ZBIÓR ZADAŃ

ANALIZA MATEMATYCZNA II

dr Barbara Wikieł, doc. PG

Centrum Nauczania Matematyki i Kształcenia na Odległość
Politechniki Gdańskiej

Gdańsk, 2014

Spis treści

Rozdział 1

Całki

1.1 Całki potrójne

Twierdzenie o zamianie całki potrójnej po prostopadłościanie na całkę iterowaną
Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ jest ciągła na prostopadłościanie P: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ i $e \leqslant z \leqslant f$ (z wyjątkiem co najwyżej zbioru punktów, dającego się pokryć skończoną liczbą prostopadłościanów, których suma objętości jest dowolnie mała), to

$$\iiint\limits_{P} f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} \left\{ \int\limits_{c}^{d} \left[\int\limits_{e}^{f} f(x, y, z)dz \right] dy \right\} dx \tag{1.1}$$

Umownie pisze się również

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{e}^{f} f(x, y, z)dz \quad \text{zamiast} \quad \int\limits_{a}^{b} \left\{ \int\limits_{c}^{d} \left[\int\limits_{e}^{f} f(x, y, z)dz \right] dy \right\} dx$$

Całkę występującą po prawej stronie wzoru (1) nazywamy całką dwukrotnie iterowaną funkcji po prostopadłościanie.

Uwaga
W przypadku spełnienia założeń powyższego twierdzenia, całka (1) jest równa każdej z pozostałych całek dwukrotnie iterowanych, różniących się od niej tylko kolejnością całkowania.

Zadanie 1.1.1 *Obliczyć całki:*

a) $\iiint\limits_{V} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c\}$

b) $\iiint\limits_{V} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) dxdydz$, *gdzie* V *jest obszarem ograniczonym płaszczyznami* $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$, $z = 1$ *i* $z = 2$.

Twierdzenie o zamianie całki potrójnej po obszarze normalnym na całkę iterowaną
Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze domkniętym $\bar{\Omega}$, określonym następująco

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{XY}, \varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)\}$$

normalnym względem płaszczyzny OXY, gdzie funkcje φ i ψ są ciągłe na obszarze regularnym D_{XY}, to

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{D_{XY}} \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy$$

Prawdziwe są również analogiczne wzory dla całek iterowanych po obszarach normalnych względem pozostałych płaszczyzn układu współrzędnych.

Uwaga
Jeżeli obszar Ω normalny względem płaszczyzny OXY można zapisać w postaci

$$\Omega = \{(x, y, z) : a \leqslant x \leqslant b, f(x) \leqslant y \leqslant g(x), \varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)\}$$

to zachodzi równość

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{f(x)}^{g(x)} \left\{ \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz \right\} dy \right) dx$$

Zadanie 1.1.2 *Obliczyć całki:*

a) $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^4}$, *gdzie bryła V ograniczona jest płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y + z = 1$,*

b) $\iiint\limits_{V} y\cos(x + z)dxdydz$, *gdzie bryła V ograniczona jest płaszczyznami $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$ i powierzchnią $y = \sqrt{x}$,*

c) $\iiint\limits_{V} (2x + 3y - z)\, dxdydz$, *gdzie V jest graniastosłupem ograniczonym płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$ i $x + y = 2$,*

d) $\iiint\limits_{V} x^2y^2z\, dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant z \leqslant xy\}$,

e) $\iiint\limits_{V} (4 + z)\, dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x, y, z) \in R^3 : -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$,

f) $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3}$, *gdzie bryła V ograniczona jest płaszczyznami $x + z = 3$, $y = 2$ i płaszczyznami układu współrzędnych,*

g) $\iiint\limits_{V} z\, dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ x \leqslant y \leqslant 2x,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$.

Twierdzenie o zamianie zmiennych w całce potrójnej

Niech przekształcenie

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \tag{1.2}$$

odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie wnętrze U obszaru regularnego $\bar{U}$ na wnętrze Ω obszaru regularnego $\bar{\Omega}$, przy czym każda z funkcji (2) jest klasy C^1 w pewnym obszarze zawierającym $\bar{U}$ w swym wnętrzu.

Jeżeli ponadto $f(x,y,z)$ jest funkcją ciągłą w obszarze $\bar{U}$ oraz jakobian przekształcenia (2) postaci

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \stackrel{df}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

jest różny od zera w obszarze U, to

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{U} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| dudvdw$$

Definicja współrzędnych sferycznych, typ I
Położenie punktu P w przestrzeni można opisać trójką liczb (ρ, φ, ψ), gdzie

ρ – oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, przy czym $0 \leqslant \rho < \infty$,

φ – oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę OXY a dodatnią częścią osi OX, przy czym $0 \leqslant \varphi < 2\pi$,

ψ – oznacza miarę kąta między promieniem wodzącym a płaszczyzną OXY, przy czym $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Trójkę liczb (ρ, φ, ψ) nazywamy współrzędnymi sferycznymi punktu przestrzeni.
Współrzędne kartezjańskie (x, y, z) punktu przestrzeni danego we współrzędnych sferycznych (ρ, φ, ψ) określone są zależnościami

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\psi \\ y = \rho\sin\varphi\cos\psi \\ z = \rho\sin\psi \end{cases} \tag{1.4}$$

Przekształcenie, które punktowi (ρ, φ, ψ) przyporządkowuje punkt (x, y, z) określony powyższymi wzorami nazywamy przekształceniem sferycznym.
Jakobian przekształcenia sferycznego jest równy

$$J(\rho, \varphi, \psi) = \rho^2 \cos\psi$$

Definicja współrzędnych sferycznych, typ II
Położenie punktu można opisać również trójką liczb (ρ, φ, θ), gdzie ρ i φ oznaczają jak poprzednio, natomiast

θ – oznacza miarę kąta między promieniem wodzącym punktu P a dodatnim kierunkiem osi OZ, przy czym $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Współrzędne kartezjańskie (x, y, z) punktu przestrzeni danego we współrzędnych sferycznych (ρ, φ, θ) określone są zależnościami

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \tag{1.5}$$

gdzie $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ i $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
Jakobian tego przekształcenia sferycznego jest równy

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin\theta$$

Definicja współrzędnych sferycznych uogólnionych, typ I

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\cos\psi \\ y = b\rho\sin\varphi\cos\psi \\ z = c\rho\sin\psi \end{cases}$$

Maksymalny zakres zmiennych:

$$0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Jakobian:

$$J(\rho, \varphi, \psi) = abc\rho^2 \cos\psi$$

Definicja współrzędnych sferycznych uogólnionych, typ II

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases}$$

Maksymalny zakres zmiennych:

$$0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

Jakobian:

$$J(\rho, \varphi, \theta) = abc\rho^2 \sin\theta$$

Definicja współrzędnych walcowych (cylindrycznych)
Położenie punktu P w przestrzeni można opisać trójką liczb (ρ, φ, h), gdzie

ρ – oznacza odległość rzutu punktu P na płaszczyznę OXY od początku układu współrzędnych, przy czym $0 \leqslant \rho < \infty$,

φ – oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę OXY a dodatnią częścią osi OX, przy czym $0 \leqslant \varphi < 2\pi$,

h – oznacza odległość (dodatnią dla $z > 0$ i ujemną dla $z < 0$) punktu P od płaszczyzny OXY, przy czym $-\infty \leqslant h \leqslant \infty$.

Trójkę liczb (ρ, φ, h) nazywamy współrzędnymi walcowymi.
Współrzędne kartezjańskie (x, y, z) punktu przestrzeni danego we współrzędnych walcowych (ρ, φ, h) określone są zależnościami

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = h \end{cases} \tag{1.6}$$

Przekształcenie, które punktowi (ρ, φ, h) przyporządkowuje punkt (x, y, z) określony powyższymi wzorami nazywamy przekształceniem walcowym.
Jakobian przekształcenia walcowego jest równy

$$J(\rho, \varphi, \psi) = \rho$$

Definicja współrzędnych walcowych uogólnionych

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi \\ y = b\rho \sin \varphi \\ z = h \end{cases}$$

Maksymalny zakres zmiennych:

$$0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < h < \infty$$

Jakobian:

$$J(\rho, \varphi, h) = ab\rho$$

Zadanie 1.1.3 *Obliczyć całki:*

a) $\iiint\limits_V x^2\,dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$,

b) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2 \wedge z \geqslant 0\}$,

c) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, *gdzie* $V = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \leqslant 0, y \leqslant 0, z \geqslant 0\}$,

d) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, *gdzie bryła* V *ograniczona jest powierzchnią* $x^2+y^2+z^2 = z$,

e) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, *gdzie bryła* V *ograniczona jest powierzchnią* $x^2+y^2 = z^2$ *i płaszczyznami* $z = 1$, $z = 0$,

f) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x,y,z) \in R^3 : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}$, $0 \leqslant z \leqslant a\}$,

g) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, *gdzie bryła* V *ograniczona jest powierzchnią* $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ *i płaszczyzną* $z = h$,

h) $\iiint\limits_V x^2\,dxdydz$, *gdzie bryła* V *ograniczona jest powierzchnią* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$,

i) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x,y,z) \in R^3 : \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$,

j) $\iiint\limits_V (1-2y+2z)\,dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x,y,z) \in R^3 : 36x^2+9y^2+16z^2 \leqslant 144\}$,

k) $\iiint\limits_V (y^2+z^2)\,dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x,y,z) \in R^3 : y^2+z^2 \leqslant 2x \wedge x = 2\}$,

l) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, *gdzie* $V = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2-y \leqslant 0\}$,

m) $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dxdydz}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, *gdzie bryła* V *ograniczona jest powierzchnią* $z^2 = 2x^2+2y^2$ *oraz płaszczyznami* $x = 0$, $y = 0$ *i* $z = 2$ *dla* $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ *i* $z \geqslant 0$,

n) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, *gdzie bryła* V *ograniczona jest powierzchniami* $x^2+y^2-2z = 0$, $x^2+y^2+z^2-3 = 0$ *i płaszczyznami układu współrzędnych dla* $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Zastosowanie geometryczne całek potrójnych
Objętość obszaru regularnego $V \subset R^3$ wyraża się wzorem

$$|V| = \iiint\limits_V dxdydz$$

Zadanie 1.1.4 *Stosując całki potrójne obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:*

a) $x + y = 1,\ x + y = 2,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0$ *i* $z = 3$

b) $x + y + z = 4,\ x = 3,\ y = 2$ *i płaszczyznami układu współrzędnych*

c) $x^2 + y^2 = az$ *i* $x^2 + y^2 = z^2$

d) $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 2a - x - y$ *i* $z = 0$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *i* $x^2 + y^2 = 3z^2$

f) $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 = z^2$ *(dla* $x^2 + y^2 \leqslant z^2$*)*

