane: siły $\vec{P} = \vec{P}(t)$, współrzędne położenia (x, y, z), prędkość

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})}$$

Szukane: równania ruchu $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$

$$\boxed{\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= P_x \\ m \cdot \ddot{y} &= P_y \\ m \cdot \ddot{z} &= P_z \end{aligned}}$$

METODY NUMERYCZNE

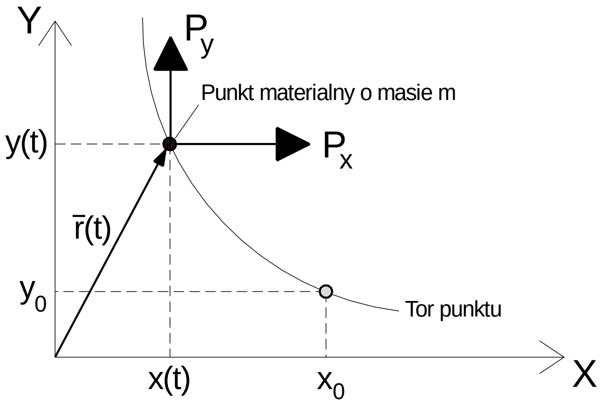
ZAŁOŻENIE: P = const

RUCH SWOBODNY

Ruch swobodny nie jest ograniczony działaniem więzów:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{P}$$

Opis ruchu punktu materialnego w ruchu swobodnym we współrzędnych kartezjańskich przy stałej sile czynnej P = const dla znanego przyspieszenia $\vec{a}(t) = \left(a_X(t), a_y(t)\right) = \left(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)\right)$,:



Składowe siły P:

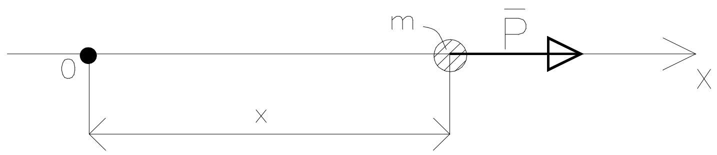
$$\left.\begin{aligned} P_x &= m \cdot \ddot{x}(t) \\ P_y &= m \cdot \ddot{y}(t) \end{aligned}\right\} \quad P(t) = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}.$$

<u>Warunki początkowe</u>: dla t = 0 punkt m startuje z położenia $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ z prędkością początkową $\vec{v}_0 = (v_{0X}, v_{0Y})$.

Współrzędne ruchu punktu:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0X} \cdot t + \frac{P_x}{m}\frac{t^2}{2}, \\ y(t) &= y_0 + v_{0Y} \cdot t + \frac{P_y}{m}\frac{t^2}{2}. \end{aligned}}$$

RUCH PROSTOLINIOWY PUNKTU MATERIALNEGO:

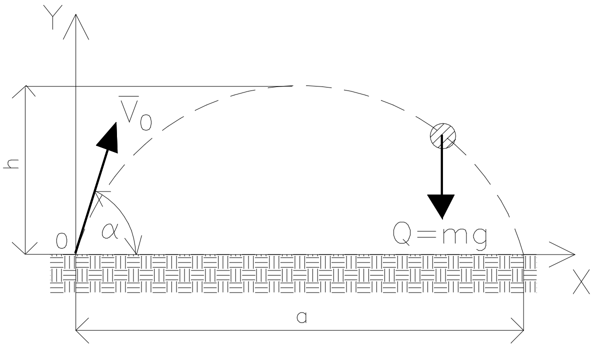


II prawo Newtona:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{P} \qquad \to \qquad m \cdot a_x = P_x \qquad \to \qquad m \cdot a = P$$

Zależności z kinematyki:	Dynamika:
$v_x = \dot{x}$ $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$	$P = P(t, x, \dot{x})$ $m \cdot \ddot{x} = P(t, x, \dot{x})$ $x = x(t, C_1, C_2)$ Warunki początkowe: $(x)_{t=0} = x_0, \qquad (\dot{x})_{t=0} = v_0$

RUCH KRZYWOLINIOWY PUNKTU MATERIALNEGO. RZUT UKOŚNY W PRÓŻNI



Równania dynamiczne ruchu dla osi X i Y:	
$P_x = 0$ $m \cdot \ddot{x} = 0$ $v_x = \dot{x} = C_1$ $x = C_1 t + C_2$	$P_y = -G = -mg$ $m \cdot \ddot{y} = -mg$ $v_y = \dot{y} = -gt + C_3 \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4$

Warunki początkowe:

$(x)_{t=0} = 0$ $(v_x)_{t=0} = v_0 \cdot \cos\alpha$	$(y)_{t=0} = 0$ $(v_y)_{t=0} = v_0 \cdot \sin\alpha$

Stałe całkowania:

