Économie et management.
Licence 2.
Théorie des jeux.

Année
2014 - 2015

Chapitre 2 :

Jeux sous forme normale

Nicolas Gravel.

→ **Jeux sous forme normale**.

→ **Définition : représentation formelle d'un problème d'interaction dans laquelle on fait abstraction du caractère séquentiel des décisions**.

→ Détails pertinents pour : comprendre la nature de l'interaction et en prévoir son issue.

→ **Jeu sous forme normale : description**.

→ **Ensemble fini** N **de** n **joueurs, indicés par** i .

→ **Pour chaque joueur** i **: ensemble** A_i **des actions disponibles à** i .

→ **Aucune hypothèse sur** A_i **: fini ou infini**.

→ **Chaque joueur** i **: fonction de paiement** $U_i : A_1 \times \ldots \times A_n$ **dans** $\mathbb{R}$.

→ **Associe à chaque liste** $(a_1 , \ldots , a_n)$ **d'actions individuelles : paiement (subjectif) reçu par** i .

→ Lorsque : joueurs choisissent les actions considérées.

→ **Exemple : la course cycliste**.

→ $N = (1 ; 2) = (\text{Alberto} , \text{Lance})$.

→ $A_1 = A_2 = (\text{EPO} , \text{NON})$.

→ U_1 et U_2 : définies par.

→ $U_1 (\text{EPO} , \text{EPO}) = U_2 (\text{EPO} , \text{EPO}) = 1$.

→ $U_1 (\text{NON} , \text{NON}) = U_2 (\text{NON} , \text{NON}) = 2$.

→ $U_1 (\text{EPO} , \text{NON}) = U_2 (\text{NON} , \text{EPO}) = 5$.

→ $U_1 (\text{NON} , \text{EPO}) = U_2 (\text{EPO} , \text{NON}) = -5$.

I _ Stratégies mixtes.

→ **Stratégies mixtes : stratégie aléatoire modélisée comme une fonction de probabilité.**

→ **Ensembles d'actions** A_i **finis.**

→ **Stratégie mixte** σ **pour un joueur** i **: fonction de probabilité sur** A_i .

→ **Interprétation :** $\sigma(a)$ **: « probabilité que** i **choisisse l'action** a **».**

→ $\sigma \in [0,1]\ \forall\ a \in A_i\ \forall\ i$.

→ $\sum_{a \in A_i} \sigma(a) = 1$.

→ **Stratégie pure** $a \in A_i$ **: peut être une stratégie mixte particulière.**

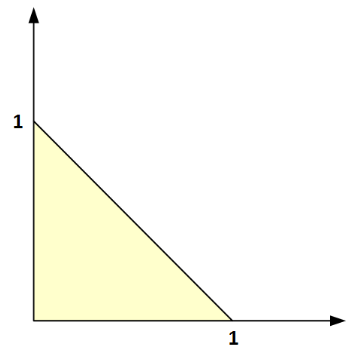
→ Probabilité de 1 à a et de 0 aux autres actions.

→ S_i **: ensemble de toutes les stratégies mixtes sur** $A_i = (a_{1,} \dots , a_{(A_i)})$.