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ x + z = 2a$ *i* $x - z = 2a$

h) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *(dla* $r^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$*) i* $z = 0$ *(dla* $z \leqslant 0$*)*

i) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *(dla* $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$*) i* $x^2 + y^2 - Rx = 0$ *(dla* $x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0$*)*

j) $az = a^2 - x^2 - y^2,\ z = a - x - y$ *i płaszczyznami układu współrzędnych (zał.* $a > 0$*)*

k) $2z = x^2 + y^2$ *i* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

l) $x^2 + y^2 = z^2$ *i* $x^2 + y^2 = 2y$

m) $x^2 + y^2 = 2z^2$ *(dla* $x^2 + y^2 \leqslant 2z^2$*) i* $x^2 + y^2 = 3 - z$ *(dla* $x^2 + y^2 \leqslant 3 - z$*)*

n) $4x^2 + 9y^2 = 36z^2,\ 4x^2 + 9y^2 = 36$ *i płaszczyzną* $z = 0$

o) $z = 4x^2 + 2y^2 + 1,\ x + y - 3 = 0$ *i płaszczyznami układu współrzędnych*

p) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ *i* $x^2 + y^2 = z^2$

r) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$

1.2 Całki krzywoliniowe

Twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej nieskierowanej w R^2
Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła na otwartym, zwykłym łuku gładkim $L \subset R^2$ o przedstawieniu parametrycznym

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

to całka krzywoliniowa $\int\limits_L f(x,y)dl$ istnieje, przy czym

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

Wniosek
Jeżeli krzywa L jest określona równaniem $y = g(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$, to zachodzi wzór

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,g(x))\sqrt{1 + [g'(x)]^2}dx$$

Zadanie 1.2.1 *Obliczyć całki:*

a) $\int\limits_K \frac{dl}{x-y}$, *gdzie* $K = \{(x,y):\ y = \frac{1}{2}x - 2,\ 0 \leqslant x \leqslant 4\}$,

b) $\int\limits_K \frac{dl}{x^2+y^2+1}$, *gdzie* $K = \{(x,y):\ y = 3x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$,

c) $\int\limits_K 2xe^y dl$, *gdzie* $K = \{(x,y):\ y = \ln x,\ 1 \leqslant x \leqslant 2\}$,

d) $\int\limits_K xydl$, *gdzie K jest brzegiem prostokąta o wierzchołkach* $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,2)$,

e) $\int\limits_K xydl$, *gdzie K jest brzegiem kwadratu* $|x| + |y| = 1$,

f) $\int\limits_K (x^2+y^2)dl$, *gdzie K jest odcinkiem łączącym punkty* $A(a,a)$ *oraz* $B(b,b)$ *gdy* $b > a$,

g) $\int\limits_K (x^2+y^2)dl$, *gdzie* $K = \{(x,y):\ x(t) = a\cos t,\ y(t) = a\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\ , a > 0\ \}$,

h) $\int\limits_K (1+xy)dl$, *gdzie K składa się z* $K_1 = \{(x,y):\ x^2+y^2 = 4\ ,\ x \geqslant 0\ \}$,
$K_2 = \{(x,y):\ \text{odcinek prostej } x = 0,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\ \}$,

i) $\int\limits_K ye^{-x}dl$, *gdzie* $K = \{(x,y):\ x(t) = \ln(1+t^2),\ y(t) = 2\text{arctg}\, t - t + 3,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej nieskierowanej w R^3
Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła na otwartym, zwykłym łuku gładkim $L \subset R^3$ o przedstawieniu parametrycznym

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

to całka krzywoliniowa $\int\limits_L f(x,y,z)dl$ istnieje, przy czym

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

Zadanie 1.2.2 *Obliczyć całki:*

a) $\int\limits_K (x^2+y^2+z^2)dl$, *gdzie* $K = \{(x,y,z): \ x(t) = a\cos t, \ y(t) = a\sin t, \ z(t) = bt,$
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi \ , \ a>0, \ b>0 \ \}$

b) $\int\limits_K (x^2+y^2+z^2)dl$, *gdzie* K *składa się z* $K_1 = \{(x,y,z): \ x^2+y^2 = a^2 \ , \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ z = 0 \ \}$,
$K_2 = \{(x,y,z): \ \textit{odcinek prostej} \ y+z = a, \ x = 0 \ \}$,
$K_3 = \{(x,y,z): \ x^2+z^2 = a^2 \ , \ x \geqslant 0, \ y = 0, \ z \geqslant 0 \ \}$

c) $\int\limits_K zdl$, *gdzie* $K = \{(x,y,z): \ x(t) = t\cos t, \ y(t) = t\sin t, \ z(t) = t, \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$

d) $\int\limits_K xyzdl$, *gdzie* $K = \{(x,y,z): \ x(t) = t, \ y(t) = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, \ z(t) = \frac{1}{2}t^2, \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$

Zastosowania geometryczne całek krzywoliniowych nieskierowanych

1. Długość $|L|$ łuku gładkiego L dana jest wzorem

$$|L| = \int_L dl$$

2. Jeżeli $f(x,y)$ jest funkcją ciągłą i $f(x,y) > 0$ na łuku L, to pole $|S|$ powierzchni walcowej równoległej do osi OZ i ograniczonej z dołu przez łuk L a z góry przez wykres funkcji $z = f(x,y)$ wyraża się wzorem

$$|S| = \int_L f(x,y)dl$$

Zadanie 1.2.3 *Obliczyć długość łuku:*

a) *krzywej* $x(t) = 7\cos t,\ y(t) = 7\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}\pi$

b) *krzywej* $x(t) = t - \sin t,\ y(t) = 1 - \cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

c) *krzywej* $x(t) = 3t,\ y(t) = 3t^2,\ z(t) = 2t^3,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

d) *stożkowej linii śrubowej* $x(t) = e^{-t}\cos t,\ y(t) = e^{-t}\sin t,\ z(t) = e^{-t},\ 0 \leqslant t < +\infty$

e) *stożkowej linii śrubowej* $x(t) = ae^t\cos t,\ y(t) = ae^t\sin t,\ z(t) = be^t,\ -\infty < t \leqslant 0$

Zadanie 1.2.4 *Obliczyć pole części powierzchni:*

a) *walcowej o równaniu* $x(t) = e^t\cos t, y(t) = e^t\sin t, t \in < 0, \frac{\Pi}{4} >$ *zawartej między płaszczyzną* XOY *i powierzchnią* $z = x^2 + y^2 + 1$

b) *bocznej walca* $x^2 + y^2 = 1$ *wyciętego płaszczyznami* $z = 0$ *oraz* $x - z + 1 = 0$

Twierdzenie o zamianie całki krzywolinoliniowej skierowanej w R^2

Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciągłe na otwartym zwykłym łuku gładkim $\overset{\frown}{AB}$ o przedstawieniu parametrycznym

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

zgodnym z kierunkiem tego łuku, to całka

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

istnieje, przy czym

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

Zadanie 1.2.5 *Obliczyć całki:*

a) $\int\limits_K ydx + (x+y)dy$, *gdzie K jest krzywą zamkniętą złożoną z łuku paraboli $y = x^2$ i odcinka prostej $y = 4$ skierowaną dodatnio,*

b) $\int\limits_K (x-y)dx - (x+y)dy$, *gdzie K jest elipsą $4x^2 + 9y^2 = 36$ skierowaną dodatnio,*

c) $\int\limits_K (x^2 - y^2)dy$, *gdzie K jest łukiem hiperboli $xy = 1$ od punktu $A(1,1)$ do $B(2, \frac{1}{2})$,*

d) $\int\limits_K xydx - y^2dy$, *gdzie K jest łukiem krzywej $(x-1)^2 + y^2 = 1$ od punktu $A(0,0)$ do $B(1,1)$,*

e) $\int\limits_K \dfrac{xdy - ydx}{x+y}$, *gdzie K jest krzywą $x^2 + y^2 = R^2$ zorientowaną dodatnio,*

f) $\int\limits_K (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, *gdzie K jest łukiem krzywej $y = 1 - |x|$ dla $x \in (0,2)$, zorientowanym zgodnie ze wzrostem x,*

g) $\int\limits_K (x^2 - y)dx$, *gdzie K jest brzegiem prostokąta $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$ skierowanym dodatnio,*

h) $\int\limits_K (xy+y)dx + (xy+x)dy$, *gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 - 2x = 0$ zorientowanym dodatnio.*

Twierdzenie o o zamianie całki krzywoliniowej skierowanej w R^3

Jeżeli funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ są ciągłe na otwartym zwykłym łuku gładkim $\widehat{AB} \subset R^3$ o przedstawieniu parametrycznym

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

zgodnym z kierunkiem tego łuku, to całka

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

istnieje, przy czym

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt$$

Zadanie 1.2.6 *Obliczyć całki:*

a) $\int_K ydx - 2zdy + 3xdz$, *gdzie K jest odcinkiem prostej o początku w punkcie $O(0,0,0)$ i końcu w punkcie $A(1,1,1)$,*

b) $\int_K ydx + zdy + xdz$, *gdzie K jest krzywą o równaniach $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,*

c) $\int_K (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, *gdzie K jest krzywą o równaniach $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 1$,*

d) $\int_K xdx + ydy + (x+y-1)dz$, *gdzie K jest odcinkiem o początku w punkcie $A(1,1,1)$ i końcu w punkcie $B(2,3,4)$,*

e) $\int_K (x+2y)dx + (x-2y)dy$, *gdzie K jest łamaną o wierzchołkach $A(0,0,0)$, $B(2,2,0)$ i $C(2,2,2)$ zorientowaną dodatnio,*

f) $\int_K (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz$, *gdzie K jest krzywą będącą miejscem przecięcia powierzchni o równaniach $x^2+y^2 = x$ i $x^2+y^2+z^2 = 2x$ dla $xz \geqslant 0$, zorientowaną tak, że jej rzut na płaszczyznę OXY jest skierowany ujemnie.*

Twierdzenie Greena
Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 w obszarze normalnym $\bar{D}$ (względem osi OX i OY), przy czym brzeg K tego obszaru jest skierowany dodatnio względem wnętrza, to

$$\oint_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Podany wzór nazywamy wzorem Greena.

Zadanie 1.2.7 *Stosując twierdzenie Greena obliczyć całki:*

a) $\int_K (3x-2y)dx + (8x-5y)dy$, *gdzie* K *jest brzegiem kwadratu o wierzchołkach w punktach* $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ *i* $C(0,1)$ *zorientowanym dodatnio,*

b) $\int_K xy^2dy - x^2ydx$, *gdzie* K *jest okręgiem o równaniu* $x^2+y^2=R^2$ *zorientowanym dodatnio,*

c) $\int_K (x+y)dx - (x-y)dy$, *gdzie* K *jest krzywą złożoną z łuku paraboli* $y=x^2-1$ *i odcinka prostej przechodzącej przez punkty* $A(1,0)$ *i* $B(2,3)$ *zorientową dodatnio,*

d) $\int_K 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$, *gdzie* K *jest brzegiem trójkąta zorientowanym dodatnio o wierzchołkach w punktach* $A(1,1)$, $B(2,2)$ *i* $C(1,3)$,

e) $\int_K 2xydx + xdy$, *gdzie* K *jest zorientowanym dodatnio brzegiem półkola określonego nierównościami* $x^2+y^2 \leqslant 1$ *oraz* $x \geqslant 0$,

f) $\int_K xye^{-2x}dx + e^{-x}y^2dy$, *gdzie* K *jest brzegiem obszaru ograniczonego krzywymi* $y=e^x$ *oraz* $y=e^{2x}$ *i prostą* $x=1$ *zorientowanym dodatnio.*

Twierdzenie o niezależności całki krzywoliniowej od drogi całkowania
Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D, to spełniene równości

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{1.7}$$

w każdym punkcie tego obszaru jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby całka

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

po otwartym, kawałkami gładkim łuku zwykłym $\overset{\frown}{AB} \subset D$ nie zależała od kształtu tego łuku, a tylko od punktów A i B.
Jeżeli wyrażenie $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, stojące pod znakiem całki krzywoliniowej jest różniczką zupełną pewnej funkcji F, to

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(B) - F(A)$$

gdzie $F(x,y)$ oznacza dowolną funkcję pierwotną układu funkcji $P(x,y)$ i $Q(x,y)$.

