

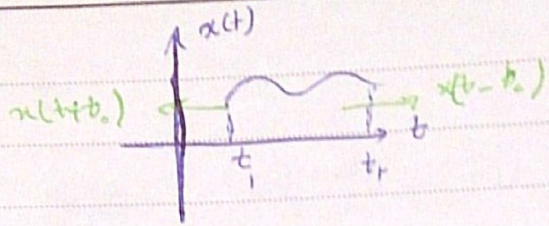
Subject:

Year:

Month:

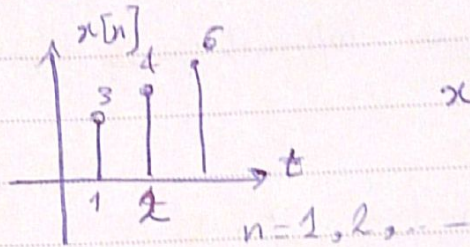
Date:

()



$x(t)$ اعمال مکرر
(پیوسته)

انواع
سیگنال ها



$x[n]$ سیگنال های دیجیتال
(نمونه)

شیفت تابع

تابع $x(t-t_0)$
اگر $t_0 > 0$ به سمت راست شیفت برداری کند
اگر $t_0 < 0$ به سمت چپ شیفت برداری کند

$$\left. \begin{array}{l} x[t-t_0] \\ x[t+t_0] \end{array} \right\} t_0 > 0$$

دارون یا بیرون سیگنال

$$x(t) \xrightarrow{\text{دارون}} x(-t)$$

$$x[n] \xrightarrow{\text{دارون}} x(-n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(at) \\ x[an] \end{array} \right\} \text{ انقباض}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\frac{t}{a}) \\ x[\frac{n}{a}] \end{array} \right\} \text{ انبساط}$$

تغییر دامنه
تغییر مقیاس scaling

Subject :

Year :

Month :

Date :

()

طبت تحلیل

$$x(at-b) \xrightarrow{\text{شیفت } b} x(t-b) \xrightarrow{\cdot a} x(at-b)$$

اول شیفت چپ یا راست را انجام داده و بعد انتظاف را انجام می دهیم

$$x[n-n_0] \xrightarrow{\text{شیفت}} x[-n] \text{ و } x[-n-n_0] \rightarrow \text{اول شیفت و بعد تغییر فرکانس}$$

(تغییر فرکانس)

کسینال های زوج و فرد

$$\begin{cases} x(-t) = x(t) & \text{زوج} \\ x(-t) = -x(t) & \text{فرد} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x[-n] = x[n] & \text{زوج} \\ x[-n] = -x[n] & \text{فرد} \end{cases}$$

در کسینال ها می توان به صورت زوج و فرد نشان داد:

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad \text{زوج}$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad \text{فرد}$$

Subject:

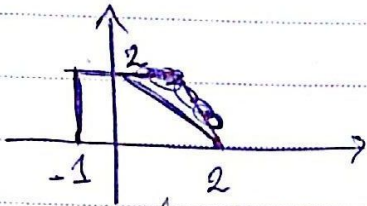
Year. Month. Date. ()

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

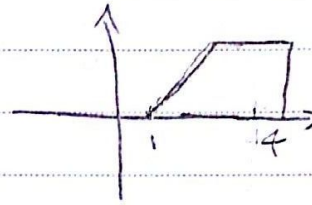
می توان در سیگنال را به صورت
زوج و فرد غایی را در

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

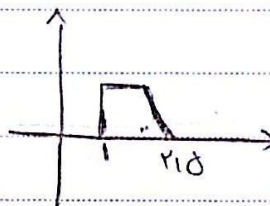
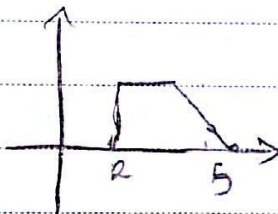
نشان: سیگنال زیر را خواهم راست



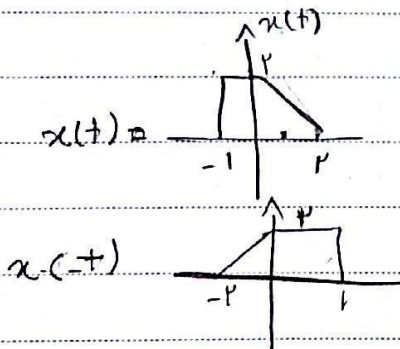
$$x(t+3) \quad (1)$$



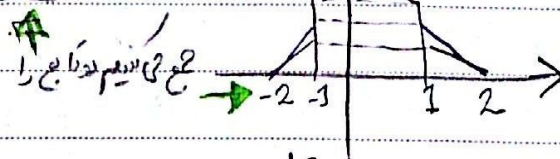
$$x(-3+2t) \quad (2)$$



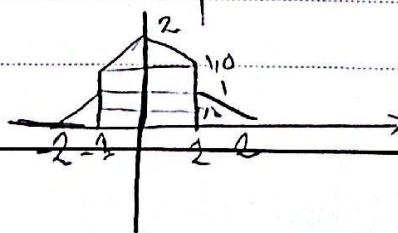
به صورت دو سیگنال زوج و فرد نشان دهیم



$$x_e = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$



<< محور را تغییر می دهیم و نشان دهیم >>



PAPCO

Subject:

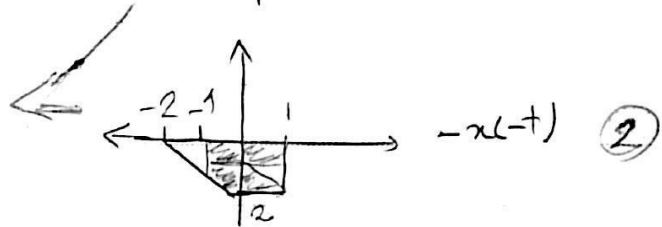
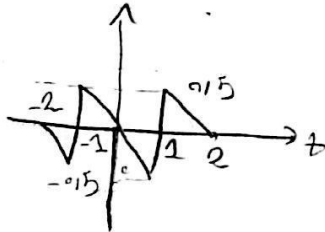
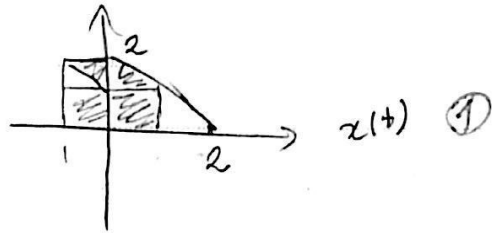
Year:

Month:

Date:

()

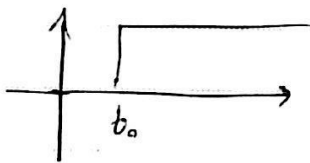
$$x_0(t) = \frac{x(t) - (x(-t))}{2}$$



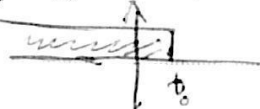
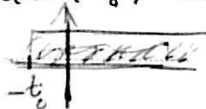
(unit step - function) $u(t)$ $u(t-b_0)$

$$u(t-b_0), u(b_0-t)$$

$b_0 > 0$ then:

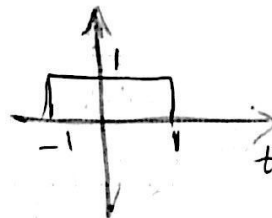


$$u(t) \xrightarrow{+b_0} u(t+b_0) \xrightarrow{+b_0} u(b_0-t)$$



$$u(1-t^r) \text{ or } u(t) \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u(1-t^r) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & t < -1, t > 1 \end{cases}$$

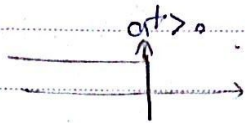


رابعه

$$* u(t) = ucat)$$

$$u(t-t) = u(t)$$

فرض



(Unit Impulse Function) (تابع ضربی واحد)