$C_1 = v_0 \cdot \cos\alpha \quad C_2 = 0$	$C_3 = v_0 \cdot \sin\alpha \quad C_4 = 0$
$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$ $x = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t$	$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - gt$ $y = (v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}$

Równanie toru:

$$\boxed{y = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x^2}$$

Analiza ruchu:

$$y = 0 \quad x = a \quad a = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \quad a_{max} = \frac{v_0^2}{g} \qquad \text{dla}\, \alpha = 45^\circ$$

$$x = \frac{1}{2}a \qquad y = h \quad h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha \quad h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \qquad \text{dla}\, \alpha = 90^\circ$$

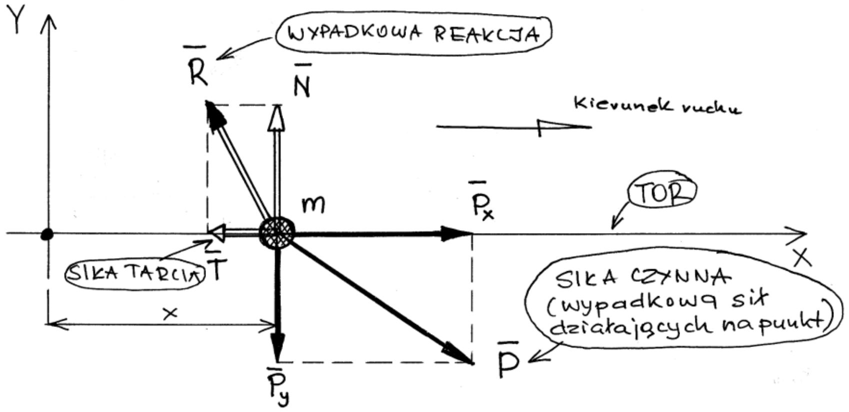
(rzut pionowy w górę)

RUCH NIESWOBODNY

Ruch swobodny ograniczony działaniem więzów i ich reakcji.

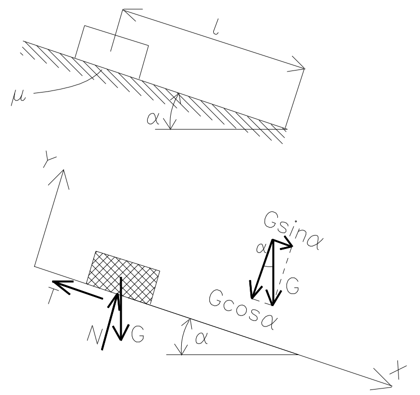
$$m \cdot \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

RUCH PROSTOLINIOWY PUNKTU MATERIALNEGO:



Schemat sił w ruchu nieswobodnym prostoliniowym (z uwzględnieniem sił tarcia)

Przykład ruchu prostoliniowego nieswobodnego:



Równanie dynamiczne ruchu dla osi X:	Równanie dynamiczne ruchu dla osi Y:
$m \cdot \ddot{x} = G\sin\alpha - T$	$m \cdot \ddot{y} = N - G\cos\alpha$ $\quad \boxed{\ddot{y} = 0}$ $N = G \cdot \cos\alpha,\ T = \mu N = \mu G \cdot \cos\alpha$

Przyspieszenie ciała w ruchu nieswobodnym:

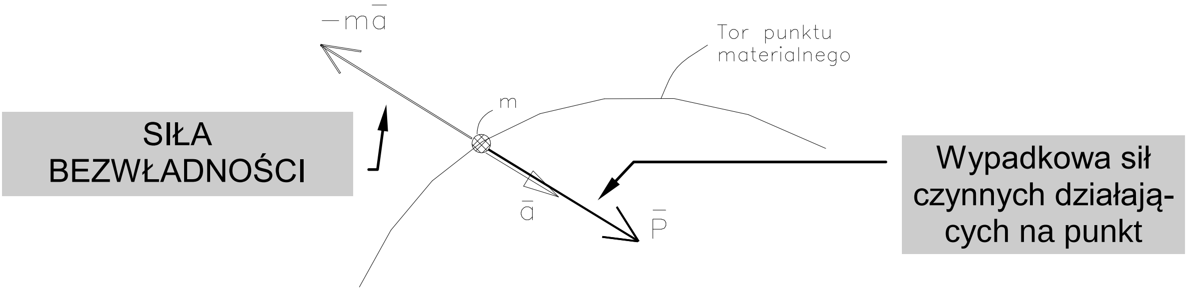
$$\boxed{m \cdot a = G(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \quad \rightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)}.$$

SIŁA BEZWŁADNOŚCI

$$m \cdot \vec{a} = \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} - \boxed{m \cdot \vec{a}} = \vec{0}$$