Zadanie 1.2.8 *Obliczyć całki po dowolnym łuku gładkim K:*

a) $\int\limits_K \cos 4y dx - 4x \sin 4y dy$, *od punktu* $A(1, \frac{\pi}{6})$ *do punktu* $B(2, \frac{\pi}{4})$,

b) $\int\limits_K (x^4 + 4xy^3)dx + 6x^2y^2dy$, *od punktu* $A(-2,-1)$ *do punktu* $B(3,0)$,

c) $\int\limits_K 2y \sin 2x dx - \cos 2x dy$, *od punktu* $A(\frac{\pi}{4}, 2)$ *do punktu* $B(\frac{\pi}{6}, 1)$,

d) $\int\limits_K \frac{ydx - xdy}{y^2}$, *od punktu* $A(1,2)$ *do punktu* $B(2,1)$ *wzdłuż drogi nie przecinającej osi* OX,

e) $\int\limits_K \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$, *od punktu* $A(0,-1)$ *do punktu* $B(1,0)$ *wzdłuż drogi nie przecinającej prostej* $y = x$,

f) $\int\limits_K \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right) dy$, *od punktu* $A(0,0)$ *do punktu* $B(1,1)$ *wzdłuż drogi przebiegającej w płaszczyźnie* $y > 0$.

1.3 Całki powierzchniowe

Twierdzenie o zamianie całki powierzchniowej niezorientowanej na całkę podwójną I
Jeżeli funkcja $F(x,y,z)$ jest ciągła na płacie powierzchniowym regularnym S o równaniu $z = f(x,y)$ dla $(x,y) \in D$, to całka powierzchniowa niezorientowana $\iint\limits_S F(x,y,z)dS$ istnieje i wyraża się wzorem

$$\iint\limits_S F(x,y,z)dS = \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+[f'_x(x,y)]^2+[f'_y(x,y)]^2}dxdy$$

gdzie D jest obszarem płaskim regularnym będącym rzutem płata S na płaszczyznę OXY.
Analogicznie jeśli

- $S: x = g(y,z)$, dla $(y,z) \in D_1$, to
$$\iint\limits_S F(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_1} F(g(y,z),y,z)\sqrt{1+[g'_y(y,z)]^2+[g'_z(y,z)]^2}dydz$$

- $S: y = h(x,z)$, dla $(x,z) \in D_2$, to
$$\iint\limits_S F(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_2} F(x,h(x,z),z)\sqrt{1+[h'_x(x,z)]^2+[h'_z(x,z)]^2}dxdz$$

Zadanie 1.3.1 *Obliczyć całki:*

a) $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, *gdzie S jest trójkątem o wierzchołkach A(a,0,0), B(0, a, 0), C(0,0,a) gdzie* $a > 0$

b) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS$, *gdzie S jest częścią płaszczyzny* $z = 2x + 2y$ *leżącą nad obszarem D*$=\{(x,y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

c) $\iint\limits_S (6x+4y+3z)dS$, *gdzie S częścią płaszczyzny* $x + 2y + 3z = 6$ *leżącą w pierwszej ósemce układu współrzędnych.*

d) $\iint\limits_S (xz+\sqrt{1+4y})dS$, *gdzie S częścią powierzchni walca* $y = x^2$ *zawartą między płaszczyznami* $z = 0, z = 2$ *i* $y = 1$.

Twierdzenie o zamianie całki powierzchniowej niezorientowanej na całkę podwójną II
Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ jest ciągła na płacie powierzchniowym regularnym S o równaniach parametrycznych

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta \tag{1.8}$$

to całka powierzchniowa niezorientowana $\iint\limits_S F(x, y, z)dS$ istnieje i wyraża się wzorem

$$\iint\limits_S F(x, y, z)dS = \iint\limits_\Delta F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv$$

gdzie

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

są odpowiednimi podwyznacznikami macierzy (2). W skrócie

Zadanie 1.3.2 *Obliczyć całki:*

a) $\iint\limits_S xdS$, *gdzie S jest powierzchnią określoną równaniami* $x = \cos u \cos v, y = \sin u \cos v,$ $z{=}u{+}v$ *dla* $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

b) $\iint\limits_S z^2 dS$, *gdzie S jest powierzchnią kuli o równaniu* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

c) $\iint\limits_S (y + z + \sqrt{a^2 - x^2})dS$, *gdzie S jest częścią powierzchni* $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$, *zawartą między płaszczyznami* $z = 0, z = h$ *i* $h > 0$.

d) $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}dS$, *gdzie S jest powierzchnią boczną stożka* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z^2}{16}$ *dla* $0 \leqslant z \leqslant 4$.

Zastosowania geometryczne całek powierzchniowych niezorientowanych
Pole płata powierzchniowego gładkiego S wyraża się wzorem

$$|S| = \iint_S dS$$

Zadanie 1.3.3 *Obliczyć pole powierzchni płatów powierzchniowych wyciętych:*

$a)$ *walcem* $z^2 = 2py$ *z powierzchni* $x^2 + y^2 = z^2$,

$b)$ *walcem* $x^2 + y^2 = 1$ *z powierzchni* $2z = x^2 + y^2$,

$c)$ *powierzchnią* $x^2 + y^2 - Rx = 0$ *z powierzchni półkuli* $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,

$d)$ *powierzchnią* $x^2 + y^2 = 4$ *z paraboloidy hiperbolicznej* $2z = xy$.

Twierdzenie o zamianie całki powierzchniowej zorientowanej na całkę podwójną I
Jeżeli funkcja $R(x,y,z)$ jest ciągła na płacie regularnym S o równaniu postaci

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

zorientowanym dodatnio, to całka powierzchniowa zorientowana

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy$$

istnieje i daje się wyrazić za pomocą całki podwójnej wzorem

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_D R(x,y,f(x,y))dxdy$$

gdzie D jest rzutem płata regularnego S na płaszczyznę OXY.
Jeżeli funkcja $P(x,y,z)$ jest ciągła na płacie regularnym S o równaniu postaci

$$x = g(y,z), \quad (y,z) \in D_1$$

zorientowanym dodatnio, tzn. wektor normalny do S tworzy z dodatnim kierunkiem osi OX kąt ostry, to

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \iint_{D_1} P(g(y,z),y,z)dydz$$

gdzie D_1 jest rzutem płata regularnego S na płaszczyznę OYZ.
Jeżeli funkcja $Q(x,y,z)$ jest ciągła na płacie regularnym S o równaniu postaci

$$y = h(x,z), \quad (x,z) \in D_2$$

zorientowanym dodatnio, tzn. wektor normalny do S tworzy z dodatnim kierunkiem osi OY kąt ostry, to

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \iint_{D_2} Q(x,h(x,z),z)dxdz$$

gdzie D_2 jest rzutem płata regularnego S na płaszczyznę OXZ.

Twierdzenie o zamianie całki powierzchniowej zorientowanej na całkę podwójną II
Jeżeli funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ są ciągłe na płacie powierzchniowym regularnym opisanym równaniem $z = f(x,y)$, gdzie $(x,y) \in D$, to

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \varepsilon \iint_D [-P(x,y,f(x,y))f'_x(x,y) - Q(x,y,f(x,y))f'_y(x,y) + R(x,y,f(x,y))]dxdy$$

przy czym $\varepsilon = 1$, jeżeli płat S zorientowany jest tak, że $\cos\gamma > 0$, natomiast $\varepsilon = -1$ jeśli orientacja jest przeciwna.

Twierdzenie o zamianie całki powierzchniowej zorientowanej na całkę podwójną III
Jeżeli płat powierzchniowy gładki S określony jest równaniami parametrycznymi

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v), \quad (u,v) \in \Delta$$

wówczas całka powierzchniowa zorientowana

$$\iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

sprowadza się do całki podwójnej po obszarze płaskim Δ zgodnie ze wzorem

$$\iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint\limits_\Delta [P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)} +$$

$$+Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}]dudv$$

Zadanie 1.3.4 *Obliczyć całki:*

a) $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy,$ *gdzie S jest częścią powierzchni* $z = \frac{1}{4} - x^2 - y^2,$ *leżącą w I oktancie układu współrzędnych, zorientowaną tak, że* $\cos\gamma > 0$

b) $\iint\limits_S \vec{W} d\vec{S},$ *gdzie* $\vec{W} = 4\vec{i} + (2x-2)\vec{k}$ *oraz S jest częścią powierzchni* $\vec{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 4 - u^2]$ *dla* $u \in \langle 1, 2\rangle, v \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ *zorientowaną zewnętrznie*

c) $\iint\limits_S \vec{W} d\vec{S},$ *gdzie* $\vec{W} = (x+z)\vec{i} - 2x\vec{j} + (2z - x)\vec{k}$ *oraz S jest powierzchnią trójkąta o wierzchołkach A(1,0,0), B(0, 3, 0), C(0,0, -2), zorientowaną zgodnie z orientacją punktów A, B, C*

d) $\iint\limits_S (xz\cos\alpha - x\cos\beta - y\cos\gamma)dS,$ *gdzie S jest częścią powierzchni* $\vec{r}(r,\varphi) = [r\cos\varphi, r\sin\varphi, r]$ *dla* $r \in \langle 0, 1\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,$ *zorientowaną zewnętrznie*

e) $\iint\limits_S (2\cos\alpha + y\cos\beta - x^2 z\cos\gamma)dS,$ *gdzie S jest zewnętrzną stroną brzegu obszaru* $V = \{(x,y,z) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, 4x^2 + y^2 + 4z^z \leqslant 4\}$

f) $\iint\limits_S dydz - 2dxdz + x^3 dxdy,$ *gdzie S jest częścią powierzchni leżącą w I oktancie układu współrzędnych, utworzoną z powierzchni* $z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2 + y^2 = 4z - 4$ *zorientowaną zewnętrznie*

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego
Jeżeli funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ są ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ wewnątrz i na brzegu obszaru przestrzennego V, który jest normalny względem wszystkich płaszczyzn układu współrzędnych i jeżeli brzeg S obszaru V jest powierzchnią regularną zamkniętą zorientowaną skierowaniem wektora normalnego do powierzchni S na zewnątrz obszaru V, to

$$\iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \tag{1.9}$$

Zadanie 1.3.5 *Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego obliczyć całki:*

a) $\iint\limits_S xzdydz + xydxdz + yzdxdy$, *jeżeli* S *jest zewnętrzną stroną powierzchni ograniczonej walcem* $x^2 + y^2 = R^2$ *i płaszczyznami* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *i* $z = k$,

b) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, *jeżeli* S *jest zewnętrzną stroną powierzchni kuli o równaniu* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

c) $\iint\limits_S (x - y + z)dydz + (y - z + x)dxdz + (z - x + y)dxdy$, *jeżeli* S *jest zewnętrzną stroną powierzchni o równaniu* $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

Twierdzenie Stokesa
Jeżeli funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ są ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu w pewnym obszarze zawierającym powierzchnię dwustronną S ograniczoną krzywą K, przy czym orientacja tej krzywej jest zgodna z orientacją powierzchni S, to

$$\oint_K Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Zadanie 1.3.6 *Korzystając ze wzoru Stokesa obliczyć całki:*

a) $\int\limits_K x^2y^3dx + dy + zdz$, *jeżeli* K *jest okręgiem* $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ *dodatnio zorientowanym,*

b) $\int\limits_K xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$, *gdzie* K: $x(t) = a\sin t$, $y(t) = a\cos t$, $z(t) = a(\sin t + \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

c) $\int\limits_K y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$, *jeżeli* K: $x(t) = \cos t$, $y(t) = a\cos 2t$, $z(t) = a\cos 3t$ *jest krzywą zamkniętą, która biegnie w kierunku wzrastania parametru* t.

