Projet de Modélisation Statistique - Une stratégie optimale de vente

Amine Hamdaoui, Clémence Lenoir

30 Mai 2014

Table des matières

1 Intérêt du problème **3**

2 Modélisation **3**

3 Une stratégie de vente optimale **4**

3.1 Montrons que $T(\gamma)$ est une stratégie de vente optimale 7

4 Estimation de Gamma γ **10**

5 Annexe **14**

5.1 Code R de la partie IV : estimation de Gamma 14

1 Intérêt du problème

Un armateur met l'un de ses paquebots en vente publique. Il se charge lui-même d'aller demarcher des acquéreurs et se réserve le droit d'accepter ou de refuser leurs offres de manière à réaliser un profit maximum. Etant très pris par ses affaires, il ne peut rendre visite qu'à un acquéreur par mois, et celui-ci lui fait une offre le 1er jour du mois. Afin d'éviter certaines pratiques malhonnêtes, les offres d'achat que l'armateur reçoit ne sont pas rendues publiques. Cependant, l'armateur ne doit pas attendre trop longtemps pour accepter une offre. En effet, il doit d'une part tenir compte du fait que son paquebot, en attendant d'être vendu, est en mouillage dans la rade de Saint-Nazaire ce qui lui coûte m K-€ par mois. D'autre part, il ne doit pas non plus négliger le taux d'inflation mensuel de $\alpha \in]0;1[$, en un mois, la valeur d'1 € passe à $(1+\alpha)$.

On a donc :

- $m \in \mathbb{R}_+^*$: Le coût du mouillage du bateau (en milliers d'euros) dans la baie
- $\alpha \in]0;1[$: Le taux d'inflation mensuel

2 Modélisation

Afin de pouvoir comparer les gains associés à chaque offre, il s'agit tout d'abord de les actualiser en les replaçant sur une même période de temps, par convention celle du mois n = 0. Alors, chaque offre d'achat étant supposée être l'une des réalisation d'une variable aléatoire et, dans la mesure où il n'est pas possible de prévoir les montants des offres d'achat, l'armateur décide de définir sa stratégie optimale comme étant une stratégie financière qui maximise son gain actualisé moyen.

On note X_n la variable aléatoire qui désigne le montant, exprimé en K-€, de la n-ième offre d'achat.

Pour le mois $n \geq 0$, le gain actualisé pour l'armateur est :

$$\frac{X_n}{(1+\alpha)^n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{(1+\alpha)^i}$$

La stratégie de vente optimale correspond au moment $T \in \mathbb{N}$ pour lequel le gain moyen est maximisé. La stratégie revient au choix du moment auquel vendre le bateau. Cette stratégie est modélisée par une variable aléatoire T à valeur dans $\mathbb{N}$.

On se réduit au cas où $T \in \Theta$ où Θ est l'ensemble des $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temps d'arrêts presque sûrement finis. Ici, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est donc $\sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$, c'est-à-dire la plus petite tribu rendant $(X_1, ..., X_n)$ mesurable.

Pour tout $T \in \Theta$, on définit alors la gain moyen par l'espérance du prix de vente actualisé au temps d'arrêt T actualisé moins le coût de mouillage actualisé.

$$\mu(T) = \mathbb{E}[\frac{X_T}{(1+\alpha)^T}] - \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{(1+\alpha)^i}$$

Il s'agit alors de trouver la stratégie optimale de vente, i.e le temps d'arrêt T qui maximise ce gain moyen.

On fait par ailleurs, l'hypothèse que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi intégrable, de densité positive sur $]A;+\infty[$ où $A > 0$ et A est grand.

3 Une stratégie de vente optimale

Pour tout $\tau \geq 0$, on note $T(\tau)$ le $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-temps d'arrêt presque sûrement fini défini comme suit :

$$T(\tau) = inf\{n \geq 0 : X_n + \frac{m}{\alpha} > \tau\}$$

On remarque alors que $X_n + \frac{m}{\alpha}$ est en fait la partie aléatoire du gain actualisé de l'armateur. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{X_n}{(1+\alpha)^n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{(1+\alpha)^i} &= \frac{X_n}{(1+\alpha)^n} - \frac{m}{(1+\alpha)} \frac{1-(\frac{1}{1+\alpha})^n}{1-\frac{1}{1+\alpha}} \\
&= \frac{X_n}{(1+\alpha)^n} - \frac{m}{\alpha}\left(1-(\frac{1}{1+\alpha})^n\right) \\
&= \frac{1}{(1+\alpha)^n} \underbrace{\left(X_n + \frac{m}{\alpha}\right)}_{Z_n} - \frac{m}{\alpha}
\end{aligned}$$