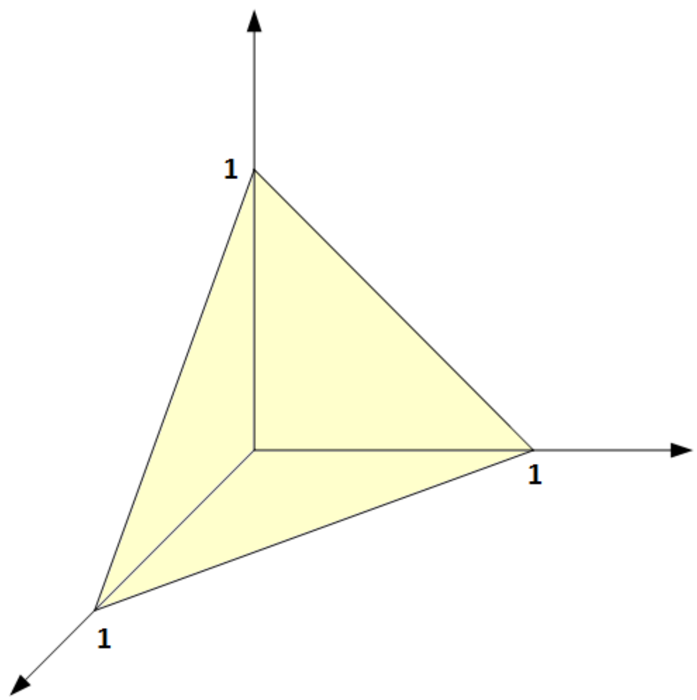
→ S_i **: simplexe de dimension.**

→ $\mathrm{card}\ (A_i) - 1 = \{(\sigma_{1,} \dots , \sigma_{\mathrm{card}\ (A_i)}) \in [0,1]^{\mathrm{card}\ A_i} : \sum_i \sigma_i = 1\}$.

→ **Simplexe de dimension 1 dans** $\mathbb{R}^2$.



→ **Simplexe de dimension 2 dans** $\mathbb{R}^3$.



→ **Combinaison de stratégies mixtes : adoptée**.

→ **Hypothèse : stratégies mixtes choisies indépendamment**.

→ **Paiement espéré de** i : $p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} \prod_{h \in N} \sigma_h(a_h)\, U_i(a_1, \dots, a_n)$.

→ Paiement en moyenne.

→ **Hypothèses : indépendance statistique et paiement moyen**.

→ **Exemple : pierre-papier-ciseaux**.

→ Paiement espéré.

		Joueur 2		
		PIERRE	**FEUILLE**	**CISEAUX**
Joueur 1	**PIERRE**	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	FEUILLE	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	CISEAUX	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

→ **Hypothèses**.

→ Joueur 1.

→ Roche : probabilité $1/2$.

→ Papier : probabilité $1/2$.

→ Ciseaux : jamais.

→ Joueur 2.

→ Chaque stratégie : probabilité $1/3$.

		Joueur 2		
		PIERRE ***1/3***	**FEUILLE** ***1/3***	**CISEAUX** ***1/3***
Joueur 1	**PIERRE** ***1/2***	(0,0) *1/6*	(-1,1) *1/6*	(1,-1) *1/6*
	FEUILLE ***1/2***	(1,-1) *1/6*	(0,0) *1/6*	(-1,1) *1/6*
	CISEAUX ***0***	(-1,1) *0*	(1,-1) *0*	(0,0) *0*

→ **Paiements espérés**.

→ $p_1 = \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * (-1) + \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * (-1) = 0$.

→ $p_2 = \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * (-1) + \frac{1}{6} * (-1) + \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * 1 = 0$.

II _ Jeux résolvables par dominance.

→ **Combinaison de stratégies (pures) :** (a_i , a_{-i}) .

→ Où.

→ **Joueur** i **: action** $a_i \in A_i$.

→ **Autres joueurs : combinaison actions** $a_{-i} \in A_i \times \ldots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \ldots \times A_n = A_{-i}$.

1 _ Dominance stricte.

→ **Définition : dominance stricte de la stratégie** a_i **sur** a_{-i} **du joueur** i .

→ **Si quelque soit :** $a_{-i} \in A_i \times \ldots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \ldots \times A_n$.

→ $U_i(a_i , a_{-i}) > U_i(a'_i , a_{-i})$ **est vrai**.

→ Exemple : course cycliste.

→ Pour chaque joueur : stratégie « NON » strictement dominée par la stratégie « EPO ».

2 _ Dominance faible.

→ **Définition : dominance faible de la stratégie** a_i **sur** a_{-i} **du joueur** i .

→ **Si quelque soit :** $a_{-i} \in A_i \times \ldots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \ldots \times A_n$.

→ $U_i(a_i , a_{-i}) \geq U_i(a'_i , a_{-i})$ **est vrai**.

→ $U_i(a_i , a'_{-i}) > U_i(a'_i , a'_{-i})$ **est vrai**.

→ Exemple : bataille de la mer de Bismark.

→ Pour Kimura : stratégie « SUD » faiblement dominée par la stratégie « NORD ».

3 _ Exemples.

→ **Notion de domination : application aux stratégies mixte**.

→ **Remplacement :** a_i **par** σ **et** U_i **par** p_i .

→ **Exemple**.

→ **Stratégies pures : aucune relation de domination**.

→ Joueur 1 : aucune dominance entre A et B.