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(f(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}$$

این صورت به سبب مشتق و نسبت است

$$f(t) = k(t-t_1)(t-t_2) \dots (t-t_n)$$

$$\delta(f(t)) = \frac{\delta(t-t_1)}{|f'(t_1)|} + \frac{\delta(t-t_2)}{|f'(t_2)|} + \dots + \frac{\delta(t-t_n)}{|f'(t_n)|}$$

$$\delta(t^2 + kt - \omega t)$$

$$f(t) = t^2 + kt - \omega t = 0$$

$$t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = -\omega$$

$$f'(t) = 2t + k - \omega$$

$$f'(-\omega) = 2(-\omega) + k - \omega = -\omega$$

$$\delta(f(t)) = \frac{\delta(t-0)}{|1-\omega|} + \frac{\delta(t-1)}{|1|} + \frac{\delta(t)}{|-\omega|}$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

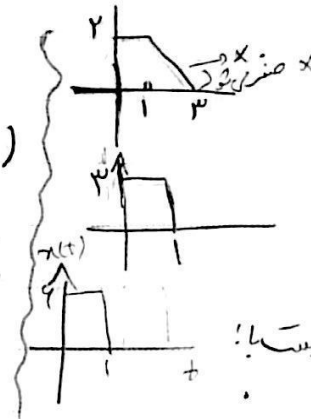
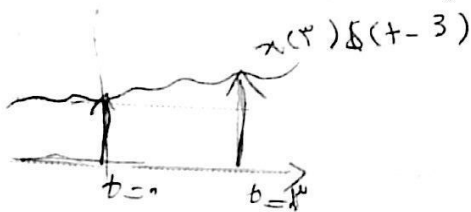
$$\delta(t-1)?$$

قرن

خاصیت ضربان ضرب

$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t)$$

$$x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0)$$

اگر $x(t)$ باشد :اگر $x(t)$ باشد :

حاصل ضرب این ها برابر است با :

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$\delta(at-b) = \delta(a(t-\frac{b}{a})) = \frac{1}{|a|} \delta(t-\frac{b}{a})$$

$$\int_a^b x(t) \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} x(t_0) & a < t_0 < b \\ 0 & \text{غیر} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+\infty} \delta(3t-t^3) dt = \frac{\delta(t-0)}{|1|} + \frac{\delta(t-1)}{|1|}$$

$f(t) = 1t - t^3 \rightarrow \begin{matrix} t=0 \\ t=1 \end{matrix}$

$f'(t) = 1 - 3t^2$

$$\delta\left(\frac{1-3t}{2}\right) = \frac{2}{3} \delta\left(t - \frac{1}{3}\right)$$

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

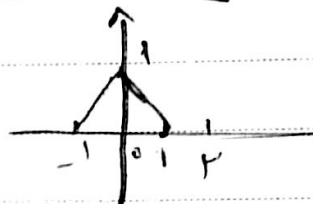
تابع دیراکت

$$x(t) \delta'(t) = x(0) \delta'(t) - x'(0) \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \delta'(t) dt = ? \quad \delta(t) + \delta(t)$$

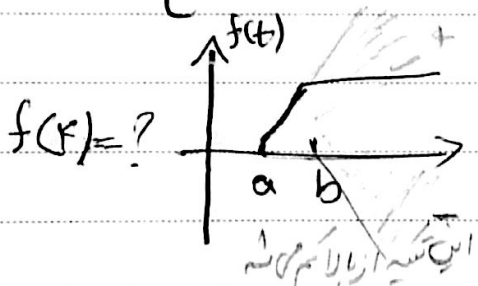
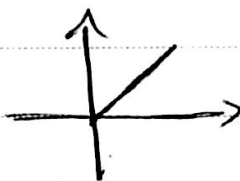
$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} -x(t_0) & \alpha < t_0 < \beta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

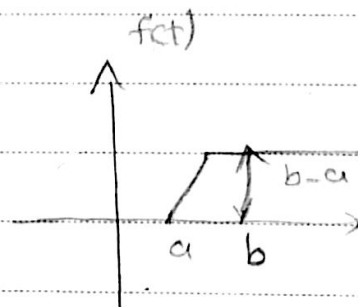


تابع ریب

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$f(t) = ?$$



$$f(t) = r(t-a) - r(t-b)$$

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Subject:

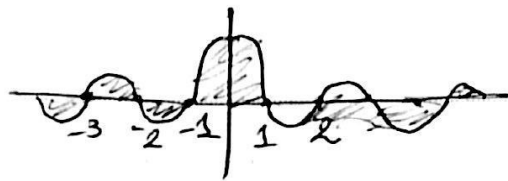
Year:

Month:

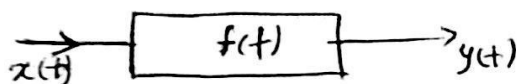
Date:

عنوان سوال

$$\text{sinc}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$



سیستم و خواص سیستم

خواص سیستم
(Linear) (1)

(1) خطی بودن: (1) خطی بودن به معنای آنست که اگر دو ورودی به سیستم داشته باشیم، خروجی آن دو ورودی جمع خواهد بود.
(2) همبستگی: (2) همبستگی به معنای آنست که اگر دو ورودی به سیستم داشته باشیم، خروجی آن دو ورودی جمع خواهد بود.

سوال:

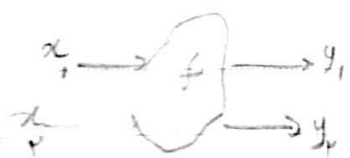
$$y[n] - \frac{y[n-1]}{n} - \frac{y[n-2]}{n^2} = 3x[n+2]$$

$$x_p[n+2] = Kx_p[n+2] \quad n^2 \quad y_p[n] = Ky_p[n]$$

$$y_p[n] - \frac{y_p[n-1]}{n} - \frac{y_p[n-2]}{n^2} = 3x_p[n+2]$$

$$Ky_p[n] - \frac{K y_p[n-1]}{n} - \frac{K y_p[n-2]}{n^2} = 3Kx_p[n+2]$$

(2) خاصیت جمع پذیری: خاصیت جمع پذیری به معنای آنست که اگر دو ورودی به سیستم داشته باشیم، خروجی آن دو ورودی جمع خواهد بود.



$$y_1 = 3x_1 + 2$$

سوال:

$$y_2 = 3x_2 + 2$$

$$y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2) + 4$$

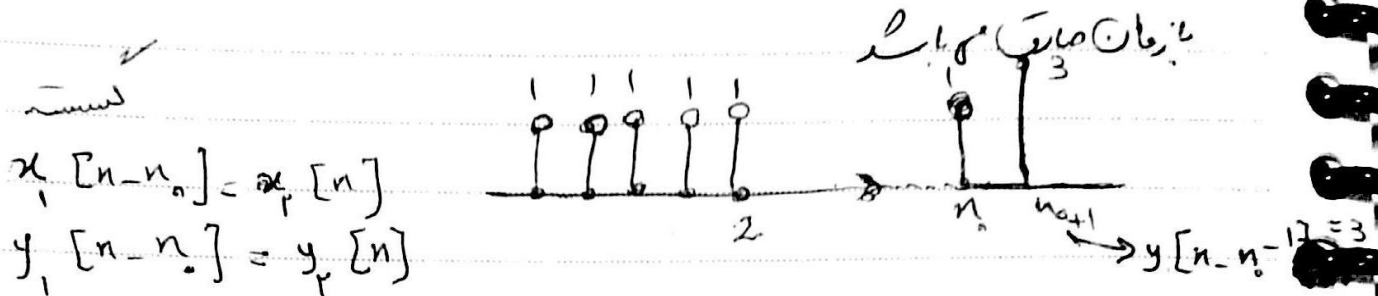
در جمع آن دو ورودی، خروجی آن دو ورودی جمع خواهد بود.