On note donc cette partie "aléatoire" du gain moyen par la variable aléatoire $Z_n = X_n + \frac{m}{\alpha}$, $\forall n \geq 0$. Z est alors un variable aléatoire de même loi que Z_0 et G la fonction de répartition de Z. On peut alors réécrire le temps d'arrêt par rapport à Z :

$$T(\tau) = inf\{n \geq 0 : Z_n > \tau\}$$

Le temps d'arrêt correspond au premier moment à partir duquel le gain moyen atteint ou dépasse une certaine valeur dépendant de τ.

On calcule alors le gain moyen pour ce temps d'arrêt $T(\tau)$ en utilisant la variable aléatoire Z_n :

$$\mu(T(\tau)) = \mathbb{E}\left[\frac{Z_{T(\tau)}}{(1+\alpha)^{T(\tau)}}\right] - \frac{m}{\alpha} = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Z_k}{(1+\alpha)^k} * \mathbb{1}_{\{T(\tau)=k\}}\right]$$

Or $\{T(\tau) = k\} = \left[\bigcap_{i=0}^{k-1}\{Z_i \leq \tau\}\right] \bigcap \{Z_k > \tau\}$

d'où on déduit que

$$\mu(T(\tau)) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Z_k}{(1+\alpha)^k} \mathbb{1}\left\{\bigcap_{i=0}^{k-1}\{Z_i \leq \tau\} \bigcap \{Z_k > \tau\}\right\}\right] - \frac{m}{\alpha}$$

De plus, la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes car c'est une transformée de $(X_n)_{n\geq 0}$ qui est une suite de variables aléatoires indépendantes.

On a donc,

$$\mu(T(\tau)) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Z_k}{(1+\alpha)^k} \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{Z_i \leq \tau\}} \mathbb{1}_{\{Z_k > \tau\}}\right] - \frac{m}{\alpha}$$

Et d'après Fubini,

$$\begin{aligned}
\mu(T(\tau)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{Z_k}{(1+\alpha)^k} \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{Z_i \leq \tau\}} \mathbb{1}_{\{Z_k > \tau\}}\right] - \frac{m}{\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^k} \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_i \leq \tau\}}\right] \mathbb{E}\left[Z_k \mathbb{1}_{\{Z_k > \tau\}}\right] - \frac{m}{\alpha}
\end{aligned}$$

(Par indépendance des Z_i et linéarité de l'espérance)

On remarque alors que $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{Z_i \leq \tau\}\right] = P(Z_i \leq \tau)$, et comme les Z_i suivent tous la même loi, $\prod_{i=0}^{k-1} P(Z_i \leq \tau) = P(Z \leq \tau)^k$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mu(T(\tau)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^k} \underbrace{P(Z \leq \tau)^k}_{G(\tau)} \mathbb{E}\left[Z \mathbb{1}_{\{Z > \tau\}}\right] - \frac{m}{\alpha} \\
&= \mathbb{E}\left[Z \mathbb{1}_{\{Z > \tau\}}\right] \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{G(\tau)}{1+\alpha}\right)^k - \frac{m}{\alpha}
\end{aligned}$$

Et comme, $1+\alpha \geq 1$ et $G(\tau) \leq 1$ la série $\left(\sum_{i=0}^{k} (\frac{G(\tau)}{1+\alpha})^i\right)_k$ converge. On a donc :

$$\mu(T(\tau)) = \mathbb{E}\left[Z \mathbb{1}_{\{Z > \tau\}}\right] \frac{1}{1 - \frac{G(\tau)}{1+\alpha}} - \frac{m}{\alpha}$$

Ce qui donne le résultat présenté dans le problème :

$$\mu(T(\tau)) = \mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_{\{Z>\tau\}}\right]\frac{1+\alpha}{1+\alpha+G(\tau)} - \frac{m}{\alpha} \tag{1}$$

On cherche alors à expliciter $\mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_{\{Z>\tau\}}\right]$. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_{\{Z>\tau\}}\right] &= \int_{\mathbb{R}} x\mathbb{1}_{x>\tau} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}(x)}_{\text{densité de Z}} dx \\ &= \int_{\tau}^{+\infty} x\frac{\partial G}{\partial x}(x)dx\end{aligned}$$

Or les $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ est une fonction continue, par IPP on obtient :

$$\mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_{\{Z>\tau\}}\right] = [-(1-G(x))x]_{\tau}^{+\infty} + \int_{\tau}^{+\infty}(1-G(x))dx$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_{\{Z>\tau\}}\right] = \lim_{x\to+\infty}(-(1-G(x))) + \tau(1-G(\tau)) + \int_{\tau}^{+\infty}(1-G(x))dx$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(-(1-G(x))) = 0$ car on suppose que G converge vers 1 à une vitesse exponentielle ce qui est cohérent compte tenu de la défnition de X.