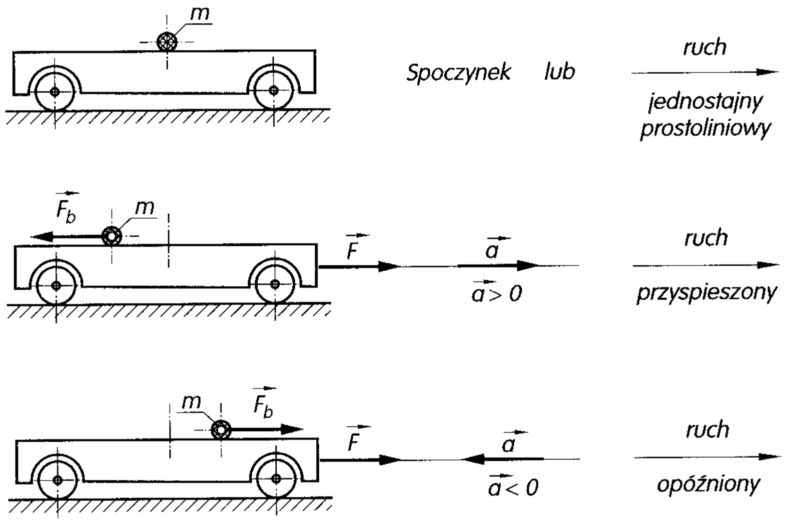
Fikcyjna siła

Siłę $-m \cdot \vec{a}$, równą co do wartości iloczynowi masy i przyspieszenia punktu materialnego, skierowaną **przeciwnie** do przyspieszenia, nazywa się **siłą bezwładności** lub **siłą d'Alemberta**.



ZASADA D'ALEMBERTA

Podczas ruchu punktu materialnego w każdej chwili wszystkie siły rzeczywiste działające na punkt materialny oraz jego siła bezwładności pozostają w równowadze.



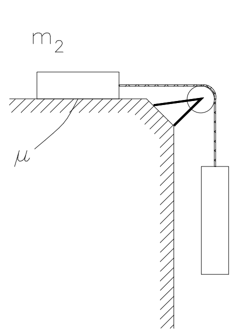
Działanie siły d'Alemberta

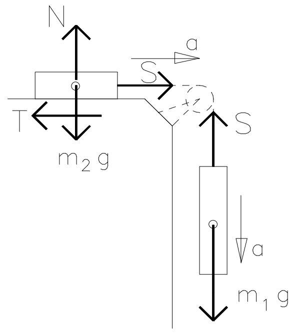
Dzięki zasadzie d'Alemberta równaniom różniczkowym ruchu punktu materialnego nadana zostaje postać **równań równowagi (równań statyki)**

ZASTOSOWANIE ZASADY D'ALEMBERTA

Przykład:

Przez gładki krążek przerzucono lekki, doskonale wiotki sznur, do którego jednego końca przymocowano ciało 1 o masie m_1, a drugi koniec przymocowano do ciała 2 o masie m_2 leżącego na chropowatej poziomej płaszczyźnie o współczynniku tarcia μ. Wyznaczyć siłę napięcia S w linie oraz wartość przyspieszenia a, z jakim poruszać się będą oba ciała.





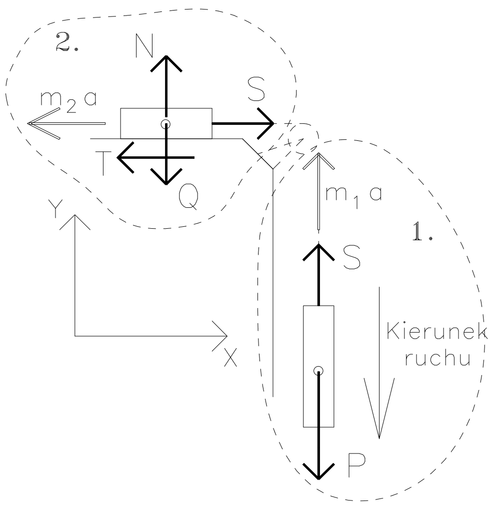
Równania dynamiczne ruchu:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - S \\ m_2 a = S - T \end{cases}$$

$$T = \mu \cdot N, \quad N = m_2 g \quad \to T = \mu m_2 g$$

$$a = \frac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$S = \frac{m_1 m_2 g(1 + \mu)}{m_1 + m_2}$$



Równania statyki z zastosowaniem siły d'Alemberta:

$$(1)\begin{cases} \Sigma P(x) = 0 \\ \Sigma P(y) = 0 \quad S + m_1 a - P = 0 \end{cases}$$

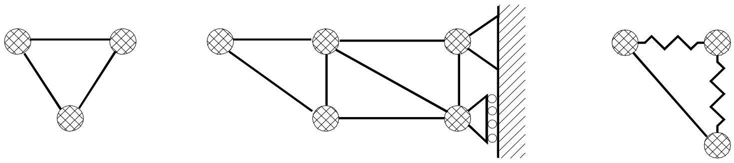
$$(2)\begin{cases} \Sigma P(x) = 0 \quad S - T - m_2 a = 0 \\ \Sigma P(y) = 0 \quad N = Q \end{cases}$$

$$a = g\frac{P - \mu Q}{P + Q}$$

$$S = \frac{P \cdot Q(1 + \mu)}{P + Q}$$

$$Q = m_2 g \quad P = m_1 g$$

DYNAMIKA UKŁADU CIAŁ SZTYWNYCH



Układy punktów materialnych

Dla układu punktów materialnych w jednorodnym polu grawitacyjnym środek masy pokrywa się ze środkiem ciężkości.