PAPCO

عنوان سوال

۱) تغییر پذیری زمان: اگر ورودی x در زمان t برابر با ورودی x در زمان t_0 باشد

یعنی $x(t-t_0) = x_p(t)$ و اگر $y(t-t_0) = y_p(t)$ باشد شوا تغییر پذیری



$x[n-n_0] = x_p[n]$

$y[n-n_0] = y_p[n]$

مثال: $y[n] = n + \sin(x[n])$ TI $(f^{-1}) = ?$

۱) $y[n] = (n-1)x[n]$ $(f^{-1}) = ?$

۲) $y[n] = (2n-1)x[n]$ $(f^{-1}) = ?$

$y_p[n] = n + \sin(x_p[n])$ TI

$y_p[n] = y[n-n_0]$

$x_p[n] = x[n-n_0]$

$y[n-n_0] = n + \sin(x[n-n_0])$

$y_p[n] = n + \sin(x_p[n])$

$y_p[n] = n + \sin(x_p[n])$

$y[n-n_0] = (n) + \sin(x[n-n_0])$

اما $n-n_0$ بود تغییر پذیری

۲) $x[n] = y[n]$ $n=1$

$n=1$

چون $n=0, 1, 2, 3, \dots$ و $n=0$ بود

س و ا و ن پذیرد

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

ج ۳)

$$x(t) = \frac{y(t)}{t-1}$$

$$t = \frac{1}{p} \rightarrow 2t-1=0$$

مکروس برش

در تغییر مقیاس

* شرط برای TI (تغییر زمان) Scaling هست

$$\begin{cases} y(t) = x(f(t)) = x(t+b) \\ f(t) = at+b = t+b \end{cases} \quad \text{بی‌تغییر}$$

$$y[n] = x[f[n] = n+b] \quad \text{تغییر یافته}$$

< static > خاصیت حافظه (بدون حافظه)

در این حالت خروجی در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه بستگی دارد نه

اگرچه و نه گذشته. در مثال های زیر نوع سیستم ها را مشخص کنید

$$1) y[n] = x[-n] \quad \text{حافظه دار}$$

$$2) y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad \text{حافظه دار}$$

$$3) y(t) = x(-t) \quad \text{حافظه دار}$$

$$4) y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad \text{حافظه دار (تغییرات)}$$

$$5) y[n] = x[2n] \quad \text{حافظه دار} \quad n=-1 \rightarrow y[-1] = x[-2]$$

$$6) y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad \text{حافظه دار}$$

علی بابایی اگر خواص هر لحظه به ورودی یا خروجی های قبل وابسته نباشد

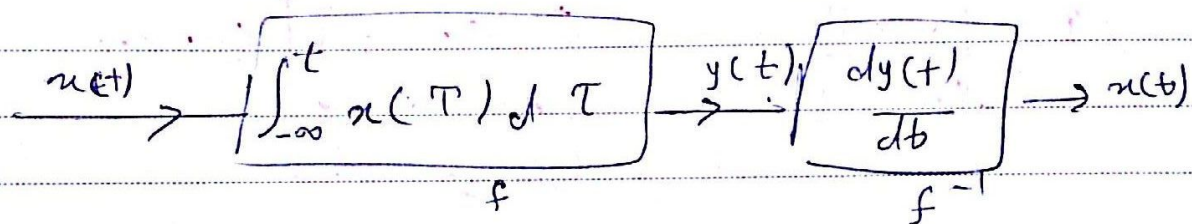
$$x(t) \xrightarrow{t_0 < t} y(t)$$

مغز می پذیری

هرگاه از خواص بتواند ورودی را بازسازی نموده یا به عبارتی اگر به ازای $y_1(t)$ داشته باشیم

$$y_1(t) \rightarrow x_1(t) \text{ و به ازای } y_2(t) \rightarrow x_2(t) \text{ (اگر به ازای دو ورودی یا به عبارتی دو ورودی)}$$

یک خواص داشته باشیم مانند تطبیق زوج سیستم داشتن پذیرش باشد



مثال: نشان دهید سیستم اضافی زیر را در صورت فوق ضابطی

تابع را به دست آورید

$$y[n] = \begin{cases} x[n] + 1 & x[n] > 0 \\ 2x[n] & x[n] < 0 \end{cases}$$

Subject,

Year,

Month,

Date, ()

پایداری (stability) سیستم‌های ورودی-خروجی براندازی باشد.

$$|y(t)| \leq N < \infty \quad \text{و} \quad |x(t)| \leq M < \infty$$

برانداخته باشیم

مثال ۱: $y[n] = \frac{1}{n} x[n]$ $y(t) = \frac{\sin(x(t))}{x(t)}$

✓ ۲) $y(t) = \cos(x(t))$

✗ ۳) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ برانداخته چون $-\infty$ است

✓ ۴) $y(t) = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau$ برانداخته است مقدار محدودی که تابع را ∞ کند.

ج ۱) $|x[n]| \leq M < \infty \rightarrow |\exists n x[n]| \leq M < \infty$
 برای $n = \infty$ مقدار $\infty \leftarrow \frac{1}{n} x[n]$
 در نتیجه جزء شرط نیست.

ج ۲) $3|\cos x| \leq 1$ برانداخته است.

ج ۳) حرکتی در $x=0$ می‌دهد
 مسدود است $\perp$ است بین برانداخته است
 و پایداری است.

$$\left| \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right| \leq 1$$

$\underbrace{\quad}_{\text{تابع سینگ}} \quad \text{باید} \quad | \text{sinc}(t) | \leq 1$

Subject:

Year. Month. Date. ()

خواص کانولوشن:

۱- خاصیت شیف:

$$1) x_1(t) \star x_p(t) = x_p(t - \tau_0)$$

$$2) x_1(t - t_0) \star x_p(t) = x_p(t - \tau_0)$$

$$3) x_1(t - t_1) \star x_p(t - t_2) = x_p(t - (t_1 + t_2))$$

۲- تغییر مقیاس (scaling):

$$1) x_1(at) \star x_p(at) = \frac{1}{|a|} x_p(at)$$

$$2) x_1[-n] \star x_p[-n] = x_p[-n]$$

$a = -1$

بسیار مهم

sehr wichtig =

خیلی مهم

مثال:

$$1) y(t) = x(t+1) \star h(t+3) = g(t+4)$$

سه روی ۳ شیف

$$2) y_p(t) = x(t-1) \star x_p(t+1)$$

سه روی ۳ شیف

$$y_p(t) = x_p(t - (1-1)) = x_p(t-1)$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$3) y_{\mu}(t) = x(3t+1) \star h(3t-2)$$

اول شیفت می‌دهیم $\rightarrow x(t+1) \star h(t-2)$
 $\rightarrow y(t) = y_{\mu}^{\uparrow}(t-1)$

Scale $\rightarrow y_{\mu}(t) = \frac{1}{\mu} y_{\mu}^{\uparrow}(3t-1)$

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{g(t)} \rightarrow h(t)$$

$$\delta(t) \star g(t) = h(t)$$

$$x_1'(t) \star x_{\mu}(t) = x_{\mu}'(t)$$

$$x_1^{(m)}(t) \star x_{\mu}^{(n)}(t) = x_{\mu}^{(m+n)}(t)$$

$$\int x_1 \star x_{\mu}(t) = \int x_{\mu}$$

>> همین دستور کانولوشن سیگنال با ضربی واحد <<

$$1) x(t) \star \delta(t) = x(t)$$

$$2) x(t) \star \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

$$\text{مثال } e^{-t} u(t) \star \delta(t-1) = e^{-(t-1)} u(t-1)$$

(3)