1.4 Elementy teorii pola

Definicja operatora Hamiltona
Operator Hamiltona (nabla), ozn. symbolem $\bigtriangledown$, określony jest wzorem

$$\bigtriangledown = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$$

Definicja gradientu
Gradientem pola skalarnego φ nazywamy pole wektorowe określone następująco

$$\mathbf{grad}\ \varphi = \bigtriangledown_{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\vec{k}$$

Zadanie 1.4.1 *Wyznaczyć gradient funkcji skalarnej $F(x, y, z)$:*

a) $F(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz,$

b) $F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$

c) $F(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z},$

d) $F(x, y, z) = z - arctg\frac{y}{x},$

e) $F(x, y, z) = xyz.$

Definicja dywergencji
Dywergencją pola wektorowego $\vec{W}$ nazywamy pole skalarne określone następująco

$$\mathbf{div}\,\vec{W} = \bigtriangledown \circ \vec{W} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Definicja rotacji
Rotacją pola wektorowego $\vec{W}$ nazywamy pole wektorowe określone następująco

$$\mathbf{rot}\,\vec{W} = \bigtriangledown \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Zadanie 1.4.2 *Wyznaczyć dywergencję i rotację pola wektorowego $\vec{W}$:*

a) $\vec{W} = (y - x)\vec{i} + (2x - y)\vec{j} + z\vec{k}$,

b) $\vec{W} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$,

c) $\vec{W} = (x + z)\vec{i} - y\vec{j} + x\vec{k}$,

d) $\vec{W} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}$, *gdzie* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

e) $\vec{W} = -\frac{1}{2}xy^2\vec{i} - zy^2\vec{j} - xz^2\vec{k}$,

f) $\vec{W} = (x^2 + xy + 2z)\vec{i} + xyz\vec{j} + (x + z)\vec{k}$.

Definicja pola potencjalnego i potencjału
Pole wektorowe $\vec{W} = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$ nazywamy potencjalnym, jeżeli istnieje funkcja U zwana potencjałem pola wektorowego $\vec{W}$, dla której

$$\mathbf{grad} U = \vec{W} \ .$$

Zadanie 1.4.3 *Sprawdzić, czy pole $\vec{W}$ jest potencjalne. Jeśli tak, znaleźć jego potencjał:*

a) $\vec{W} = [e^y, xe^y - 4y]$,

b) $\vec{W} = [(xy+1)e^{xy}, x^2e^{xy}]$,

c) $\vec{W} = [ye^x, xe^y]$,

d) $\vec{W} = (3x^2 + 2x \sin \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y} \cos \frac{x}{y})\vec{i} + \frac{x^3}{y^2} \cos \frac{x}{y} \vec{j}$,

e) $\vec{W} = (3 \cos x + y^2)\vec{i} + (4xy^2 - e^x)\vec{j}$,

f) $\vec{W} = 2(x+y)\vec{i} + (2x + 3y^2)\vec{j}$,

g) $\vec{W} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$,

h) $\vec{W} = [3x^2 + 2xyz, x^2z + 2y, x^2y + 2z + 2]$,

i) $\vec{W} = [x+z, -y, 2]$,

j) $\vec{W} = (x^3 - 5yz)\vec{i} + (y^3 - 5xz)\vec{j} + (z^3 - 5xy)\vec{k}$,

k) $\vec{W} = (2xy + z^2)\vec{i} + x^2\vec{j} + (2xz + \pi \cos(\pi z))\vec{k}$,

l) $\vec{W} = [y+z, x+z, x+y]$.

Definicja strumienia pola
Jeżeli na powierzchni dwustronnej S określone jest pole wektorowe $\vec{W} = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$, to strumieniem wektora $\vec{W}$ (lub strumieniem pola $\vec{W}$ przez powierzchnię S w kierunku wersora $\vec{n}$ nazywamy całkę powierzchniową

$$\iint\limits_S \vec{W} \circ \vec{n}\, dS$$

gdzie strona powierzchni S określona jest wersorem normalnym $\vec{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

Zadanie 1.4.4 *Obliczyć strumień pola wektorowego $\vec{W}$ przez podaną powierzchnię:*

a) $\vec{W} = x\vec{i} - y\vec{j} + z^2\vec{k}$, *S - zewnętrzna strona powierzchni* $\vec{r}(\varphi, z) = 4\cos\varphi\vec{i} + 4\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k}$, *dla* $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$, $0 \leqslant z \leqslant 4 - 4\cos\varphi - 4\sin\varphi$,

b) $\vec{W} = [xz, -yz, y]$, *S - powierzchnia* $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ *zorientowana zewnętrznie,*

c) $\vec{W} = [z, 3y - x, -z]$, *S - zewnętrzna strona powierzchni bryły ograniczonej powierzchniami* $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 + 2$, $z = 0$,

d) $\vec{W} = [-xz, x^2y, x]$, *S - zewnętrzna strona powierzchni bryły ograniczonej powierzchniami* $z = x^2 + y^2 - 4$, $z = 0$,

e) $\vec{W} = [x, -x - 2y, y]$, *S - zewnętrzna strona powierzchni bryły ograniczonej powierzchniami* $z = 4 - 2(x^2 + y^2)$, $z = 2(x^2 + y^2)$,

f) $\vec{W} = [x, y, z]$, *S - powierzchnia boczna stożka* $x^2 + y^2 = 4z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ *zorientowana w kierunku normalnej zewnętrznej.*

Twierdzenia Gaussa -Ostrogradzkiego
Całka potrójna z dywergencji wektora pola $\vec{W}$ po obszarze przestrzennym V, ograniczonym powierzchnią zamkniętą S, równa się strumieniowi wektora pola $\vec{W}$ przez powierzchnię S zorientowaną na zewnątrz obszaru V, co zapisujemy w postaci wektorowej

$$\iiint\limits_V \mathbf{div}\vec{W}\, dxdydz = \iint\limits_S \vec{W} \circ \vec{n}\, dS$$

Zadanie 1.4.5 *Stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego, obliczyć strumień pola wektorowego* $\vec{W} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *przez powierzchnię* S*, gdy* S *jest:*

a) *powierzchnią boczną walca* $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ *dla* $|z| \leqslant H$ *zorientowaną na zewnątrz,*

b) *wewętrzną stroną powierzchni bocznej stożka* $x^2 + y^2 \leqslant 4z^2$ *dla* $0 \leqslant z \leqslant 1$,

c) *zewnętrzną stroną powierzchni sześcianu* $-a \leqslant x \leqslant a$, $-a \leqslant y \leqslant a$, $-a \leqslant z \leqslant a$.

Twierdzenie Stokesa
Cyrkulacja wektora pola $\vec{W}$ wzdłuż krzywej zamkniętej K równa się strumieniowi rotacji wektora $\vec{W}$ przez zorientowaną powierzchnię S, której brzegiem jest krzywa K, co zapisujemy krótko w postaci

$$\int\limits_K P dx + Q dy + R dz = \iint\limits_S \mathbf{rot}_n \vec{W} dS,$$

gdzie $\mathbf{rot}_n\vec{W}$ oznacza składową skalarną rotacji wektora pola $\vec{W}$ wzdłuż normalnej $\vec{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ do powierzchni S.

Zadanie 1.4.6 *Stosując wzór Stokesa obliczyć cyrkulację wektora* $\vec{W}$ *wzdłuż krzywej* K*, gdy:*

a) $\vec{W} = (x - y + 3z)\vec{i} + (y - 3x + z)\vec{j} + (x - 3y + z)\vec{k}$, *$K$ jest dodatnio zorientowaną linią przecięcia się płaszczyzny* $2x + 3y + 6z = 3$ *z płaszczyznami układu współrzędnych,*

b) $\vec{W} = [y, z, x]$, *K jest dodatnio zorientowaną krawędzią przecięcia się powierzchni* $z = 2(1 - x^2 - y^2)$ *z płaszczyzną* $z = 0$,

c) $\vec{W} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, *$K$ jest ujemnie zorientowanym brzegiem powierzchni o równaniu* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

Rozdział 2

Szeregi

2.1 Szeregi liczbowe

Definicja zbieżności szeregu liczbowego

Szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy **zbieżnym**, jeżeli ciąg jego sum częściowych $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ jest zbieżny do granicy właściwej, tj.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{2.1}$$

natomiast **rozbieżnym** w przypadku przeciwnym, tj. kiedy granica ta jest niewłaściwa lub nie istnieje.
Granicę S nazywamy **sumą szeregu** nieskończonego lub krótko sumą szeregu.

Zadanie 2.1.1 *Na podstawie definicji zbadać zbieżność szeregów:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n+1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+e^n+\pi^n}{5^n}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 5$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ *i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$

Zadanie 2.1.2 *Wyznaczyć sumę szeregów:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-15}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n+4^n}{5^n}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ *i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2})$

Warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego

Jeżeli szereg nieskończony $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Wniosek

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Zadanie 2.1.3 *Sprawdzić, czy podane szeregi spełniają warunek konieczny zbieżności:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 15}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+5)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{\frac{n}{3}}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ *f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n + 7^n}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\frac{1}{n}$ *h)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ *i)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{arctg} n)^n}{\pi^n}$

Zadanie 2.1.4 *Pokazać rozbieżność szeregów:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n-1}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin\frac{1}{2n}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$ *f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - 1}{\sqrt[3]{n^2+n}}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2^n+1)^2}$ *h)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}}$ *i)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^4 - n^2 + 1}}{1 - n^2}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ *k)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$

Kryterium porównawcze I

Jeżeli wyrazy szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są nieujemne, a ponadto istnieje taka liczba naturalna N, że dla każdego $n > N$ jest spełniona nierówność

$$a_n \leqslant b_n$$

to

1^0 ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

2^0 z rozbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Kryterium porównawcze II

Jeżeli wyrazy szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są dodatnie oraz istnieje granica k:

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

skończona i większa od zera, to rozpatrywane szeregi są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Zadanie 2.1.5 *Zbadać zbieżność szeregów:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2-1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-5}{n^2-8n+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{2n^2+8n+6}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^3+n-2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2-1}}{2n^2+n-7}$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n\sqrt{n}+n-1}$ *i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3+-n^2+n-1}}{\sqrt[3]{n^5}+n+2}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{\sqrt{n^7+3n^5-n^3+e}}$ *k)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n\sqrt[3]{n+1}-1}$ *l)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^4-n^2+1}}{n^2-1}$

m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ *n)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$ *o)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3^n}$ *q)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$ *r)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\frac{1}{n}$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2}$ *t)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{\sqrt{n^5+1}}$ *u)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^3+1}\cos\frac{1}{n}$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\sin^5\frac{1}{\sqrt{n}}$

Kryterium d'Alemberta
Jeżeli istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{2.2}$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, gdy $g < 1$, natomiast rozbieżny, gdy $g > 1$.