SIŁY ZEWNĘTRZNE I WEWNĘTRZNE W UKŁADZIE CIAŁ

SIŁY ZEWNĘTRZNE CZYNNE I BIERNE

Siły zewnętrzne czynne – wywołują ruch.
Siły zewnętrzne bierne (reakcje więzów) – przeciwdziałają ruchowi.

Układ (zbiór) ciał sztywnych – **układ mechaniczny**

SIŁY WEWNĘTRZNE W UKŁADZIE MECHANICZNYM – siły oddziaływania między elementami układu (siły zewnętrzne dla danego elementu).

ZASADA RUCHU ŚRODKA MASY

Środek masy ciała (układu ciał) porusza się jak punkt o masie równej masie całego układu, do którego przyłożono wszystkie siły zewnętrzne działające na ciało (układ ciał).

PĘD I POPĘD

Prędkość ciała w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot t.$$

Na podstawie II prawa Newtona:

$$m \cdot \mathbf{v} - m \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{F} \cdot t.$$

PĘD CIAŁA (ilość ruchu): iloczyn masy i prędkości $m \cdot \mathbf{v}$.

POPĘD CIAŁA (impuls): iloczyn siły i czasu jej działania $\mathbf{F} \cdot t$.

TWIERDZENIE O PĘDZIE I POPĘDZIE:

Przyrost pędu ciała równa się popędowi udzielonemu temu ciału.

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU:

Jeżeli w układzie dwóch ciał działają tylko siły wewnętrzne, wówczas suma pędów tych ciał pozostaje zawsze stała.

Siły wewnętrzne – siły wewnątrz układu (pomija się siły pochodzące od ciał nie należących do układu).

Pęd ciała 1: $\mathbf{p}_1 = m_1 \cdot \mathbf{v}_1$	Pęd ciała 2: $\mathbf{p}_2 = m_2 \cdot \mathbf{v}_2$

Siły wywołujące zmianę pędu: $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$

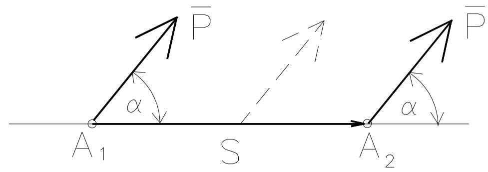
III prawo Newtona: $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$

Stąd: $\boxed{m_1 \cdot \mathbf{v}_1 + m_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \text{const.}}$

PRACA SIŁY

Pracą siły stałej co do wartości i kierunku na prostoliniowym przesunięciu punktu przyłożenia tej siły nazywa się iloczyn wartości bezwzględnej przesunięcia i miary rzutu tej siły na kierunek tego przesunięcia.

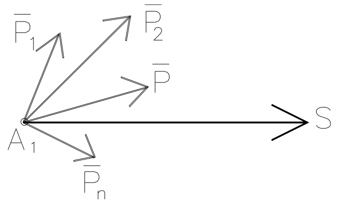
$$L = \vec{P} \cdot \vec{s} \qquad \boxed{L = (P\cos\alpha)\cdot s = P \cdot s \cdot \cos\alpha}$$



Gdy $\alpha = 0 \rightarrow \quad L = P \cdot s \quad$ [Nm]

$$[L] = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot 1\,m = 1\,\frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1\,Nm = 1\,J$$

$$\boxed{L = \vec{P} \cdot \vec{s} = P_x \cdot s_x + P_y \cdot s_y + P_z \cdot s_z}$$



$$\boxed{L = \vec{P} \cdot \vec{s} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \vec{P}_i\right) \cdot \vec{s} = \vec{P}_1 \cdot \vec{s} + \vec{P}_2 \cdot \vec{s} + \cdots + \vec{P}_n \cdot \vec{s}}$$

Prac wypadkowej sił przyłożonych do danego punktu jest równa sumie prac poszczególnych sił.