P4PCO

✓

Subject:

Year:

Month:

Date: ()

$$3) \delta(t-b) * \delta(t-b) = \delta(t-(t_1+b_p))$$

$$4) x(t) * \delta^{(n)}(t) = x^{(n)}(t)$$

$$1) x(t) * \delta(ct+ab) = ? \quad \frac{1}{|a|} x\left(t+\frac{b}{a}\right) \quad \text{نوع 2}$$

از 9 فاسد ریاضی

$$\frac{1}{|a|} \delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

$$2) y(t) = e^{-t} u(t) * (2\delta(t) + \delta'(t))$$

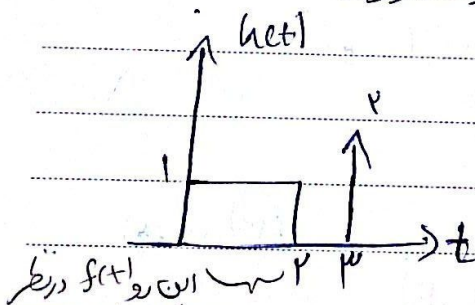
$$1) e^{-t} u(t) * 2\delta(t) = 2e^{-t} u(t) \quad x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$2) e^{-t} u(t) * \delta'(t) = (e^{-t} u(t))' = -e^{-t} u(t) + e^{-t} \delta(t)$$

$$1) + 2) = -e^{-t} u(t) \delta(t) + 2e^{-t} u(t)$$

$$\rightarrow 2e^{-t} u(t) + \delta(t)$$

1 $t=2$ زمان $y(t)$ مقدار خروجی

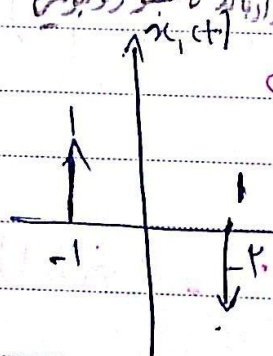


$$h(t) = f(t) + 2\delta(t-3)$$

$$x_1(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t-1)$$

$$h(t) = f(t) + 2\delta(t-3)$$

$$y(t) = x_1(t) * h(t)$$



$$x_1(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t-1)$$

از این سمت منفی

$$P4PCO \quad \delta(t+1) * f(t) + \delta(t+1) * 2\delta(t-3)$$

$$- 2\delta(t-1) * f(t) - 2\delta(t-1) * \delta(t-3)$$

Subject,

Year,

Month,

Date,

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

$$\delta[n - n_1] * \delta[n - n_2] = \delta[n - (n_1 + n_2)]$$

«توليدى بىر واحد باسقا سىگنال، نىچىلا»

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$x(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t - t_0} x(\tau) d\tau$$

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

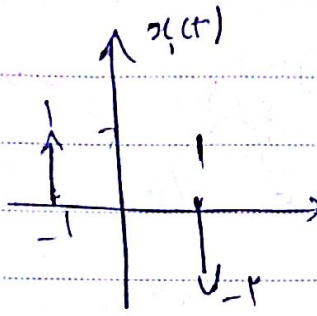
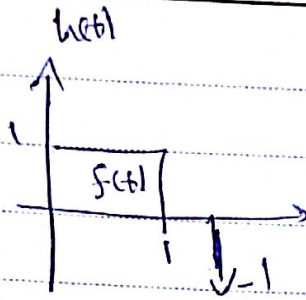
$$x[n] * u[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n - n_0} x[k]$$

$$x(t) * (u(t - t_1) - u(t - t_2)) = \int_{t - t_2}^{t - t_1} x(\tau) d\tau$$

(3) (بىر)

$$y(t) = f(t+1) + r\delta(t-r) - r f(t-1) - r \delta(t-r)$$

$$\text{بىر } t=r \quad y(t=r) = f(r) + r\delta(r) - r f(r-1) - r\delta(r-r)$$

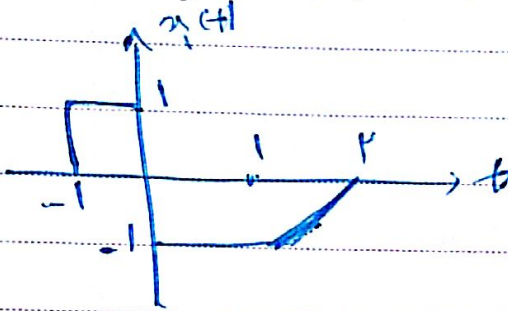


تمرین : مثال قبل

$$h(t) = e^{-\frac{t}{T}}$$

تمرین : پاسخ ضربه‌ای واحد سیستم تغییرناپذیر با توان

$$h(t) = e^{-\frac{t}{T}} \delta(t) + u(t+1)$$



کانولوشن قطار ضربه

$$x(t) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(t - kT)$$

$$x[n] * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n - kN]$$

تبدیل ضربه یوگسده :

حرف بزرگ حرف کوچک

سیگنال $X(f)$ $\xrightarrow{F}$ $x(t)$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$x(t) \xrightarrow{(F)} X(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} x(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \delta(t) = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt =$$

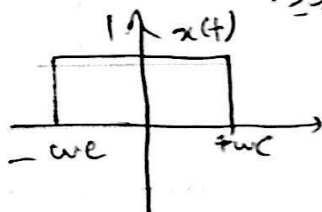
$$\frac{-1}{a+j\omega} \left[e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$x(t) = e^{-at} u(t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{+at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

تبدیل فرکانس سیگنال های سینوسی و دایره ای به یکدیگر



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-wc}^{wc} (1) e^{-j\omega t} dt$$

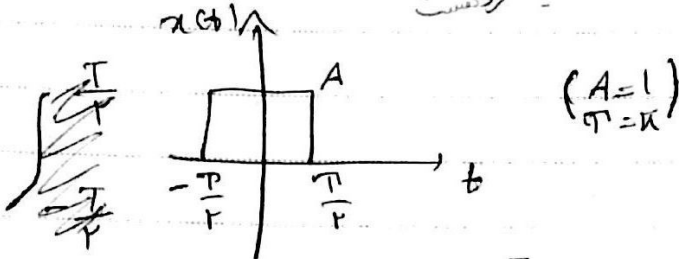
P4PCO

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \cos \omega t - \int_{-\omega_c}^{\omega_c} -j \sin \omega t dt = j \int_0^{\omega_c} \cos \omega t dt - \frac{j}{\omega_c} \sin \omega t$$

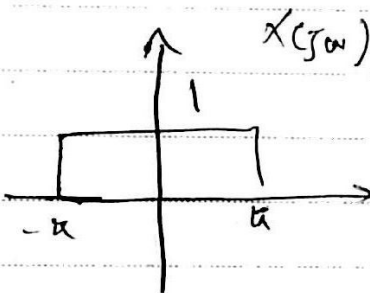
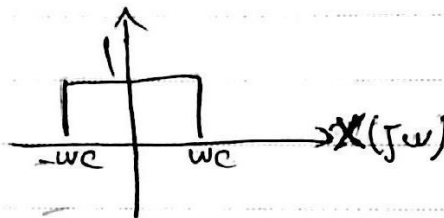
جواب



$$X = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cos \omega t dt = \frac{A}{\omega} \sin \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{T}{T}$$

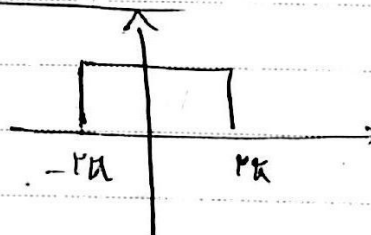
$$X(j\omega) = \frac{PA}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2}$$

$$x(t) = \frac{\sin \omega_c T}{\pi t}$$



$$x(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$$

$$x(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$



$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{F} j\omega \\ \delta(t) &\xleftrightarrow{F} 1 \\ \delta(t - t_0) &\xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \omega_0 t &\xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$