Zadanie 2.1.6 *Zbadać zbieżność szeregów:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ *f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ *h)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$ *i)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 2^n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$ *k)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ *l)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

m) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} e^{-n} n^3$ *n)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\pi^{-n}$ *o)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+2)!}{5^n (2n)!}$ *t)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(n+3)!3^n}{(2n)!}$ *u)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! - n!}{n^{2n} + n^2}$

Kryterium Cauchy'ego
Jeżeli istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \tag{2.3}$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny, gdy $g < 1$, natomiast rozbieżny, gdy $g > 1$.

Zadanie 2.1.7 *Zbadać zbieżność szeregów:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{5^{n+1}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)5^n}{2^{n+1}3^n}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{2^n 3^{n+1}}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n+2)^{n^2}}{n^{n^2}}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^{n^2}}{9^n n^{n^2}}$ i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+2)^{n^2}}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{\pi^n}$ k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$

m) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$ n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2^n+1)^2}$ o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+7^{2n}}{7^n+9^n}$

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n}$ r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{5}{7}\right)^n$ s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^{n^2}}{(\pi n+1)^{n^2}}$

t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{n+4}{2n}\right)^n$ u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$ v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n$

Kryterium Leibniza
Jeżeli ciąg (a_n) o wyrazach $a_n > 0$ jest nierosnący oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg naprzemienny postaci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Zadanie 2.1.8 *Zbadać zbieżność szeregów:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+4n+3}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n-1}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{2n}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

Definicja zbieżności bezwzględnej i warunkowej
Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dowolnych nazywamy szeregiem bezwzględnie zbieżnym, jeśli zbieżny jest jednocześnie szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jeżeli zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, zaś szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest jednocześnie rozbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy szeregiem warunkowo zbieżnym.

Kryterium bezwzględnej zbieżności
Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zadanie 2.1.9 *Zbadać zbieżność podanych szeregów. W przypadku szeregów zbieżnych określić rodzaj zbieżności.*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2n}{n^2+1}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+3}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (2\pi)^{-n}$ *e)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ *f)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ *h)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ *i)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n+2}{n^2+5}$ *k)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ *l)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n+1)!}{8^n n^2}$

m) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ *n)* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cos n\pi$ *o)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos n\pi$

p) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ *r)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *s)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n+1)}$ *u)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^n+e^{-n}}{e^n-e^{-n}}$ *v)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-7)^n \frac{(n!)^2 \sin \frac{1}{n}}{n^{2n-1}}$

2.2 Szeregi funkcyjne i potęgowe

Definicja zbieżności szeregu funkcyjnego

Szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy zbieżnym w zbiorze X, jeżeli ciąg jego sum czściowych $(S_n(x))$ jest zbieżny w tym zbiorze, tj.

$$S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$$

natomiast rozbieżnym w przypadku przeciwnym.

Funkcję graniczną $S(x)$ nazywamy sumą szeregu funkcyjnego w zbiorze X i piszemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{X}{=} S(x)$$

Jeżeli ciąg $(S_n(x))$ jest jednostajnie zbieżny w zbiorze X, to szereg funkcyjny nazywamy jednostajnie zbieżnym w tym zbiorze.

Jeżeli szereg funkcyjny jest zbieżny w zbiorze X i ma tę własność, że jest zbieżny w tym zbiorze szereg utworzony z wartości bezwzględnych jego wyrazów, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, to nazywamy go bezwzględnie zbieżnym w zbiorze X.

Kryterium Weierstrassa

Jeżeli istnieje taka liczba naturalna N, że dla każdego $n \geqslant N$ i dla każdego $x \in X$ spełniona jest nierówność

$$|f_n(x)| \leqslant a_n$$

przy czym szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.4}$$

jest zbieżny, to szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2.5}$$

jest zbieżny w zbiorze X jednostajnie i bezwzględnie.

Szereg (2.4) nazywamy majorantą liczbową szeregu (2.5).

Zadanie 2.2.1 *Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu funkcyjnego:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ *f)* $2(x-5)+\sum\limits_{n=2}^{\infty}[2^n(x-5)^n - 2^{n-1}(x-5)^{n-1}]$

Zadanie 2.2.2 *Wyznaczyć obszar jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^n}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+x^2}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos^2 x}$ *e)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^3}$ *f)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$

Definicja promienia i przedziału zbieżności szeregu potęgowego
Promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{2.6}$$

nazywamy liczbę $R > 0$ tak dobraną, że dla $|x| < R$ szereg jest zbieżny, a dla $|x| > R$ rozbieżny.
Przedział $(-R, R)$ nazywamy przedziałem zbieżności szeregu potęgowego (2.6). Jest to największy przedział, wewnątrz którego szereg potęgowy jest zbieżny. Jeżeli szereg potęgowy (2.6) jest zbieżny dla wszystkich x, to przyjmujemy, że $R = \infty$, jeżeli jest on zbieżny tylko dla $x = 0$, to przyjmujemy $R = 0$.
Na krańcach przedziału zbieżności szereg może być bądź zbieżny, bądź też rozbieżny.

Twierdzenie Cauchy-Hadamarda
Jeżeli dla szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$$

to promień zbieżności R tego szeregu wyraża się wzorem

$$R = \begin{cases} \frac{1}{g}, & \text{dla } \; 0 < g < +\infty \\ 0, & \text{dla } \; g = +\infty \\ +\infty, & \text{dla } \; g = 0 \end{cases}$$

Twierdzenie d'Alemberta
Jeżeli dla szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$$

to promień zbieżności R tego szeregu wyraża się wzorem

$$R = \begin{cases} \frac{1}{g}, & \text{dla} \quad 0 < g < +\infty \\ 0, & \text{dla} \quad g = +\infty \\ +\infty, & \text{dla} \quad g = 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.2.3 *Znaleźć promień zbieżności szeregów:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt[3]{2^n}}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} x^n$ *c)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1} n^n}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n$ *f)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} x^n$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ *h)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+3} x^{2n+1}$ *i)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+3}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

Zadanie 2.2.4 *Znaleźć promień zbieżności, przedział zbieżności oraz określić rodzaj zbieżności na krańcach przedziału zbieżności szeregów:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(2x)^n$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n3^n}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}} x^n$ *f)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x)^n}{n^2+3}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^n}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ *h)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *i)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(3n+2)}{3^n} x^{2n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+e)^n}{\sqrt[3]{2n}}$ *k)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+2)^n}{2^n} x^{2n+1}$ *l)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2n}$

) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+2)4^n}$ *m)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n^2 9^n}$ *n)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$ *p)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{1+2^n}$ *r)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n$

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\sqrt{n+1}}$ *t)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(n+5)5^n}$ *u)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(x-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

v) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{\sqrt{(n-1)4^n}}$ *w)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^2 3^n}$ *x)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}x^n}{\sqrt{n}7^n}$

Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego

Jeżeli x należy do wnętrza przedziału zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{2.7}$$

Twierdzenie o całkowaniu szeregu potęgowego

Jeżeli x należy do wnętrza przedziału zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} \tag{2.8}$$

Zadanie 2.2.5 *Znaleźć sumy podanych szeregów wewnątrz przedziału zbieżności:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ *b)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)3^n}{4^n} x^{n+2}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{4^n} x^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n2^n}$ *e)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)4^n}$ *f)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(n+1)(n+2)}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}x^{2n}}{n4^n}$ *h)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n} x^n$ *i)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n(2n+3)}{4^n} x^{2n}$

j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)5^n}$ *k)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{6^n}$ *l)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{3^n}$

m) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ *n)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}x^n}{2n+1}$ *o)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)x^{2n}}{4^n}$

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n} x^n$ *r)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ *s)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{3^n} x^n$

Zadanie 2.2.6 *Korzystając z odpowiedniego szeregu potęgowego znaleźć sumę szeregu liczbowego:*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n(n+1)}$ *b)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{4^n}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ *e)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)3^n}{4^n}$ *f)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+3)}{2^{2n+2}}$

2.3 Szereg Taylora i Maclaurina

Rozwinięcia podstawowych funkcji elementarnych w szereg Maclaurina

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad x \in (-1,1)$$

Zadanie 2.3.1 *Rozwinąć następujące funkcje w szereg Maclaurina i podać przedziały zbieżności otrzymanych szeregów:*

a) $f(x) = xe^{-x}$ *b)* $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ *c)* $f(x) = \ln(x^2+5x+6)$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ *e)* $f(x) = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$ *f)* $f(x) = \cos^2 x$

g) $f(x) = \ln(1+x)$ *h)* $f(x) = x\cos x^2$ *i)* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

j) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ *k)* $f(x) = \operatorname{arctg} x$ *l)* $f(x) = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

m) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ *n)* $f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$ *o)* $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

p) $f(x) = \ln(2-3x+x^2)$ *r)* $f(x) = \ln\frac{1+x}{1+2x}$ *s)* $f(x) = x + \sin x\cos x$

t) $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ *u)* $f(x) = e^x\ln(1+x)$ *v)* $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$

w) $f(x) = x\ln(10+x)$ *x)* $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ *y)* $f(x) = e^{-x}\sin x$

Zadanie 2.3.2 *Rozwinąć następujące funkcje w szereg Taylora w otoczeniu wskazanych punktów i podać przedziały zbieżności otrzymanych szeregów:*

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$,	$x_0 = 1$	*b*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,	$x_0 = 2$
c) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$,	$x_0 = 2$	*d*) $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$,	$x_0 = 1$
e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$,	$x_0 = 2$	*f*) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-3x+2}$,	$x_0 = 3$
g) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-6x+11}$,	$x_0 = 3$	*h*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+7}$,	$x_0 = -2$
i) $f(x) = x\sqrt{x}$,	$x_0 = 1$	*j*) $f(x) = \cos^2 x$,	$x_0 = \frac{\pi}{3}$
k) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$,	$x_0 = 2$	*l*) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$,	$x_0 = \frac{\pi}{2}$

2.4 Szereg Fouriera

Definicja szeregu trygonometrycznego Fouriera
Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $\langle -l, l\rangle$. Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji f nazywamy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{2.9}$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, ...$$