On en déduit donc :

$$\mathbb{E}\left[Z\mathbb{1}_{\{Z>\tau\}}\right] = \tau(1-G(\tau)) + \int_{\tau}^{+\infty}(1-G(x))dx \tag{2}$$

En réinjectant (2) dans (1), on obtient :

$$\mu(T(\tau)) = \frac{1+\alpha}{1+\alpha+G(\tau)}\left[\tau(1-G(\tau)) + \int_{\tau}^{+\infty}(1-G(x))dx\right] - \frac{m}{\alpha} \tag{3}$$

G étant dérivable en tant que fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité (on note g sa dérivée), la fonction précédente $\mu(T(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par rapport à t. On a donc pout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\mu'(T(t)) = \frac{(1+\alpha)g(t)}{(1+\alpha+G(t))^2}\left[t(1-G(t)) + \int_t^{+\infty}(1-G(x))dx\right]$$
$$+ \frac{(1+\alpha)}{1+\alpha+G(t)}\left[(1-G(t)) - tg(t) - (1-G(t))\right]$$

D'où

$$\mu'(T(t)) = 0 \Leftrightarrow \frac{g(t)}{1+\alpha+G(t)}\left[t(1-G(t)) + \int_t^{+\infty}(1-G(x))dx\right] - tg(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow t(1+\alpha+G(t)) = t(1-G(t)) + \int_t^{+\infty}(1-G(x))dx$$
$$\Leftrightarrow \alpha t = \int_t^{+\infty}(1-G(x))dx$$

Il reste à montrer que le point γ qui vérifie cette égalité est un maximum global.

3.1 Montrons que $T(\gamma)$ est une stratégie de vente optimale

Dans un premier temps, remarquons que $\mathbb{E}\left(max(Z,\gamma)\right) = \gamma + \alpha\gamma$. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(max(Z,\gamma)\right) &= \mathbb{E}\left(max(Z,\gamma)(\mathbb{1}_{Z>\tau} + \mathbb{1}_{Z\leq\tau})\right)\\ &= \mathbb{E}\left(max(Z,\gamma)\mathbb{1}_{Z>\tau}\right) + \mathbb{E}\left(max(Z,\gamma)\mathbb{1}_{Z\leq\tau}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(Z\mathbb{1}_{Z>\tau}\right) + \gamma\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{Z\leq\tau}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(Z\mathbb{1}_{Z>\tau}\right) + \gamma G(\gamma)\end{aligned}$$

Et d'après (2)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(max(Z,\gamma)\right) &= \gamma(1-G(\gamma)) + \int_\gamma^{+\infty}(1-G(x))dx + \gamma G(\gamma)\\ &= \gamma + \int_\gamma^{+\infty}(1-G(x))dx\end{aligned}$$

Et par définition de γ :

$$\mathbb{E}\left(max(Z,\gamma)\right) = \gamma + \gamma\alpha \tag{4}$$

On considère ensuite le processus suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{max(Z_n,\gamma)}{(1+\alpha)^n}$$

Montrons qu'il s'agit d'une surmartingale :

$\forall n \in \mathbb{N}$, V_n est F_n-mesurable car Z_n est F_n-mesurable
V_n est intégrable pour tout entier n (cf ci-dessus)
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[V_{n+1}|F_n\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{max(Z_{n+1},\gamma)}{(1+\alpha)^{n+1}}|F_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{max(X_{n+1}+\frac{m}{\alpha},\gamma)}{(1+\alpha)^{n+1}}|F_n\right]\end{aligned}$$

Or, $X_{n+1} \perp \sigma(X_1, ..., X_n)$ d'où

$$\mathbb{E}\left[V_{n+1}|F_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{max(Z_{n+1},\gamma)}{(1+\alpha)^{n+1}}|F_n\right] = \mathbb{E}\left[V_{n+1}\right]$$