Subject,

Year,

Month,

Date,

$$\sqrt{\sin \omega_0 t} \longleftrightarrow \frac{\pi}{\theta_j} \rightarrow \frac{\pi}{\theta_j} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2}$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

خواص تبدیل فوری

۱) خاصیت خطی بودن

$$\begin{cases} x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \\ y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega) \\ ax(t) + by(t) \\ \xrightarrow{(F)} aX(j\omega) + bY(j\omega) \end{cases}$$

$$② \quad x(t) = x^*(t)$$

۲) مزدوج پیچیده: اگر $x(t)$ سیگنال حقیقی باشد

مزدوج آن برابر است با $x^*(t)$

تبدیل فوری سیگنال حقیقی $x(t)$ در صورتی که $x(t)$ تابع حقیقی زوج باشد

$$X(j\omega) = \underbrace{\text{Re}(X(j\omega))}_{\text{زوج}} + j \underbrace{\text{Im}(X(j\omega))}_{\text{فرد}}$$

$$\angle X(j\omega) = 0$$

اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی و زوج باشد صفت حقیقی آن زوج است و صفت آن زوج و فرد است

صفت و زاویه آن $\angle X(j\omega)$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

مثال: $x(t) = \sin \omega t$

مثال: $x(t) = \cos \omega t$

۱۳) اگر $x(t)$ سینوسی حقیقی و زوج باشد خواهیم داشت سمت چپ را می بینیم

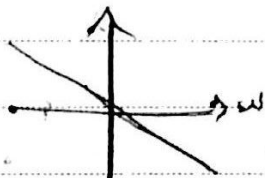
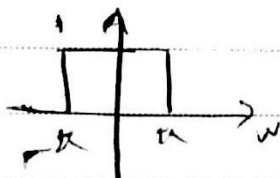
فرم دیگری تبدیل فوریه برابر است با $X(j\omega) = \frac{+ \pi}{j}$

مثال: اگر سیگنال $y(t) = \frac{\sin \pi(t-1)}{\pi(t-1)}$ مطلوب رسم پاسخ های دامنه و فاز

$y(t) = \frac{\sin \pi(t-1)}{\pi(t-1)} \rightarrow X(j\omega) e^{-j\omega \times 1}$

$x(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \rightarrow X(j\omega)$

$|X(j\omega)|$



$\angle y(j\omega) = \angle x(j\omega) + (-\omega)$
 $x(j\omega) \text{ دوره } e^{j\omega} \quad \text{دوره } e^{-j\omega}$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \delta(t - kT)$$

حل کوئی

$$x(t) = \delta(t) + a(t-T) + \dots$$

$$X(j\omega) = 1 + a e^{-j\omega T} + a^2 e^{-j2\omega T} + \dots$$

$$S = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega T}}$$

$$1 \xleftrightarrow{F} \pi \delta(\omega)$$

تبدیل فوریه

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$t^n e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{n!}{(\alpha + j\omega)^{n+1}}$$

قبل تبدیل لاپلاس

$$e^{-j\omega_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(j\omega + \omega_0)$$

شیفت فرکانس

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

$$t x(t) \longrightarrow j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$t^n x(t) \longrightarrow (j)^n \frac{d^n X(j\omega)}{d\omega^n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t u(t) \xleftrightarrow{F} ? \\ |t| \xleftrightarrow{F} ? \end{array} \right. ; \text{تقریب مساوی}$$

انواع فیلترها و یاسفهای فرکانس

یاسفهای فرکانس در سیستم‌های به سیستم‌ها دارای فرکانس مشخص می‌باشند و فیلترها و تحلیل

می‌شوند. با توجه به تجزیه سیستم انواع فیلترها در مدارهای درجه ۱ و درجه ۲ به بالا

با یکدیگر متفاوت می‌باشند.

در مدارهای درجه ۱ فیلتر RC و RL (سری یا موازی) فیلترها فقط از نوع

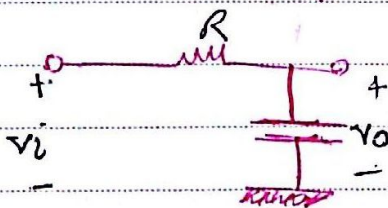
پایین‌گذر و یا بالاگذر بوده و در این حالت دارای فرکانس قطع می‌باشند. در سیستم‌های

درجه ۲ مانند مدارهای RC سری یا موازی فیلترها از نوع میانگذر و یا میان‌گذر

بودن و در این حالت سیستم دارای فرکانس تشدید و فرکانس‌های قطع پایین و بالا

می‌باشد.

مثال: انواع فیلترهای زیر را مشخص نمایید.



راه حل: ابتدا نسبت $\frac{V_o}{V_i}$ را نوشته و در مدار

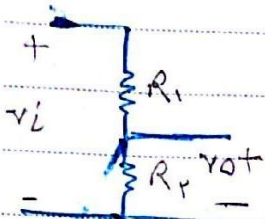
به جای S و ω قرار داد و یاسفهای فرکانس را از جمله یاسف دانسته و فاز

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \left| \frac{V_o}{V_i} (j\omega) \right|$$

$$< \frac{V_o}{V_i} (j\omega)$$

را ترسیم می‌نمایم.

یادآوری



$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$Z_L = sL = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\frac{v_o(j\omega)}{v_i(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$x + jy = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\angle \text{Arctan } RC\omega$$

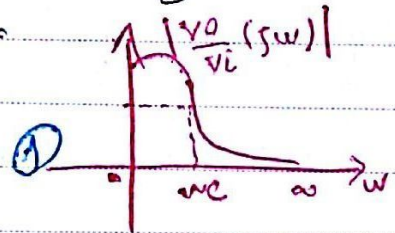
$$\left| \frac{v_o}{v_i}(j\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\angle \frac{v_o}{v_i}(j\omega) = 0 - \text{Arc tan } \omega RC$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{v_o}{v_i}(\omega=0) \right| = 1 \\ \left| \frac{v_o}{v_i}(\omega_c = \frac{1}{RC}) \right| = 0.707 \\ \left| \frac{v_o}{v_i}(\omega \rightarrow \infty) \right| = 0 \end{array} \right.$$

ω را متغیر کنیم

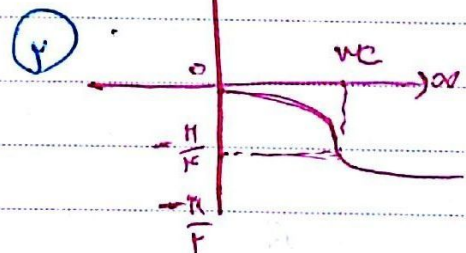
فواصل قطع



$$\angle(\omega=0) = 0$$

$$\angle(\omega_c = \frac{1}{RC}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\angle(\omega \rightarrow \infty) = -\frac{\pi}{2}$$



در فرکانس های پایین تر دانه های فرکانس های بالا به شدت تضعیف می شود
در فرکانس های بالا تر دانه های فرکانس های پایین به شدت تضعیف می شود

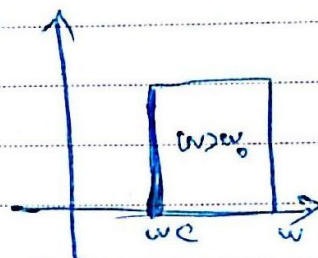
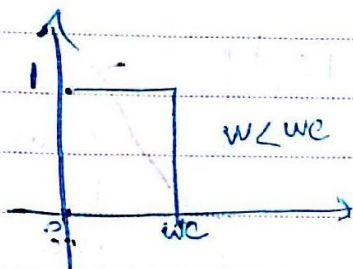
فرکانس قطع فرکانس است که در آن فرکانس دانه های سیگنال خروجی
دانه های سیگنال ورودی می باشد