Zadanie 2.4.1 *Rozwinąć w szereg Fouriera następujące funkcje:*

a) $f(x) = x\cos x$ *w przedziale* $-\pi < x < \pi$

b) $f(x) = e^x - 1$ *w przedziale* $0 < x < 2\pi$

c) $f(x) = |x|$ *w przedziale* $|x| < 1$

d) $f(x) = |x|$ *w* $[-\pi, \pi]$

e) $f(x) = |x+1|$ *w przedziale* $-3 \leqslant x \leqslant 1$

f) $f(x) = x + \sin x$ *w przedziale* $(-\pi, \pi)$

g) $f(x) = |\sin x|$ *dla dowolnego* x

h) $f(x) = 3 - |x|$ *w przedziale* $[-6, 6]$

i) $f(x) = x^2 - 1$ *w przedziale* $[-2, 2]$

j) $f(x) = e^x$ *w przedziale* $(-\pi, \pi)$

k) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leqslant 0 \\ 2x, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$

m) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

n) $f(x) = \begin{cases} -\cos x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \cos x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

o) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & 1 < x < 3 \\ 4 - x, & 3 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

p) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

Rozwinięcie Fouriera dla funkcji parzystej i nieparzystej

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest parzysta, to $b_n = 0$, $n = 1, 2, ...$ oraz

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, ...$$

Wówczas rozwinięcie w szereg trygonometryczny Fouriera przyjmuje postać

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{2.10}$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieparzysta, to $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, ...$ oraz

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, ...$$

Wówczas rozwinięcie w szereg trygonometryczny Fouriera przyjmuje postać

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.11}$$

Zadanie 2.4.2 *Rozwinąć w szereg trygonometryczny Fouriera wg sinusów następujące funkcje:*

a) $f(x) = 1 - |x-1|$ *w* $(0, 2)$

b) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ *w* $(0, \pi)$

c) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ *w* $(0, 2\pi)$

d) $f(x) = (x + \sin^2 x)\sin x$ *w* $(0, \pi)$

Zadanie 2.4.3 *Rozwinąć funkcję* $f(x) = x(\pi - x)$ *w szereg trygonometryczny Fouriera według sinusów w przedziale* $(0, \pi)$. *Z otrzymanego wyniku skorzystać przy wyznaczaniu sumy szeregu* $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} + \ldots$

Zadanie 2.4.4 *Rozwinąć w szereg trygonometryczny Fouriera wg cosinusów następujące funkcje:*

a) $f(x) = x$ *w* $(0, \pi)$ *i obliczyć sumę szeregu* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ *i obliczyć sumę szeregu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$

c) $f(x) = x \cos x$ *w* $(0, \pi)$ *i obliczyć sumę szeregu* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^2+1}{(4n^2-1)^2}$

d) $f(x) = \sin^2 x$ *w* $(0, \pi)$ *i obliczyć sumę szeregu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

Rozdział 3

Równania różniczkowe

3.1 Równania różniczkowe rzędu pierwszego

Definicja równania różniczkowego rzędu pierwszego
Równaniem różniczkowym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$f(x, y, y') = 0 \tag{3.1}$$

gdzie y jest funkcją niewiadomą zmiennej x.
Całką ogólną równania (3.1) *nazywamy funkcję*

$$y = F(x, C) \tag{3.2}$$

zmiennej niezależnej $x \in (a, b)$ i stałej dowolnej C, która dla każdej ustalonej wartości C wybranej dowolnie z pewnego przedziału spełnia w przedziale (a, b) równanie (3.1)*. Całka ogólna jest jednoparametrową rodziną krzywych całkowych danego równania.*
Całką szczególną równania (3.1) *nazywamy każdą funkcję $y = \varphi(x)$, która w przedziale (a, b) ma pierwszą pochodną i spełnia równanie* (3.1) *dla każdego $x \in (a, b)$.*

Zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu pierwszego polega na wyznaczeniu takiej całki szczególnej równania (3.1)*, która dla pewnej z góry danej wartości zmiennej niezależnej $x = x_0$ przyjmuje z góry daną wartość y_0, tzn. $y(x_0) = y_0$.*
Uwzględniając w całce ogólnej (3.2) *warunek początkowy mamy*

$$y_0 = F(x_0, C)$$

stąd obliczamy stałą dowolną C.
Wstawiając obliczoną wartość liczbową stałej C do rozwiązania (3.2) *otrzymujemy szukaną całkę szczególną.*

Definicja równania o zmiennych rozdzielonych
Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)} \tag{3.3}$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych.

Równanie (3.3) zapisujemy także w postaci

$$y' = \frac{f(x)}{h(y)} \qquad \textit{lub} \qquad h(y)y' = f(x)$$

albo też w postaci różniczkowej

$$h(y)dy = f(x)dx \tag{3.4}$$

od której pochodzi nazwa – równanie o zmiennych rozdzielonych.
Całkując stronami równanie (3.4) otrzymujemy

$$H(y) = F(x) + C \tag{3.5}$$

gdzie H i F oznaczają pewne funkcje pierwotne odpowiednio funkcji h i f, C jest dowolną stałą.
Jeśli rozwiążemy równanie (3.5) względem zmiennej y otrzymamy całkę ogólną równania (3.3).

Zadanie 3.1.1 *Rozwiązać równania:*

a) $xy' = 3y$,

b) $x^2y' = y^2 + 4$,

c) $y' = \dfrac{y^3}{x^2}$,

d) $y' = \sqrt{xy}$,

e) $y' - \cos^2 y \cdot \ln x = 0$,

f) $(xy^2 + 2y^2)dx - (x^2 - 3x^2y)dy = 0$.

Zadanie 3.1.2 *Rozwiązać zagadnienia Cauchy'ego:*

a) $y' = x^2y^2, \quad y(1) = -3$,

b) $y' = e^{3x-y}, \quad y(0) = 0$,

c) $y' + y^2 = 0, \quad y(0) = 1$,

d) $y'\cos y + 2x\sin y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$,

e) $y' = 2\sqrt{y}\ln x, \quad y(e) = 1$

f) $y' = \dfrac{ye^x}{1+e^x}, \quad y(0) = 2$.

Definicja równania różniczkowego jednorodnego
Równanie różniczkowe pierwszego rzędu postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0 \tag{3.6}$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy równaniem różniczkowym jednorodnym.

Równanie jednorodne (3.6) rozwiązujemy sprowadzając je za pomocą podstawienia

$$u(x) = \frac{y}{x} \tag{3.7}$$

do równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych.
Podstawienie (3.7) można zapisać w postaci

$$y = u(x) \cdot x$$

Różniczkując otrzymujemy

$$y' = u' \cdot x + u$$

Zadanie 3.1.3 *Rozwiązać równania:*

a) $yy' = 2y - x,$

b) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2},$

c) $y' \cos\dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x} - 1,$

d) $y' = \dfrac{x+y}{x-y},$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},$

f) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}.$

Zadanie 3.1.4 *Rozwiązać zagadnienia Cauchy'ego:*

a) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}, \quad y(1) = \sqrt{2},$

b) $y' = \dfrac{x+y}{x}, \quad y(1) = 1,$

c) $\left(y' - \dfrac{y}{x}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = 1, \quad y(1) = 0,$

d) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0, \quad y(1) = -1,$

e) $y^3dy + (3y^2x + 2x^3)dx = 0, \quad y(1) = \sqrt{3},$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right), \quad y(1) = e.$

Definicja równania różniczkowego liniowego pierwszego rzędu
Równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = f(x) \tag{3.8}$$

gdzie $p(x)$ *i* $f(x)$ *są funkcjami ciągłymi w pewnym wspólnym przedziale* (a, b)*. Przedział* (a, b) *może być skończony lub nieskończony.*
Równanie (3.8) *nazywamy jednorodnym (ozn.* **RJ***), jeżeli* $f(x) \equiv 0$ *w rozważanym przedziale, natomiast niejednorodnym (ozn.* **RN***) w przypadku przeciwnym.*
Całka ogólna równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (3.8) *(w skrócie* **CORN***) jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego (***CORJ***) i całki szczególnej równania niejednorodnego (***CSRN***), tj.*

$$\mathbf{CORN} = \mathbf{CORJ} + \mathbf{CSRN} \tag{3.9}$$

Weźmy równanie różniczkowe liniowe jednorodne odpowiadające (3.8), postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = 0 \tag{3.10}$$

Funkcja $y = 0$ *spełnia to równanie.*
Dla $y \neq 0$ *równanie to jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy*

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

i dalej

$$y_0 = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad CORJ \tag{3.11}$$

Zadanie 3.1.5 *Wyznaczyć całki ogólne równań jednorodnych:*

a) $y' + \frac{2y}{x} = 0,$

b) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0,$

c) $y' - \frac{y}{\sin x} = 0,$

d) $e^{x^2} y' + xy = 0,$

e) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0,$

f) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(x-1)(x-2)} = 0.$

Metoda uzmienniania stałej

Całkę szczególną równania różniczkowego liniowego niejednorodnego można wyznaczyć stosując tzw. **metodę uzmienniania stałej**.

Metoda ta polega na tym, że zastępujemy we wzorze (3.11) stałą C nieznaną funkcją zmiennej x, ozn. $C(x)$, a następnie staramy się tak tę funkcję dobrać, aby wzór

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{3.12}$$

przedstawiał rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego.

Przypuśćmy, że taka funkcja $C(x)$ istnieje. Ze wzoru (3.12) obliczamy

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)) \tag{3.13}$$

Jeśli podstawimy (3.12) i (3.13) do równania niejednorodnego (3.8), to równanie to powinno być z założenia spełnione:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)) + p(x) \cdot C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

Po redukcji otrzymujemy

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

dla każdego $x \in (a, b)$. Stąd

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$$

gdzie C_1 jest dowolną stałą. Stąd CSRN przyjmuje postać

$$y_s = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Na podstawie twierdzenia

$$y = y_0 + y_s$$

Stąd

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx \qquad CORN \tag{3.14}$$

Metoda przewidywań

Metodę przewidywań stosujemy tylko w przypadku, gdy funkcja $p(x)$ w równaniu (3.8) jest stała, tzn. $p(x) \equiv p$, $p \in R \setminus \{0\}$, a więc gdy równanie (3.8) przyjmuje postać

$$\frac{dy}{dx} + p \cdot y = f(x) \tag{3.15}$$

oraz gdy potrafimy przewidzieć postać całki szczególnej równania liniowego niejednorodnego (3.15).

Przypadki kiedy potrafimy przewidzieć postać całki szczególnej, zależą od postaci funkcji $f(x)$ występującej po prawej strony równania (3.15) i są następujące:

1. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest wielomianem $P_n(x)$ n–tego stopnia, tj.*

$$f(x) \equiv P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

to całka szczególna $y_s(x)$ jest postaci

$$y_s(x) = Q_n(x)$$

gdzie $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ jest wielomianem również n–tego stopnia, którego współczynniki należy wyznaczyć.

2. *Jeżeli $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem n–tego stopnia, to przewidujemy, że całka szczególna $y_s(x)$ jest postaci*

$$y_s(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} Q_n(x), & \text{gdy} \quad p \neq -\alpha \\ x e^{\alpha x} Q_n(x), & \text{gdy} \quad p = -\alpha \end{cases}$$

gdzie $Q_n(x)$, $n \geqslant 0$, jest wielomianem również n–tego stopnia, którego współczynniki należy wyznaczyć.