<u>PRACA SIŁY W RUCHU OBROTOWYM</u>

Praca siły w ruchu obrotowym równa jest iloczynowi momentu siły względem osi obrotu i kąta, o jakie obróci się ciało:

$$\boxed{L = M_L \cdot \varphi} \qquad \varphi = \omega \cdot t \;\; [rad]$$

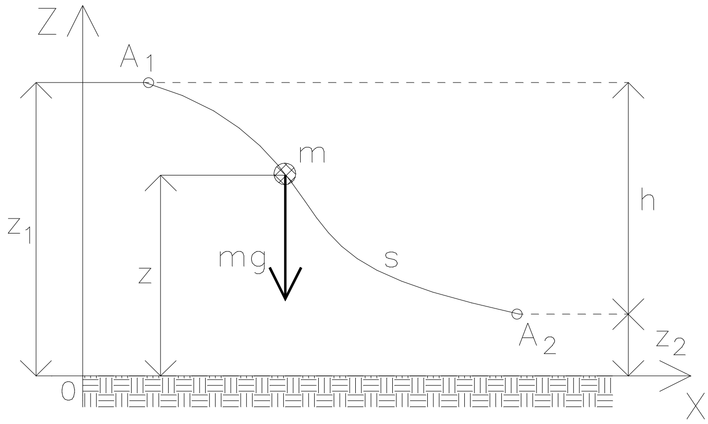
M_L – moment siły względem osi obrotu
ω – prędkość kątowa [rad/s]

PRACA SIŁ CIĘŻKOŚCI

Jednorodne pole sił ciężkości (w obszarze o rozmiarach małych w porównaniu z promieniem Ziemi R = 6 371 km).

Praca wzdłuż łuku A_1A_2: $\boxed{L = \int_{A_1A_2} (P_x dx + P_y dy + P_z dz)}$

Praca wykonana przez siłę ciężkości m · g działającą na punkt materialny o masie m, przy przejściu punktu z A_1 do A_2.



Założenie: $P_x = P_y = 0 \qquad P_z = -m \cdot g$

Praca siły $\vec{P}$ na skończonym odcinku łuku A_1A_2:

$$L = \int_{A_1A_2} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = -m \cdot g \int_{A_1A_2} dz = m \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

$$\boxed{L = m \cdot g \cdot h}$$

Praca L nie zależy od kształtu toru po którym porusza się punkt materialny.

Pracę L w jednorodnym polu sił ciężkości (grawitacyjnych) nazywa się energią potencjalną.

$$\boxed{L = V_1 - V_2 = mg(z_1 - z_2) = mgh}$$

MOC

Moc – praca wykonana przez urządzenie w jednostce czasu. Moc jest miara przydatności silnika (maszyny).

$dL = \vec{P} \cdot d\vec{s}$ $\qquad$ $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$

$$\boxed{N = \frac{dL}{dt} = \vec{P} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{v}}$$

$N = \vec{P} \cdot \vec{v} = P \cdot v \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ gdy $\alpha = 0$ $\qquad$ $N = P \cdot v$

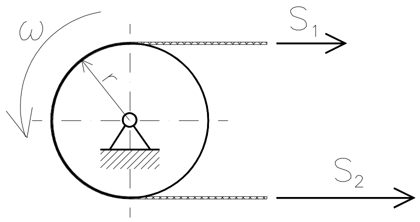
$[N] = \frac{1J}{1s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3} = 1W$ $\qquad$ **WAT** – jednostka mocy

W praktyce moc maszyn mierzy się w kW (kilowatach, 1 kW = = 10^3 W) i MW (megawatach, 1 MW = 10^3 kW = 10^6 W).)

W praktyce stosuje się tak ze podawanie mocy w koniach mechanicznych (1 KM = 0,7355 kW, 1 kW = 1,36 KM). KM – jednostka spoza układu SI.

Jeżeli moc N wyrażona jest w kW, prędkość obrotowa n [obr/min], to wytwarzany moment obrotowy wynosi:	$M = \frac{N}{\omega} = \frac{N}{\frac{\pi \cdot n}{30 \cdot 100}} \cong 9555 \frac{N}{n}$ $[N \cdot m]$

<u>Przykład:</u> Obliczyć pracę wykonana w t = 5 min przez koło pasowe o r = 1,8 m wykonujące n = 120 obr/min. Siły naciągu w pasach wynoszą: S_1 = 3600 N, S_2 = 7200 N. Obliczyć moc wykonywaną przez koło pasowe.



$$L = M_0 \cdot \varphi$$

$$M_0 = (S_1 - S_2) \cdot r$$

$$M_0 = (7200 - 3600) \cdot 1{,}8 = 6480\ N \cdot m$$

PRACA: droga w czasie t = 5 min:

$$\varphi = 2\pi n \cdot t = 2\pi \cdot 120 \cdot 5 = 3769{,}9\ rad$$

$$L = M_0 \cdot \varphi = 6480 \cdot 3769{,}9 = 2{,}443 \cdot 10^7\ Nm$$

MOC = PRACA/CZAS $\qquad$ t = 5 · 60 = 300 s

$$N = \frac{L}{t} = \frac{2{,}443 \cdot 10^7}{300} = 8{,}143 \cdot 10^4 W = 81{,}43\ kW$$

Inaczej: $N = M_0 \cdot \omega = \frac{M_0 \cdot 2\pi \cdot n}{60} = \frac{6480 \cdot 2\pi \cdot 120}{60} = 8{,}143 \cdot 10^4\ W$.