مدل ایده‌آک پاسف‌های فرکانسی داشته‌اند شکل زیر می‌باشند. همانطور که ملاحظه

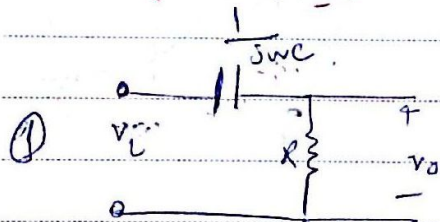
می‌شود در فیلتر پایین‌گذر به ازای $(\omega < \omega_c)$ سیگنال خروجی با ورودی برابر

بوده و به ازای $\omega > \omega_c$ سیگنال خروجی دارای دامنی صفر می‌باشد. در رسد ω پایین

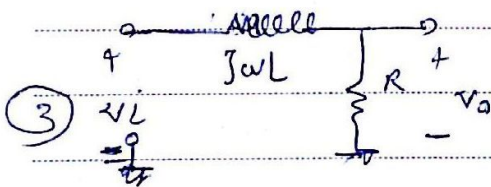
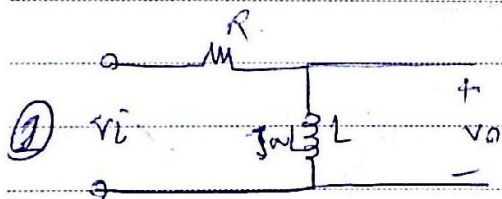
به صورت پهنای باند بالا‌گذر می‌باشد عکس‌العمل بالا می‌باشد.



(پاسف‌های ایده‌آک برای فیلترهای پایین‌گذر و بالا‌گذر)



ارامی مثال:



Subject

Date

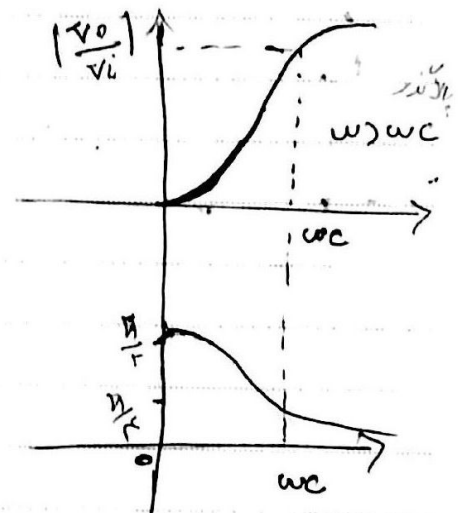
$$\frac{V_O}{V_I}(j\omega) = \begin{cases} \left| \frac{V_O}{V_I}(j\omega) \right| = \frac{|j\omega L|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} & (2e) \\ \omega = 0 \rightarrow \left| \frac{V_O}{V_I}(0) \right| = \frac{0}{1} = 0 & \frac{V_O}{V_I}(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \\ \omega \rightarrow \infty \left| \frac{V_O}{V_I}(\infty) \right| = 1 \end{cases}$$

$$\frac{V_O}{V_I}(\omega_c = \frac{R}{L}) = \frac{L \times \frac{R}{L}}{\sqrt{R^2 + (L \times \frac{R}{L})^2}} \Rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

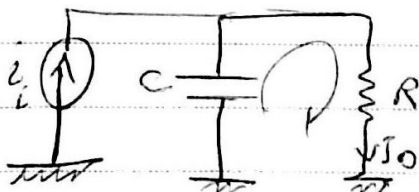
$$\angle \frac{V_O}{V_I}(j\omega) = \angle \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$\angle \phi = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \rightarrow \angle \phi = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \\ \omega_c = \frac{R}{L} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \\ \omega \rightarrow \infty \rightarrow \angle \phi = 0 \end{cases}$$



نوع فیلتر (؟) است و قطع را به دست آورید



$$\frac{V_O(s=j\omega)}{V_I(s=j\omega)} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = 1 + j\omega RC$$

$$\angle \phi = \text{Arctan}(\omega RC)$$

P4PCO

$$\left| \frac{I_o(s=j\omega)}{I_i(s=j\omega)} \right| = \sqrt{(1)^2 + (\omega RC)^2}$$

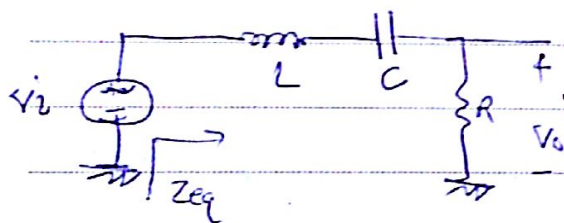
$$\angle \frac{I_o(s=j\omega)}{I_i(s=j\omega)} = \text{Arctan } \omega RC$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} \left| \frac{I_o}{I_i} (\omega=0) \right| = 1 \\ \left| \frac{I_o}{I_i} (\omega=\frac{1}{RC}) \right| = \sqrt{2} \\ \left| \frac{I_o}{I_i} (\omega \rightarrow \infty) \right| = \infty \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \angle (\omega=0) = 0 \\ \angle (\omega=\frac{1}{RC}) = \frac{\pi}{4} \\ \angle (\omega \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تسدید یا رزونانس

در مدار RLC سری زیر اثر دوری منبع $v_i(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ و $V_m = V_m$ مقدار



عوض دکنار باشد.
در فکانش تسدید ایجادش مقدار عوضی اگر صفر است
Z در فکانش تسدید برابر است با R

$$Z_{eq} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \rightarrow Z = R + j \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$\rightarrow L\omega_0 - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z(\omega_0) = R \quad I(\omega = \omega_0) = \frac{V_m \angle \phi}{R}$$

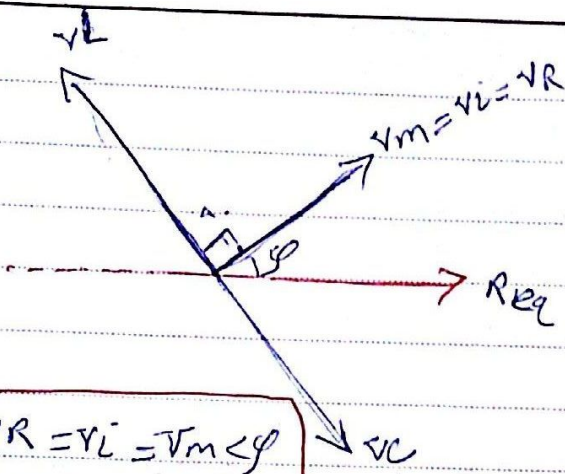
$$i(t) = \frac{V_m}{R} \cos(\omega t + \phi)$$

$$V_L = \frac{\omega L}{R} \quad V_m < \varphi + \frac{\pi}{r}$$

$$Y_C = \frac{1}{j\omega C} \times \frac{V_m}{R} \angle -90^\circ$$

$$V_C = \frac{V_m}{RC\omega} < \phi - \frac{\pi}{f}$$

$$\dot{V}_R = \dot{V}_L = \dot{V}_m \angle \phi$$



مع عبارت گنبد به خفاش شدید توان حد را از توان حقیقی می یابید و جریان مدار

باولتار هم فاز بورد وولتار بوسر مقاومت برابر باولتار بوسر منبع بورد $|V_R| = |V_2|$

و $17a = 17c$ صحیح است - برابری و تساوی دو سلسله خازن با اختلاف فاز

(۱۸۰) و معمولا در بار و کنار ورودی همانند دایره ایست فوق فی باشد. در ضمن طول برارهای

خازن و سلف تناسب بالفضی و دار (Q) می باشد

یاسنج های کوهانی میگذرد و یاسنج های کوهانی
خوبه و به نجات می رسد

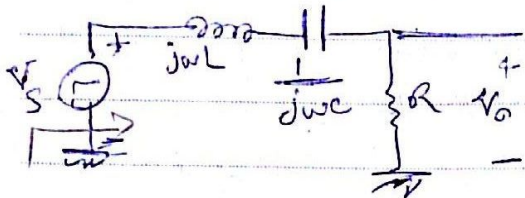
برای مدار RLC سری نوعی فیلتر است که در فرکانس ω_0 عبور سیگنال را به حداقل می‌رساند و در فرکانس ω_c عبور سیگنال را به حداکثر می‌رساند.