3. *Jeżeli $f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$, gdzie $P_n(x)$ i $Q_n(x)$, $n \geqslant 0$, są wielomianami, z których przynajmniej jeden jest stopnia n, a drugi co najwyżej stopnia n, to przewidujemy, że całka szczególna $y_s(x)$ jest postaci*

$$y_s(x) = R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x$$

gdzie $R_n(x)$ i $S_n(x)$ są pewnymi wielomianami, których współczynniki należy wyznaczyć.

4. *Jeżeli $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$, gdzie $P_n(x)$ i $Q_n(x)$, $n \geqslant 0$, są wielomianami, z których przynajmniej jeden jest stopnia n, a drugi co najwyżej stopnia n, to przewidujemy, że całka szczególna $y_s(x)$ jest postaci*

$$y_s(x) = e^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x)$$

gdzie $R_n(x)$ i $S_n(x)$ są pewnymi wielomianami, których współczynniki należy wyznaczyć.

Twierdzenie
Jeżeli $y_{s_1}(x)$ *i* $y_{s_2}(x)$ *są odpowiednio całkami szczególnymi równań*

$$y' + p(x)y = f_1(x) \quad \text{oraz} \quad y' + p(x)y = f_2(x)$$

to funkcja $y_s(x) = y_{s_1}(x) + y_{s_2}(x)$ *jest całką szczególną równania*

$$y' + p(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Zadanie 3.1.6 *Wyznaczyć całki ogólne równań:*

a) $y' + \dfrac{3y}{x} = x,$

b) $y' + y\cos x = e^{-\sin x},$

c) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x,$

d) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,$

e) $\dfrac{dy}{dx} - y = x\sin x,$

f) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 25x^2e^{3x},$

g) $\dfrac{dy}{dx} - 4y = e^{4x}(x+1),$

h) $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x(\cos x + 3\sin x).$

Zadanie 3.1.7 *Wyznaczyć całki szczególne równań:*

a) $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 1,$

b) $y' + x^2y = x^2, \quad y(2) = 1,$

c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{1+x^2}y = x, \quad y(0) = \frac{1}{3},$

d) $y' + \dfrac{y}{x} = e^x, \quad y(1) = 1,$

e) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{xy}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad y(0) = 1.$

Zadanie 3.1.8 *Wyznaczyć całki szczególne równań:*

a) $y' + y = 2x, \quad y(0) = 2,$

b) $y' - 5y = e^{5x}, \quad y(\frac{1}{5}) = e,$

c) $y' - 4y = e^{4x}(2x^2 + \sin x), \quad y(0) = 1,$

d) $y' - y = 5\cos x - 3\sin 2x, \quad y(0) = -1,$

e) $y' + 2y = e^{3x}(\cos x + 2\sin x), \quad y(0) = \frac{2}{13},$

Definicja równania różniczkowego Bernoulli'ego
Równanie różniczkowe pierwszego rzędu postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \tag{3.16}$$

nazywamy równaniem różniczkowym Bernoulliego.

Gdy $\alpha = 0$, to równanie (3.16) jest równaniem liniowym niejednorodnym, gdy zaś $\alpha = 1$ równaniem liniowym jednorodnym. Zakładamy, że $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$.
Wówczas równanie (3.16) nie jest równaniem liniowym względem $y(x)$.
Podstawienie

$$z = y^{1-\alpha} \tag{3.17}$$

sprowadza równanie różniczkowe Bernoulliego (3.16) do równania różniczkowego liniowego niejednorodnego. Różniczkując (3.17) względem x otrzymujemy

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} \tag{3.18}$$

Mnożąc obustronnie równanie (3.16) przez $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ otrzymujemy

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + p(x)(1-\alpha)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x)$$

Uwzględniając (3.17) i (3.18) otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe względem funkcji $z(x)$ postaci

$$\frac{dz}{dx} + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$$

Zadanie 3.1.9 *Wyznaczyć całki ogólne równań:*

a) $y' + y = -xy^2$,

b) $y' - \dfrac{4y}{x} = x\sqrt{y}$,

c) $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$,

d) $\dfrac{dy}{dx}\cos x - y\sin x = y^4$.

Zadanie 3.1.10 *Wyznaczyć całki szczególne równań:*

a) $y' + \frac{1}{x}y = y^2\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$,

b) $y' + xy = xy^3, \quad y(0) = 2$,

c) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{xy}{1-x^2} = \dfrac{xy^2}{1-x^2}, \quad y(0) = 1$,

d) $x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2), \quad y(1) = 2$.

Definicja równania różniczkowego zupełnego
Równanie różniczkowe postaci

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{3.19}$$

nazywamy równaniem różniczkowym zupełnym, gdy istnieje funkcja $F(x,y)$ *klasy* C^2 *w obszarze* D*, której różniczka zupełna równa się lewej stronie tego równania, a więc gdy*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \quad i \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \tag{3.20}$$

w obszarze D*.*

Jeżeli funkcje $P(x,y)$ *i* $Q(x,y)$ *klasy* C^1 *w prostokącie* $D = \{(x,y) : x \in (a,b) \wedge y \in (c,d)\}$ *spełniają warunek* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *oraz funkcja* $Q(x,y)$ *nie przyjmuje wartości zero w żadnym punkcie tego prostokąta, to wzór*

$$F(x, y(x)) = C$$

przedstawia całkę ogólną równania różniczkowego zupełnego (3.19)*, a ponadto przez każdy punkt* (x_0, y_0) *prostokąta* D *przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania. Aby wyznaczyć całkę ogólną równania* (3.19) *wystarczy znaleźć dowolną funkcję pierwotną układu funkcji* P *i* Q *i przyrównać ją do stałej. Funkcję pierwotną* $F(x,y)$ *wyznaczamy z układu równań* (3.20)*.*

Zadanie 3.1.11 *Wyznaczyć całki ogólne równań:*

a) $(3xy^2 - x^2)dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)dy = 0,$

b) $(\ln y - 2x)dx + (\frac{x}{y} - 2y)dy = 0,$

c) $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0,$

d) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x}\right)dy = 0.$

Zadanie 3.1.12 *Wyznaczyć całki szczególne równań:*

a) $3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0, \quad y(0) = 1,$

b) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0, \quad y(2) = 3,$

c) $(1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx + (\sqrt{x^2+y^2} - 1)ydy = 0, \quad y(1) = 0,$

d) $\dfrac{dx}{y} + \dfrac{e^y(y-1) - x}{y^2}dy = 0, \quad y(0) = 1,$

e) $2(xe^{-y} - 1)dx + (e^y - x^2e^{-y})dy = 0, \quad y(3) = 0.$

3.2 Równania różniczkowe liniowe rzędu n o stałych współczynnikach

Definicja równania różniczkowego liniowego rzędu n o stałych współczynnikach

Równaniem różniczkowym rzędu n, które można zapisać w postaci

(3.21) $$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

gdzie p_1, p_2, ..., $p_n \in R$, *nazywamy równaniem liniowym o stałych współczynnikach.* *Funkcję* $f(x)$ *nazywamy wyrazem wolnym tego równania.* *Jeżeli w równaniu różniczkowym liniowym* (3.21) *wyraz wolny jest tożsamościowo równy zeru, tj. przyjmuje ono postać*

(3.22) $$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

to równanie takie nazywamy równaniem liniowym jednorodnym. *Jeżeli w równaniu różniczkowym liniowym* (3.21) *wyraz wolny nie jest funkcją tożsamościowo równą zeru, to równanie takie nazywamy równaniem liniowym niejednorodnym.*

Definicja układu fundamentalnego

Ciąg $(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ n *rozwiązań równania liniowego jednorodnego* (3.22) *określonych na przedziale* (a, b) *nazywamy układem fundamentalnym tego równania na tym przedziale, jeżeli dla każdego* $x \in (a, b)$ *spełniony jest warunek*

$$\det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Twierdzenie

Niech $(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ *będzie układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego* (3.22). *Wówczas dla każdego rozwiązania* $y(x)$ *tego równania istnieją jednoznacznie określone stałe rzeczywiste* C_1, C_2, ..., C_n *takie, że*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x).$$

Definicja równania charakterystycznego
Równanie postaci

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \tag{3.23}$$

nazywamy równaniem charakterystycznym równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach. Natomiast wielomian

$$w(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n \tag{3.24}$$

nazywamy wielomianem charakterystycznym tego równania.

Jeżeli wielomian charakterystyczny równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach (3) *ma s różnych rzeczywistych wartości własnych λ_1, λ_2, ..., λ_s o krotnościach odpowiednio k_1, k_2, ..., k_s i m różnych zespolonych wartości własnych $\alpha_1+i\beta_1$, $\alpha_2+i\beta_2$, ..., $\alpha_m+i\beta_m$, gdzie $\beta_j > 0$ dla $1 \leqslant j \leqslant m$, o krotnościach odpowiednio l_1, l_2, ..., l_m, przy czym $k_1 + ... + k_s + 2(l_1 + ... + l_m) = n$, to układ fundamentalny tego równania tworzą funkcje*

$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, ..., x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$

....

$e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, ..., x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}$

$$\begin{cases} e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x \\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x \end{cases}, \begin{cases} xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x \\ xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x \end{cases}, ..., \begin{cases} x^{l_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x \\ x^{l_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x \end{cases},$$

....

$$\begin{cases} e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x \\ e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x \end{cases}, \begin{cases} xe^{\alpha_m x}\cos\beta_m x \\ xe^{\alpha_m x}\sin\beta_m x \end{cases}, ..., \begin{cases} x^{l_m-1}e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x \\ x^{l_m-1}e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x \end{cases}.$$

W powyższym zestawieniu

1. *pierwiastkowi rzeczywistemu jednokrotnemu λ odpowiada funkcja*
$$e^{\lambda x}$$
2. *pierwiastkowi rzeczywistemu k–krotnemu λ odpowiada układ k funkcji*
$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda x}$$
3. *parze jednokrotnych sprzężonych ze sobą pierwiastków zespolonych $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ odpowiada para funkcji*
$$\begin{cases} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$$
4. *parze l–krotnych sprzężonych ze sobą pierwiastków zespolonych $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ odpowiada układ l par funkcji*
$$\begin{cases} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}, \begin{cases} xe^{\alpha x}\cos\beta x \\ xe^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}, ..., \begin{cases} x^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ x^{l-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$$

Niech $\varphi(x)$ będzie dowolnym rozwiązaniem równania liniowego niejednorodnego i niech $(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ będzie układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego. Wówczas dla każdego rozwiązania $y(x)$ równania niejednorodnego istnieją jednoznacznie określone stałe rzeczywiste C_1, C_2, ..., C_n takie, że

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + \varphi(x).$$

Zadanie 3.2.1 *Wyznaczyć całki ogólne równań:*

a) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0,$

b) $y^{(4)} - 6y'' + 9 = 0,$

c) $y^{(5)} + 9y''' = 0,$

d) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0,$

e) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0,$

f) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0,$

g) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0,$

h) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0.$

Zadanie 3.2.2 *Wyznaczyć całki szczególne równań:*

a) $y''' - 8y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2,$

b) $y^{(5)} - y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 1, y^{(4)}(0) = 2,$

c) $y''' + 2y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 1,$

d) $y''' + 3y'' - 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 2,$

e) $y^{(4)} - 5y'' + 10y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 6, y'''(0) = -14.$

Metoda przewidywań

Metodę przewidywań dla równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach (6) można stosować, jeżeli funkcja f występująca po prawej stronie równania ma postać

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x],$$

gdzie P_n, Q_m oznaczają wielomiany odpowiednio stopnia $n \geqslant 0$ i $m \geqslant 0$.
Jeżeli funkcja f dana jest wzorem jak wyżej, to całkę szczególną równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach szukamy w postaci

$$\varphi(x) = x^k e^{\alpha x}[S_p(x)\cos\beta x + R_p(x)\sin\beta x],$$

gdzie S_p i R_p są wielomianami stopnia $p = \max(n, m)$. Współczynnik k oznacza krotność pierwiastka $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ równania charakterystycznego (4), tzn. $k = 0$, gdy λ_0 nie jest pierwiastkiem równania (6), $k = 1$, gdy λ_0 jest pojedynczym pierwiastkiem równania (6), $k = s$, gdy λ_0 jest s–krotnym pierwiastkiem tego równania.
Współczynniki wielomianów S_p i R_p są do wyznaczenia.