Par ailleurs, $\gamma \leq max(Z_n, \gamma)$ par définition

$$\Rightarrow (1+\alpha)\gamma \leq (1+\alpha)max(Z_n,\gamma)$$

Or $(1+\alpha)\gamma = \mathbb{E}[max(Z,\gamma)]$ d'après (4)

$$\Rightarrow \mathbb{E}[max(Z,\gamma)] \leq (1+\alpha)max(Z_n,\gamma)$$

Or Z_n et Z_{n+1} ont la même loi

$$\Rightarrow \mathbb{E}[max(Z_{n+1},\gamma)] \leq (1+\alpha)max(Z_n,\gamma)$$

et en divisant pas $(1+\alpha)^{n+1} > 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[V_{n+1}] \leq V_n$$

et on sait que $\mathbb{E}\left[V_{n+1}|F_n\right] = \mathbb{E}[V_{n+1}]$

Donc $(V_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale (par rapport à la filtration $\sigma(X_1, ..., X_n)$).
T étant un temps d'arrêt, on sait que $(V_n^T)_n \leq 0$ est également une surmartingale (cf cours processus). On a donc l'inégalité suivante $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[V_n^T] \leq \mathbb{E}[V_0^T] = \mathbb{E}[V_0] = \gamma(1+\alpha) \Leftrightarrow \mathbb{E}[V_n^T] \leq \gamma(1+\alpha) \forall n \in \mathbb{N}$$

On admet ensuite que $\underset{n\to+\infty}{lim} \mathbb{E}[V_n^T] = \mathbb{E}[V_T]$. On a alors

$$\mathbb{E}[V_T] \leq \gamma(1+\alpha) \tag{5}$$

Et

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{max(Z_T, \gamma)}{(1+\alpha)^T} \geq \frac{Z_T}{(1+\alpha)^T} \\ &\Rightarrow V_T \geq \frac{Z_T}{(1+\alpha)^T} - \frac{m}{\alpha} \text{ car } \frac{m}{\alpha} > 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{E}[V_T] \geq \mathbb{E}\left[\frac{Z_T}{(1+\alpha)^T}\right] \end{aligned}$$

En reprenant (5), on a : $\mathbb{E}\left[\frac{Z_T}{(1+\alpha)^T}\right] \leq \gamma(1+\alpha)$

et $\mu(T(\gamma)) = \frac{1+\alpha}{1+\alpha-G(\gamma)} \left(\gamma(1-G(\gamma)) + \underbrace{\int_\gamma^{+\infty} (1-G(x))dx}_{\alpha\gamma \text{ par définition de } \gamma} \right) - \frac{m}{\alpha}$ d'où

$$\begin{aligned} \mu(T(\gamma)) &= \frac{1+\alpha}{1+\alpha-G(\gamma)} \left(\gamma - \gamma G(\gamma) + \alpha\gamma\right) - \frac{m}{\alpha} \\ &= \frac{1+\alpha}{1+\alpha-G(\gamma)} \gamma \left(1+\alpha-G(\gamma)\right) - \frac{m}{\alpha} \\ &= \gamma(1+\alpha) - \frac{m}{\alpha} \end{aligned}$$

On a donc en reprenant l'inégalité (5) et en soustrayant $\frac{m}{\alpha}$ des deux côtés :

$$\forall T \in \Theta,\ \mu(T) \leq \mu(T(\gamma)) \tag{6}$$

Car $\mathbb{E}\left[\frac{Z_T}{(1+\alpha)^T}\right] - \frac{m}{\alpha} = \mu(T)$ et $\gamma(1+\alpha) - \frac{m}{\alpha} = \mu(T(\gamma))$
T est donc bien un stratégie de vente optimale.

4 Estimation de Gamma γ

Après avoir déterminé la stratégie de vente optimale, il s ?agit de déterminer la valeur du paramètre pour une densité des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée. Cette densité est sensée modéliser le montant de la n-ième offre d ?achat. Le paramètre γ est estimé de la manière suivante : le paramètre γ est défini comme l'unique racine de l'équation $F = 0$ avec F définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \alpha t - \int_t^\infty (1 - G(s))ds$$

Soit $\hat{G}_n$ la fonction de répartition empirique induite par les observations Z_1,...,Z_n, i.e

$$\hat{G}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Z_i \leq t\}}$$

L'estimateur naturel de la fonction F est alors $\hat{F}_n$ définie pour tout t par

$$\hat{F}_n(t) = \alpha t - \int_t^\infty (1 - \hat{G}_n(s))ds = \alpha t - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - t)\mathbb{1}_{\{Z_i > t\}}$$

On considère alors l'estimateur $\hat{\gamma}_n$ tel que $\hat{F}_n(\hat{\gamma}_n) \leq \frac{1}{n}$.