SPRAWNOŚĆ

L – praca (energia) dostarczona do urządzenia (maszyny)
L_u – praca użyteczna
L_s – straty pracy (energii), tarcie, opory

$$L = L_u + L_s$$

Sprawnością maszyny nazywa się stosunek:

$$\boxed{\eta = \frac{L_u}{L}, \qquad \eta = \frac{L_u}{L} \cdot 100\%}.$$

Maszyna idealna: $\eta = 1$.

Sprawność maszyny złożonej: $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \ldots \cdot \eta_n$.

Definicja sprawności oparta o moc:

$$\boxed{\eta = \frac{N_u}{N}, \qquad \eta = \frac{N_u}{N} \cdot 100\%}$$

Moc użyteczna maszyny: $N_u = \eta \cdot N$.

ENERGIA KINETYCZNA

Z prawa pędu i popędu, dla $\mathbf{v}_0 = 0$: $\mathbf{F} \cdot t = m \cdot \mathbf{v} - m\,0$.

Droga przebyta przez ciało w czasie t
równa się iloczynowi średniej prędkości $v_{śr}$ i czasu:

$$s = v_{śr} \cdot t = \frac{v + v_0}{2} t = \frac{1}{2} v \cdot t.$$

Praca wykonana na rozpędzenie ciała i nadanie prędkości v:

$$L = F \cdot s = \frac{m \cdot v}{t} \cdot \frac{v \cdot t}{2} = \frac{1}{2} m \cdot v \cdot v = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

W ruchu postępowym ciało o masie m i prędkości v posiada energię kinetyczną E_k, równą nagromadzonej pracy:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}.$$

ENERGIA KINETYCZNA

Energia kinetyczna i – tego punktu materialnego:

$$\boxed{E_i = \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}}.$$

Energia kinetyczna układu punktów materialnych:

$$\boxed{E = \sum_i E_i = \sum_i \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}}.$$

Energia kinetyczna ciała w ruchu postępowym:

$$\boxed{E = \frac{m \cdot v_S^2}{2}}$$

m – masa ciała, v_S – prędkość środka masy ciała

Energia kinetyczna ciała w ruchu obrotowym:

$$\boxed{E = \frac{J_L \cdot \omega^2}{2}}$$

J_L – moment bezwładności ciała względem osi obrotu

ω – prędkość kątowa ciała

Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu ogólnym:

$$\boxed{E = \frac{m \cdot v_S^2}{2} + \frac{J_L \cdot \omega^2}{2}}.$$

v_S – prędkość środka masy

J_L – moment bezwładności ciała względem osi chwilowego obrotu, przechodzącej przez środek masy,

ω – chwilowa prędkość kątowa wokół osi chwilowego obrotu.

TWIERDZENIE O RÓWNOWAŻNOŚCI PRACY I ENERGII KINETYCZNEJ

Przyrost energii kinetycznej ciała sztywnego w skończonym przedziale czasu jest równy sumie prac, które wykonały w tym samym czasie wszystkie siły zewnętrzne działające na to ciało.

$$\boxed{E_1 - E_2 = L_{1-2}}$$

E_2 – energia kinetyczna w chwili t_2,
E_1 – energia kinetyczna w chwili t_1,
$t_2 > t_1$

ENERGIA MECHANICZNA:

suma energii kinetycznej i potencjalnej E + V.

W czasie ruchu punktu materialnego w zachowawczym polu sił energia mechaniczna pozostaje wielkością stałą.
Pole zachowawcze (potencjalne) – pole sił, w którym praca zależy od położenia początkowego i końcowego, nie zależy od postaci toru punktu (patrz: praca sił ciężkości).

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

Podczas ruchu punktu materialnego w zachowawczym polu sił, jego energia mechaniczna jest wielkością stałą.

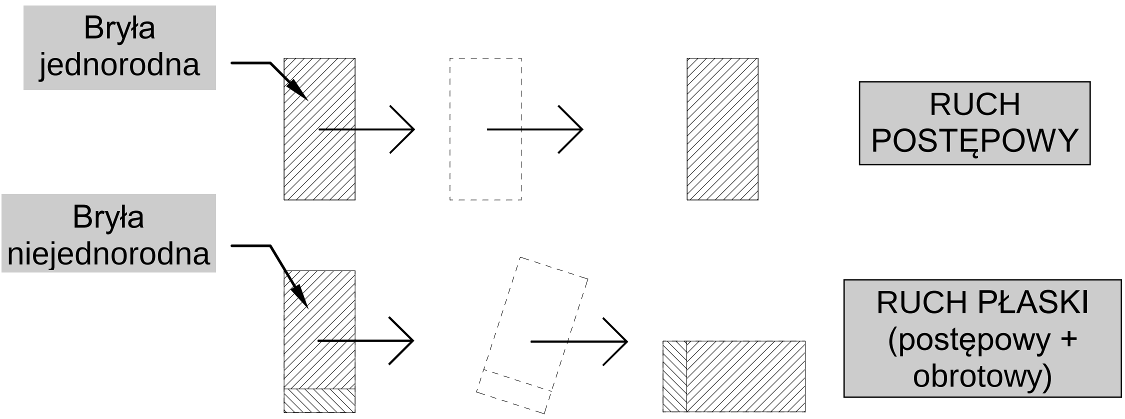
$$\boxed{\begin{aligned} E_1 - E_2 &= V_1 - V_2 \\ E_2 + V_2 &= E_1 + V_1 \end{aligned}}$$