Jeżeli funkcja $f(x)$ w równaniu (6) ma postać

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_k(x)$$

to całka ogólna równania (6) określona jest za pomocą wzoru

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ...\varphi_k(x)$$

gdzie $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, ..., k$, jest całką szczególną równania

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}y' + p_ny = f_i(x), \quad i = 1, 2, ..., k$$

Zadanie 3.2.3 *Wyznaczyć całki ogólne równań:*

a) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$,

b) $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$,

c) $y''' + 4y' = 3\cos 2x + 4\sin 2x$,

d) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$,

e) $y'' + 9y = e^x \cos 3x$,

f) $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}\sin x$,

g) $y'' + 4y = (5x + 2)\cos 2x + x\sin 2x$,

h) $y^{(5)} + 4y''' = e^x + 3\sin 2x + 1$,

i) $y'' + y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x$,

j) $y^{(4)} - y = 5e^x \sin x + x^4$,

k) $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$.

Zadanie 3.2.4 *Wyznaczyć całki szczególne równań:*

a) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \quad y(0) = 2, y'(0) = 2,$

b) $y'' + y = -\sin 2x, \quad y(\pi) = 1, y'(\pi) = 1,$

c) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 1,$

d) $y''' - y'' = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0 = y''(0) = 0,$

e) $y^{(4)} + y''' = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = a,$

f) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = \frac{4}{3}, y'(0) = \frac{1}{27},$

g) $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x), \quad y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi,$

h) $y^{(4)} - y = 8e^x, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0,$

i) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3,$

j) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x, \quad y(\pi) = 0, y'(\pi) = 2\pi e^{\pi},$

k) $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{5}{2}, y''(0) = -\frac{9}{2}.$

Metoda Lagrange'a

Jeżeli prawa strona równania liniowego niejednorodnego (6) jest takiej postaci, że nie potrafimy odgadnąć postaci całki szczególnej równania niejednorodnego (6), stosujemy metodę uzmienniania stałych nazywaną metodą Lagrange'a.
Metoda ta przedstawia się następująco:

1. *Znajdujemy najpierw całkę ogólną równania jednorodnego (3) odpowiadającego równaniu (6). Przypuśćmy, że jest ona postaci:*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) \tag{3.25}$$

2. *Zakładamy następnie, że stałe C_k, $k = 1, 2, ..., n$, występujące po prawej stronie równania (7) są funkcjami zmiennej x, innymi słowy uzmienniamy stałe. Wzór (7) przyjmuje wtedy postać:*

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + ... + C_n(x) y_n(x) \tag{3.26}$$

3. *Nieznane funkcje $C_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$, a właściwie ich pochodne wyznaczamy z następującego układu równań:*

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + ... + C_n'(x)y_n''(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{n-1}(x) + C_2'(x)y_2^{n-1}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{n-1}(x) = f(x) \end{cases} \tag{3.27}$$

4. *Rozwiązując układ równań (9) względem $C_k'(x)$, $k = 1, 2, ..., n$, otrzymujemy:*

$$C_k'(x) = \frac{W_k(x)}{W(x)}, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{3.28}$$

gdzie $W(x)$ oznacza wyznacznik charakterystyczny układu (9), zwany wyznacznikiem Wrońskiego (wrońskianem):

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{3.29}$$

oraz gdzie $W_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$ oznaczają wyznaczniki, które otrzymujemy z wyznacznika $W(x)$, zastępując w nim kolumnę k kolumną wyrazów wolnych układu (9).

5. *Całkujemy następnie równania (10). Otrzymujemy*

$$C_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{3.30}$$

gdzie opuszczono stałe całkowania gdyż chodzi o całkę szczególną.

6. *Podstawiając (12) do (8) otrzymujemy szukaną całkę szczególną równania niejednorodnego (6)*

Zadanie 3.2.5 *Wyznaczyć całki ogólne równań:*

a) $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x,$

b) $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^x},$

c) $y''' + y' = \dfrac{1}{\cos x},$

d) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x,$

e) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x,$

f) $y'' - y' = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}.$

Rozdział 4

Przekształcenie Laplace'a i jego zastosowanie

4.1 Przekształcenie Laplace'a

Definicja oryginału

*Funkcję zespoloną f zmiennej rzeczywistej t nazywamy **oryginałem**, jeżeli spełnione są trzy następujące warunki:*

1. *funkcje f i f' są przedziałami ciągłe na $< 0, +\infty)$, tzn. f i f' mają w każdym przedziale skończonym co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju;*
2. *$f(t) = 0$ dla $-\infty < t < 0$;*
3. *f jest funkcją rzędu wykładniczego o wskaźniku λ_0, tzn. istnieją takie dwie stałe λ_0 i $M > 0$, że dla każdego t spełniona jest nierówność*

$$|f(t)| < Me^{\lambda_0 t} .$$

Liczbę λ_0 nazywamy wskaźnikiem wzrostu funkcji f.

Definicja przekształcenia (transformaty) Laplace'a

***Przekształceniem** lub **transformatą Laplace'a** nazywamy operator $\mathcal{L}$, który każdemu oryginałowi f przyporządkowuje funkcję zespoloną Φ zmiennej zespolonej s, zwanej **transformatą** według wzoru*

$$\Phi(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

gdzie $s = \lambda + i\omega$.

Definicja odwrotnego przekształcenia Laplace'a
Jeżeli funkcja $f(t)$ *jest oryginałem, a funkcja* $\Phi(s)$ $(s = \lambda + i\omega)$ *jest transformatą Laplace'a funkcji* $f(t)$, *to w każdym punkcie, w którym* $f(t)$ *jest ciągła, słuszny jest wzór*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \Phi(s) e^{st} \, ds$$

dla $\Re e \; s = \lambda > \lambda_0$ *gdzie całkowanie odbywa się wzdłuż dowolnej prostej równoległej do osi urojonej o równaniu* $\Re e \; s = \lambda > \lambda_0$ *oraz gdzie* λ_0 *jest wskaźnikiem wzrostu oryginału* $f(t)$.
Przekształcenie to nazywamy ***przekształceniem odwrotnym względem przekształcenia Laplace'a*** *lub krótko* ***odwrotnym przekształceniem Laplace'a*** *i oznaczamy symbolem* $\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$.

Zadanie 4.1.1 *Znaleźć transformaty następujących oryginałów:*

a) $f(t) = 5 - e^{2t}$,

b) $f(t) = t^2 \sin 4t$,

c) $f(t) = 2(\sin t - t\cos t)$,

d) $f(t) = \sin at \cos bt$,

e) $f(t) = \sin^2 2t$,

f) $f(t) = \frac{4}{3}e^{at} + \frac{2}{3}e^{-t}\left(3\sqrt{3}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2} - 2\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

Zadanie 4.1.2 *Znaleźć oryginały następujących transformat:*

a) $\Phi(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2-1)}$,

b) $\Phi(s) = \dfrac{s}{(s^2+2s+2)(s+2)^2}$,

c) $\Phi(s) = \dfrac{5s+3}{s(s-1)(s^2+2s+5)}$,

d) $\Phi(s) = \dfrac{2s^3+s^2+2s+2}{s^5+2s^4+2s^3}$,

e) $\Phi(s) = \dfrac{s^2+2s-1}{s^3+3s^2+3s+1}$,

f) $\Phi(s) = \dfrac{1}{s^4+2s^3+3s^2+2s+1}$.

Ważniejsze własności przekształcenia Laplace'a

$\mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1\mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + c_2\mathcal{L}\left[f_2(t)\right], c_1, c_2 \in C$
$\mathcal{L}\left[f(at)\right] = \frac{1}{a}\Phi\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = \Phi\left(s - \alpha\right), \alpha \in C$
$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \Phi^{(n)}\left(s\right)$
$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n \mathcal{L}\left[f(t)\right] - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$

Transformaty Laplace'a ważniejszych funkcji

ORYGINAŁ $f(t)$	TRANSFORMATA $\Phi(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $n \in N$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$

4.2 Zastosowanie przekształcenia Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych liniowych rzędu n przy danych warunkach początkowych

Niech dane będzie równanie różniczkowe liniowe rzędu n o stałych współczynnikach

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = f(t)\ .$$

Zakładamy, że $a_0 \neq 0$ oraz że funkcja $f(t)$ i szukane rozwiązanie $y(t)$ wraz z pochodnymi aż do rzędu n włącznie są oryginałami.
Szukamy rozwiązania, które spełnia warunki początkowe

$$y(0) = b_0, \quad y'(0) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}\ .$$

Aby rozwiązać wyjściowe równanie stosujemy do niego obustronnie przekształcenia Laplace'a i wykorzystujemy wzór na n-krotne różniczkowanie oryginału

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(y) - s^{n-1} y(0^+) - s^{n-2} y'(0^+) - \ldots - y^{(n-1)}(0^+)\ .$$

Następnie stosujemy przekształcenie odwrotne Laplace'a, otrzymując rozwiązanie wyjściowego równania.

Zadanie 4.2.1 *Znaleźć rozwiązania następujących równań różniczkowych przy podanych warunkach początkowych:*

a) $x''' + x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,$

b) $x'' - 2x' + x = 2(1 + \sin t), \quad x(0) = 3, x'(0) = 0,$

c) $x'' + x' - 2x = 1 - 2t - 2\sin t - 6\cos t, \quad x(0) = 2, x'(0) = 1,$

d) $x^{(4)} - x = -4\cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 2, x'''(0) = 0,$

e) $x'' + 4x = e^{-t}, \quad x(0) = x'(0) = 0,$

f) $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1, x''(0) = 0,$

g) $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0,$

h) $x''' + x' = e^{-t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,$

i) $x''' + 2x'' + 5x = 0, \quad x(0) = -1, x'(0) = 2, x''(0) = 0,$

j) $x'' - 2x' + 2x = 2e^t \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0,$

k) $4x''' - 8x'' - x' - 3x = -8e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1.$