Subject :

Year .

Month .

Date .



$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad \left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)| = ? \\ \angle H(j\omega) = ? \end{array} \right.$$

$$|H(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$(\pm R = \omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$|H(\omega_0)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (0 - \frac{1}{\omega_0 C})^2}} = 1$$

$$H(\omega_0) = 1$$

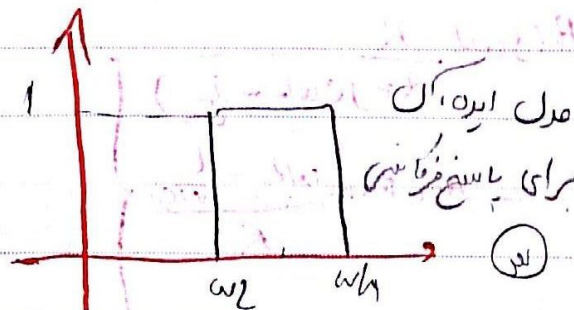
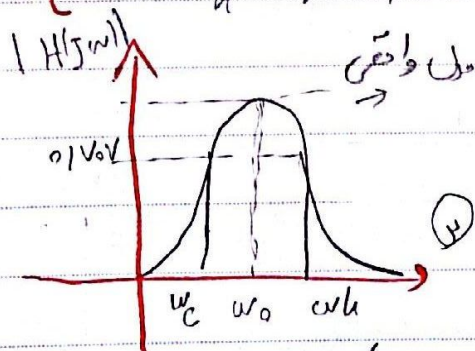
$$H(\infty) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\infty - \frac{1}{\infty})^2}} = \frac{R}{\infty} = 0$$

نقطه شکست

$$H(\omega_h = \omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$H(\omega_h = \omega)$$

$$H(\omega_h = \omega) = 0.707$$



برای رسم پاسخ های فرکانسی می بایست سیستم در حوزه فرکانس باشد یعنی اگر

سیستم دو درجه ای اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ است.

سیستم دو درجه ای $\frac{\pi}{2}$ است

Subject :

Year .

Month .

Date .

$\frac{\pi}{2}$

درجه اول

فرکانس به صورت نقطه $S = \delta + j\omega$ باشد در این صورت مقدار $\delta = 0$ می باشد

یعنی فرکانس $S = j\omega$ می باشد و از طرف دیگر می باشد در صورت مساوی تابع تبدیل

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}$$

طبق قواعد اعداد قطبی دامنه و فاز را به هم می یازد را نسبت می گیریم و سپس با مقادیر مختلف ω توابع پاسخ های فرکانس دامنه و فاز را به دست می آوریم.

توجه: فرکانس های مورد نظر عبارتند از فرکانس های خیلی کم (پایین) فرکانس های خیلی بالا (بالا) $\omega \rightarrow 0$ فرکانس شدید $\omega \rightarrow \infty$ (بسیار بالا) $\omega = \frac{1}{RC}$ (فرکانس متوسط)

صفرهای ورودی فرکانس های قطع می باشد و یا فرکانس قطع می باشد

در این مورد مقدار ω را و یا قسمت موهومی امپدانس را برابر با قسمت حقیقی آن

$$\omega R = \frac{1}{\omega C} \quad (\pm R = \omega L - \frac{1}{\omega C})$$

در اشکال (۱) و (۲) پاسخ های فرکانس دامنه به ترتیب واقع شده اند که ترسیم درجه است.

بررسی شماری (۳) به ازای فرکانس های کمتر از فرکانس قطع پایین و به ازای فرکانس های

بسیار از فرکانس قطع بالا ($\omega < \omega_L$ و $\omega > \omega_H$) دامنه سیگنال خروجی کمتر باشد و به ازای باند

فرکانس بین فرکانس قطع پایین و بالا دامنه سیگنال خروجی نسبت به ورودی برابر می باشد.

$$(1) \quad \omega < \omega_L \quad \text{و} \quad \omega > \omega_H$$

$$(2) \quad \omega_L < \omega < \omega_H \quad \text{و} \quad \omega_L = \frac{1}{RC} < \omega < \omega_H$$

(برای زاویه اوج مقدار زاویه $\omega = 0$ و $\omega = \infty$ و به ترتیب اگر در وسط این دو مقدار فرکانس شدید می باشد)

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad \left\{ \begin{array}{l} \angle(\omega = 0) = 0 - \text{Arctan} \frac{0 - \frac{1}{0}}{R} = -\frac{\pi}{2} \\ \angle(\omega_L) = -\text{Arctan} \frac{-R}{R} = -\frac{\pi}{4} \\ \angle(\omega = \frac{1}{RC}) = -\text{Arctan} \frac{0}{R} = 0 \\ \angle(\omega_H) = -\text{Arctan} \frac{R}{R} = -\frac{\pi}{4} \\ \angle(\omega \rightarrow \infty) = -\text{Arctan} \left(\frac{\infty - \frac{1}{\infty}}{R} \right) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

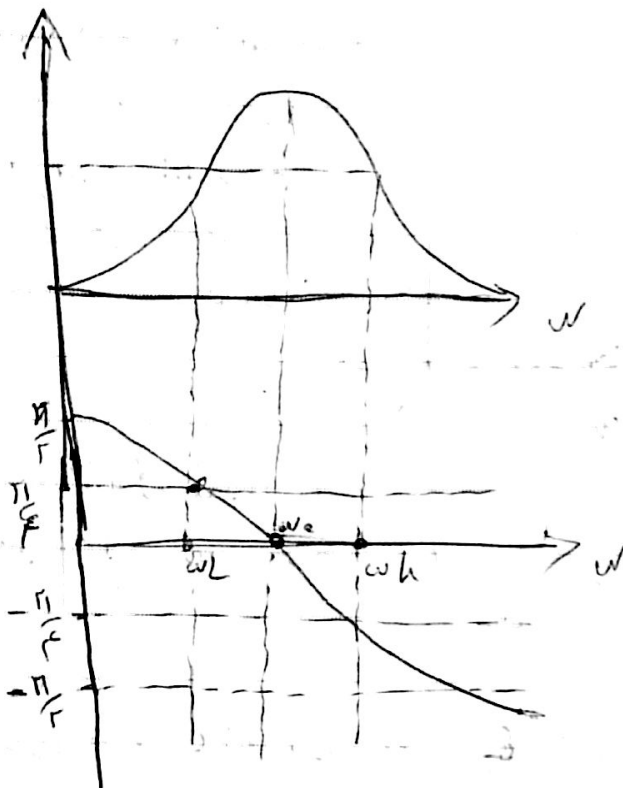
Poopak

Subject :

Year .

Month .

Date .