SIŁY ZACHOWAWCZE I NIEZACHOWAWCZE

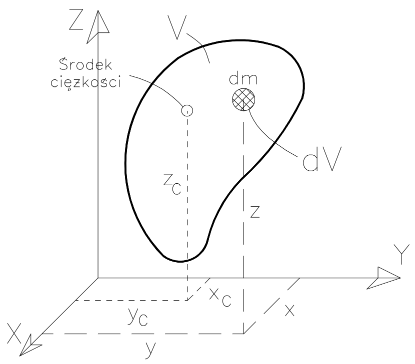
SIŁY ZACHOWAWCZE (POTENCJALNE) – praca wykonana przez te siły nad punktem materialnym poruszającym się po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zeru (siły ciężkości).
SIŁY NIEZACHOWAWCZE – praca wykonana przez te siły nad punktem materialnym poruszającym się po dowolnej drodze zamkniętej nie jest równa zeru (**opór powietrza, siły tarcia**).

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

Momenty bezwładności charakteryzują rozkład w przestrzeni masy danego układu punktów materialnych lub bryły.



Na skutek nierównomiernego rozkładu masy, przy **tej samej masie** występują różne rodzaje ruchu.



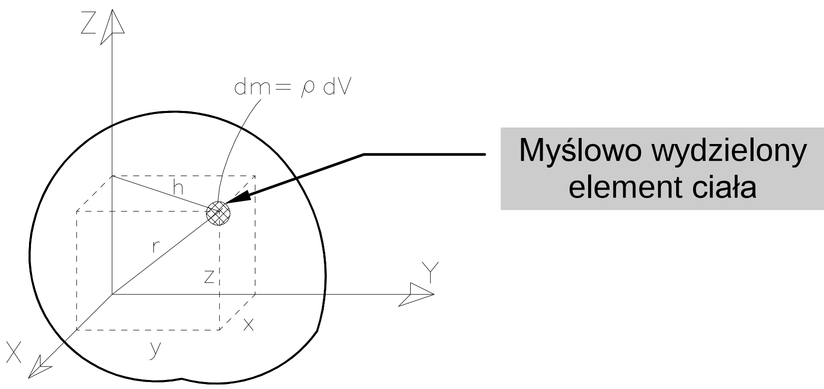
$$\boxed{x_c = \frac{\int_V \rho x dV}{m} \qquad y_c = \frac{\int_V \rho y dV}{m} \qquad z_c = \frac{\int_V \rho z dV}{m}}$$

$\boxed{\int_V \rho x dV, \quad \int_V \rho x dV, \quad \int_V \rho x dV}$ masowe momenty statyczne

$m = \int_V dm = \int_V \rho dV$ $\qquad \rho$ – gęstość ciała [kg/m^3]

Momenty bezwładności charakteryzują rozkład w przestrzeni masy ciała materialnego.

Centralne osie bezwładności – osie względem środka masy.



DEFINICJA MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI UKŁADU XYZ:

$$J_Z = \int_V h^2 dm = \int_V \rho h^2 dV = \int_V \rho\left(x^2 + y^2\right)dV$$

$$J_X = \int_V \rho\left(y^2 + z^2\right)dV$$

$$J_Y = \int_V \rho\left(z^2 + x^2\right)dV$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_X &= \int_V \rho \cdot z^2 dV + \int_V \rho \cdot y^2 dV \\ J_Y &= \int_V \rho \cdot z^2 dV + \int_V \rho \cdot x^2 dV \\ J_Z &= \int_V \rho \cdot x^2 dV + \int_V \rho \cdot y^2 dV \end{aligned}}$$

DEFINICJA MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM PŁASZCZYZN UKŁADU XYZ:

$$J_{yz} = \int_V x^2 dm \qquad J_{xz} = \int_V y^2 dm, \qquad J_{xy} = \int_V z^2 dm, \qquad dm = \rho dV$$

Wymiar momentu bezwładności: 1kg · m.

Moment bezwładności względem osi równy jest sumie momentów względem dowolnych dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn przecinających się wzdłuż tej osi.