Pour estimer γ, nous allons en premier lieu choisir une densité simple. Nous pourrons alors :

- Calculer la véritable valeur du paramètre γ
- Avec des simulations, estimer la valeur de $\hat{\gamma}_n$
- Observer la précision de notre estimateur

On appelle cette densité f_X et on la définit comme la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1. On a donc

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 0 \text{ si } x < 0 \\ &= exp(-x) \text{ si } x \geq 0 \end{aligned}$$

Il s'agit dès lors de trouver la fonction G, fonction de répartition de Z_0, avec la variable aléatoire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que $Z_n = X_n + \frac{m}{\alpha}$. On obtient donc après calculs :

$$\begin{aligned} G(x) &= 0 \text{ si } x < \frac{m}{\alpha} \\ &= 1 - exp(-x) \text{ si } x \geq \frac{m}{\alpha} \end{aligned}$$

On rappelle que la vraie valeur du paramètre γ est définie comme l'unique racine de l'équation $F = 0$ avec F définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \alpha t - \int_t^\infty (1 - G(s))ds$$

Ce qui équivaut, en remplaçant G par sa vraie valeur, à :

$$\begin{aligned}\alpha t &= \frac{m}{\alpha} - t + exp(\frac{-m}{\alpha}) \text{ si } t < \frac{m}{\alpha} \\ &= exp(-t) \text{ si } t \geq \frac{m}{\alpha}\end{aligned}$$

On choisit alors une valeur pour les paramètres m (coût du mouillage dans le port de Saint-Nazaire par mois en milliers d'euros) et α(taux d'inflation mensuel). On prend arbitrairement $m = 1$ et $\alpha = 0,02$, on prend un taux anormalement élevé pour faciliter les calculs. On a alors $\frac{m}{\alpha} = 50$ et notre équation se réécrit :

$$\begin{aligned}0,02t &= 50 - t + exp(50) \text{ si } t < 50 \\ &= exp(-t) \text{ si } t \geq 50\end{aligned}$$

On sait que cette équation possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, cette solution ce trouve clairement sur l'intervalle [0,50[la deuxième équation ne possédant pas de solution pour $t \geq 50$. On obtient donc dans le cas d'une loi exponentielle de paramètre 1 :