هر چه عرض باند باریک تر باشد کیفیت مدار بهتر است

$$Q = \frac{\omega_0}{BW}$$
 ← کیفیت مدار
 عرض باند فرکانس شدید

کیفیت مدار

آند $Q = \frac{\omega_0}{BW}$ و $(BW = \omega_H - \omega_L)$ آند Q باشد کیفیت مدار خوب است

در این صورت

$$\begin{cases} \omega_L = \omega_0 - \frac{BW}{2} \\ \omega_H = \omega_0 + \frac{BW}{2} \end{cases}$$

و در این صورت فرکانس میانی شماره ۱

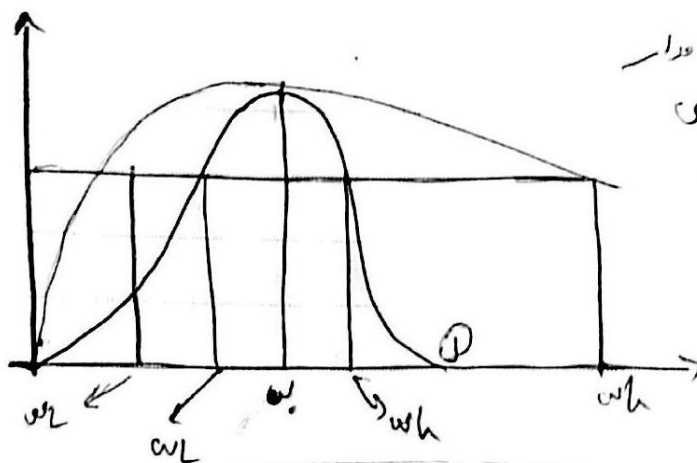
مقدار نسبت به فرکانس تغییر می یابد و محاسبات بسیار ساده تر هستند

Subject :

Year .

Month .

Date .



و اگر $Q < 10$ باشد کیفیت مدار خوب نیست و فرکانسهای قطع پایین و بالا از رابطه زیر بدست می آوریم (فقط برای مدار RLC سری)

$$\begin{aligned} e^{-\frac{R}{L}t} & \quad RC = T \rightarrow \frac{1}{RC} \text{ زمان} \\ e^{-\frac{t}{RC}} & \quad \frac{R}{L} = T \rightarrow \frac{L}{R} = B_w \end{aligned}$$

(۳) $Q < 10$ (کیفیت بد)

$$\omega_H = \omega_L - \frac{1}{\omega_C} \leftarrow$$

در مدارهای RLC سری $\frac{L}{R} = B_w$ است.

مدار RLC سری است نسبت $\frac{V_R}{V_S}$ را بدست آوریم

$$\begin{cases} L = 1 \text{ mH} \\ C = 1 \text{ nF} \\ R = 1 \Omega \end{cases}$$

(در صورتی فرکانس)

الف) نوع فیلتر است

ب) پاسخهای فرکانس را رسم کرده

ج) کیفیت مدار و فرکانس تست و فرکانس قطع بالا و فرکانس قطع پایین را بدست آوریم

د) اگر کیفیت ۹.۹۹ باشد R سری تا ۱۰ اهم را می توانیم ج را مجدداً بدست آوریم

$$B_w = \frac{L}{R} = \frac{10^{-3}}{10} = 10^{-4} \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 10^{-9}}} = 10^4$$

Poopak

Subject :

Year .

Month .

Date .

$$Q = \frac{w_0}{Bw} = 1.0$$

→

Q خوب است

$$\left\{ \begin{aligned} w_L &= w_0 - \frac{Bw}{2} = 1.0 - \frac{1.0}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} w_h &= w_0 + \frac{Bw}{2} = 1.0 + \frac{1.0}{2} \end{aligned} \right.$$

Poopak

Subject :

Year .

Month .

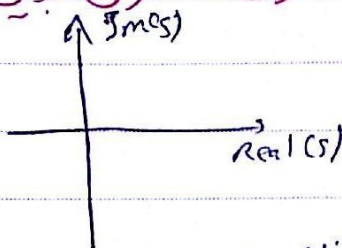
Date .

تبدیل لاپلاس :

$$x(t) \xrightarrow{f} X(s)$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$\langle \text{Roc} \rangle$ (ناحیه همگرایی) : ناحیه‌ای از صفحه s می‌باشد که در آن انتقال تبدیل لاپلاس $X(s)$ می‌باشد.



Roc یا ناحیه همگرایی به صورت نوار یا پهنای محدود و یا نامحدود

می‌باشد.

مثال: برای سیگنال‌های زیر تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی را بدست آورید.

$$① \mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

Roc = کل صفحه

سیگنال درست راست

$$\mathcal{L}(e^{at} u(t)) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = - \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

(حذف می‌شود)

$$\frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-a} e^{-(\sigma + j\omega + j\omega)t}$$

باید مقدمات از شرط $\sigma > -a$ باشد
جواب آن صفر شود.

$$it \rightarrow \sigma + a > 0 \rightarrow \text{Roc}(s) = \sigma > -a$$

$$s = -a$$

قطب است

ریشه‌های معادله
قطب است

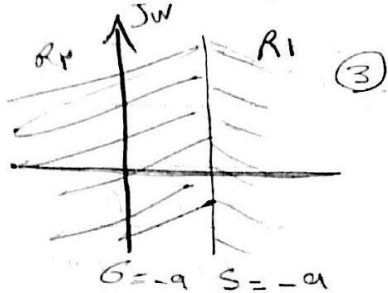
Subject :

Year .

Month .

Date .

بدلیل آنکه سیگنال $e^{at}u(t)$ در سمت راست در حوزه زمان قرار دارد و $S = -a$ قطب تبدیل لاپلاس آن می باشد. ناصبی همبندی در صفحه S در سمت راست قطب می باشد.



$$\mathcal{L}(e^{at}u(t))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at-st} dt = \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\text{if } \{G+a < 0 \rightarrow \text{ReCS} = G < -a\}$$

$$R_{OL} < -a \quad R_L < -a$$

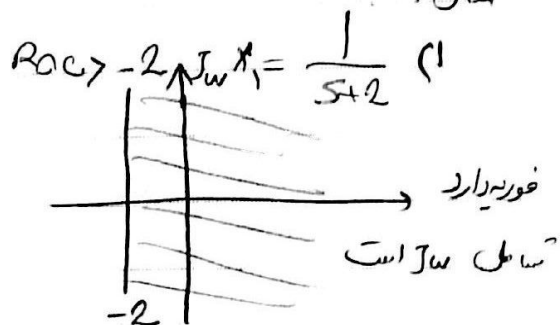
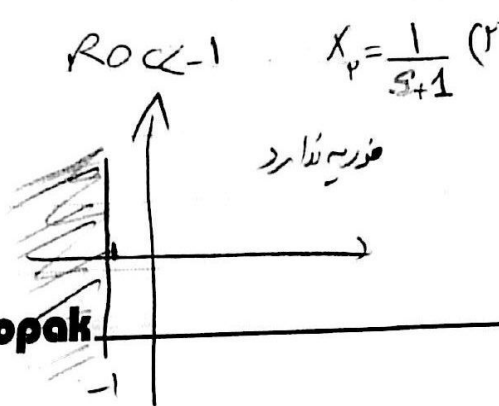
خوب ROC

در تبدیل لاپلاس هم باید موقع هم باشد و آنرا خواهیم داشت.

(1) نداری معادله با محور لاپلاس

(2) در صورتی که نخواهیم تبدیل فوریه داشته باشد (سیگنال) می باشد

ناصبی همبندی شامل محور jw باشد مثال 1



Poopak

Subject :

Year .

Month .

Date .

(۳) ناصبی نگیزی شامل قطب هاغز شور

$$-3 < \text{Re } s < -1$$

$$X(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+3)}$$



شامل قطب هاغز شور

انواع سیگنال ها

(۱) سیگنال سمت راست (Right-sided) $x(t) = 0 \quad \forall t < t_1$

(۲) سیگنال سمت چپ (Left-sided) $x(t) = 0 \quad \forall t > t_2$

(۳) سیگنال دوطرفه (Two-sided)

(۴) سیگنال دوری محدود (Finite Duration)