BIEGUNOWY MOMENT BEZWŁADNOŚCI:

$$J_0 = \int_V r^2 dm = \int_V \rho\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dV = \frac{1}{2}\left(J_X + J_Y + J_Z\right).$$

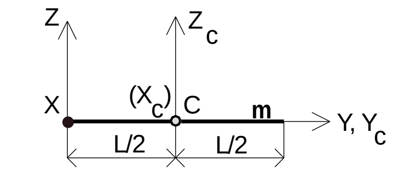
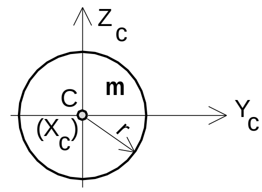
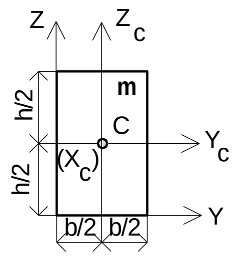
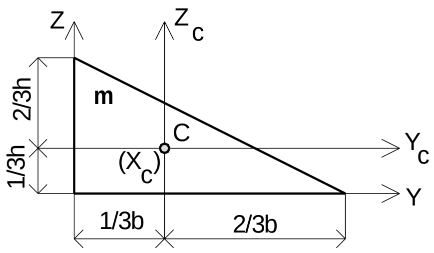
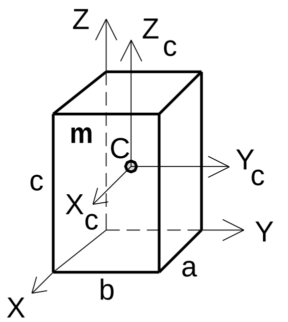
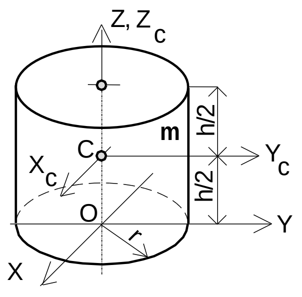
DEWIACYJNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

w układzie osi XYZ:

$$D_{xy} = \int_V xy\, dm, \quad D_{xz} = \int_V xz\, dm, \quad D_{yz} = \int_V yz\, dm$$

Momenty osiowe i biegunowy są zawsze dodatnie, momenty dewiacyjne – mogą być dodatnie, ujemne lub równe zeru (przypadek szczególny → GŁÓWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI).

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNO-MASOWE WYBRANYCH JEDNORODNYCH FIGUR PŁASKICH ORAZ BRRYŁ

	Masa: $m = \lambda\cdot L$ λ – gęstość liniowa pręta [kg/m] $J_{x_c} = J_{z_c} = J_{x_c y_c} = \frac{1}{12} mL^2,\ J_x = J_z = J_{xz} = \frac{1}{3} mL^2$
	Masa: $m = \mu\cdot L$ μ – gęstość powierzchniowa masy [kg/m^2] $J_{x_c} = \frac{1}{2} mr^2,\ J_{y_c} = J_{z_c} = J_{x_c y_c} = J_{x_c z_c} = \frac{1}{4} mL^2$
	Masa: $m = \mu\cdot bh$ $J_{y_c} = J_{x_c y_c} = \frac{1}{12} mh^2,\ J_{z_c} = J_{x_c z_c} = \frac{1}{12} mb^2,$ $J_{x_c} = \frac{1}{12} m(b^2 + h^2)$ $J_y = J_{xy} = \frac{1}{3} mh^2, \qquad J_z = J_{xz} = \frac{1}{3} mb^2$
	Masa : $m = \mu \cdot \frac{1}{2} bh$ $J_{y_c} = J_{x_c y_c} = \frac{1}{18} mh^2,\ J_{z_c} = J_{x_c z_c} = \frac{1}{18} mb^2,$ $J_{x_c} = \frac{1}{18} m(b^2 + h^2),\ D_{y_c z_c} = -\frac{1}{36} mbh,$ $J_{y_c z_c} = D_{x_c z_c} = D_{x_c y_c} = 0$
	Masa: $m = \rho\cdot abc$ μ – gęstość objętościowa masy [kg/m^3] $x_c = \frac{a}{2}, \quad y_c = \frac{b}{2}, \quad z_c = \frac{c}{2},$ $J_{y_c z_c} = \frac{1}{12} ma^2,\ J_{x_c z_c} = \frac{1}{12} mb^2,\ J_{x_c z_c} = \frac{1}{12} mc^2,$ $D_{y_c z_c} = D_{x_c z_c} = D_{x_c y_c} = 0$
	Masa : $m = \rho \cdot \pi r^2 h$ $J_{y_c z_c} = J_{x_c z_c} = \frac{1}{4} mr^2,\ J_{x_c y_c} = \frac{1}{12} mc^2,\ J_{z_c} = \frac{1}{2} mr^2,$ $D_{y_c z_c} = D_{x_c z_c} = D_{x_c y_c} = 0$