$$\gamma = \frac{m}{\alpha(1+\alpha)} + exp(\frac{-m}{\alpha})$$

En remplaçant par les valeurs des paramètres,

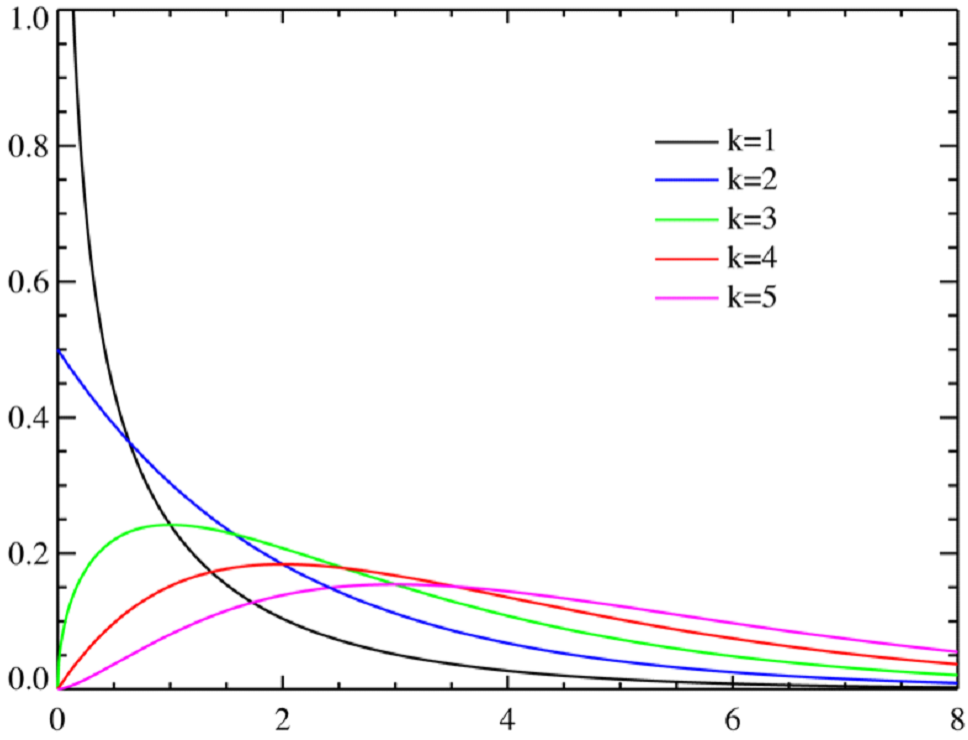
$$\gamma \cong 49,02$$

Intéressons-nous désormais à l'estimateur que l'on obtient pour $n = 100$. En implémentant la procédure décrite au début de cette partie sous le logiciel R (voir le code en annexe), on obtient :

$$\hat{\gamma} = 50,035$$

L'estimateur semble donc consistant car l'écart est très faible et il est bien consistant, chose qui se démontre rigoureusement mais qui fait appel à des résultats non vus en cours (théorème de Dini notamment). Ce résultat permet donc à l'armateur de définir une stratégie de vente optimale. En effet il peut dès lors savoir à partir de quel montant il doit accepter l'offre afin de maximiser ses gains. Ici nous sommes dans un cas particulier, la valeur de γ trouvée impliquerait que l'armateur vende son bien dès la première offre supérieure à 0, cela est due au choix de la densité, en effet la valeur prise en moyenne par une variable aléatoire suivant une loi $\epsilon(1)$ est 1, sachant que le coût du mouillage est également de 1 par mois (en milliers d'euros toujours) il est logique de conserver son bien le moins longtemps possible sachant que notre perte va probablement augmenter le mois suivant (plus les mois avance plus la probabilité d'avoir une offre qui compenserait les pertes dues au mouillage est infime). Nous rappelons que cette densité a été choisie dans un souci de concision (elle permet de calculer facilement

Densité d'une loi du Khi-deux à k degrés de liberté



la vraie valeur du paramètre γ) et non de réalisme, on peut par exemple tenter de modéliser le montant des offres d'achat par une loi dont l'allure de la densité correspond davantage à notre cas de figure : la loi du khi-deux (cf graphe). Par ailleurs, il s'agit de choisir un degré de liberté (qui est aussi l'espérance) proche du prix moyen d'un bateau afin d'avoir un résultat représentatif.

Dans le cas d'une loi du khi-deux à 10 degrés de liberté, on obtient :

$$\hat{\gamma} = 61,42$$

L'armateur accepte donc l'offre dès qu'elle dépasse 11 420 euros. Enfin, on peut également calculer la durée moyenne de cette opération commerciale optimale et son gain actualisé moyen grâce aux formules que l'on rappelle :

$$\mathbb{E}T(\gamma) = \frac{G(\gamma =}{1 - G(\gamma)}$$

$$\gamma(1+\alpha) - \frac{m}{\alpha} = \mu(T(\gamma))$$

Dans notre cas précis, la durée moyenne de cette opération commerciale est :

$$\mathbb{E}T(\gamma) = 2,07, \text{ comprendre 2,07 mois}$$

. Le gain actualiseé moyen est :

$$\mu(T(\gamma) = 12,65, \text{ comprendre 12 650 euros.}$$

Notons que ces résultats sont dépendants du choix de la densité initiale, plus elle est sera représentative de la vraie situation, plus notre simulation sera significative.

5 Annexe

5.1 Code R de la partie IV : estimation de Gamma

```
#on définit les paramètres
n=100
m=1
alpha=0.02
#on simule X et on définit Z à partir de X
x=rchisq(n,10) #Ici une loi exponentielle de paramètre 1
z=x+(m/alpha)

z=x+(m/alpha)


#on définit les paramètres
n=100
m=1
alpha=0.02
#On deéfinit F
F<-function(t,n,z)
{
#On créer un vecteur d'indicatrice sur Z comme convenu
 I=vector(length=n)
 for (i in 1:n){
 I[i]=ifelse(z[i]>t,1,0)
 }
 F=(alpha*t)-(1/n)*sum(I*(z-t))
 return (F)
}
#On deéfinit une fonction de recherche de l'estimateur
gamma<-function(n)
{
 t=48 # point de départ choisi proche de 50 car notre résultat devrait en être proche
 while (abs(F(t,n,z))>1/n){
 t=t+1/1000} #On fixe notre pas
 return(t)
}
#Calcul la durée moyenne de l'opération
E=pchisq(61.42-50,10)/(1-pchisq(61.42-50,10))
```