→ Joueur 2 : aucune dominance entre C et D, C et E ou D et E.

→ **Stratégie mixte : domine une stratégie pure**.

→ Joueur 2 : jamais E.

→ Mixture C et D : domine E.

→ Joueur 1 : stratégie dominante en A.

→ Joueur 2 : choisira C.

		Joueur 2		
		C	**D**	**E**
Joueur 1	**A**	(4,10)	(3,0)	(1,3)
	B	(0,0)	(2,10)	(10,3)

4 _ Principe de rationalité et connaissance commune.

→ **Principe fondamental de rationalité**.

→ **Rationalité faible** : joueur n'adoptera jamais une stratégie strictement dominée par une autre.

→ **Rationalité forte** : joueur n'adoptera jamais une stratégie faiblement dominée par une autre.

→ **Situations : issue du jeu déterminée par ces principes**.

→ Chaque joueur : possession d'une stratégie qui domine toutes les autres.

→ **Rationalité : connaissance commune**.

→ **Rationalité des autres joueurs : croyances réciproques *ad infinitum***.

5 _ Équilibre en stratégies dominantes.

→ **Combinaison de stratégies pures :** $(a_i , \dots , a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$.

→ **Combinaison de stratégies mixtes :** $(\sigma_i , \dots , \sigma_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$.

→ **Définition : équilibre en stratégies strictement (resp. faiblement) dominantes**.

→ **Condition : pour tout joueur** i .

→ a_i **domine strictement (resp. faiblement)** a'_i **pour toute** $a'_i \in A_i$.

→ Exemple : course cycliste.

→ (EPO , EPO) : équilibre en stratégies strictement dominantes.

→ **Équilibre en stratégies dominantes : prédiction très plausible de l'issue du jeu**.

→ **Prédiction : obtenue du principe de rationalité**.

III _ Élimination itérative de stratégies dominées.

1 _ Définition intuitive.

→ **Chaque joueur : élimination des stratégies strictement dominées**.
→ **Nouveau jeu : apparition de nouvelles relations de dominance**.
→ Élimination des stratégies dominées.
→ **Processus itératif d'élimination des stratégies dominées**.
→ Arrêt : une seule stratégie pour chaque joueur.
→ **Jeu : résolvable par élimination itérative des stratégies strictement dominées**.

→ Exemple : bataille de la mer de Bismark.

		Kimura	
		C	**D**
Kenney	**A**	(2,-2)	(2,-2)
	B	(1,-1)	(3,-3)

→ Kimura : « Sud » faiblement dominée.
→ Élimination de « Sud » de l'ensemble des stratégies de Kimura.

		Kimura
		C
Kenney	**A**	(2,-2)
	B	(1,-1)

→ Kenney : relation de dominance.

		Kimura
		C
Kenney	**A**	(2,-2)

2 _ Définition formelle.

→ **Procédure d'élimination de stratégies dominées.**

→ **Hypothèses.**

→ Ensembles d'actions : finis.

→ Stratégies mixtes : autorisées.

→ **Pour** $i \in N$ **,** $A_i(0) = A_i$ **, et,** $t = 1, \ldots$.

→ $A_i(t) = a_i \in A_i(t-1) : \exists\, \sigma \in S_i(t-1)$ **: tel que.**

→ $\sum_{a \in A_{i(t-1)}} \sigma(a)\, U_i(a\,;\, a_{-i}) > U_i(a_i\,;\, a_{-i})\ \forall\, a_{-i} \in A_{-i}$.

→ $S_i(t) = \sigma_i \in S_i : \sigma_i(a) > 0\ \forall\, a \in A_i(t)$.

→ **Pour** $t' = \mathrm{Min}(t)$ **et** $A_i(t') = A_i(t'+1)$ **pour tout les joueurs** i .

→ $S_i(t') = \sigma_i \in S_i(t) : \exists\, \sigma \in S_i(t')$ **: tel que.**

→ $\sum_{a \in A_i(t')} \sigma(a)\, U_i(a\,;\, a_{-i}) > \sum_{a \in A_i(t')} U_i(a_i\,;\, a_{-i})\ \forall\, a_{-i} \in A_i$.

→ $A_i(t)$ **: ensemble des stratégies pures du joueur** i .

→ **Pas encore éliminées à l'étape** t **de la procédure.**

→ $A_i(t')$ **: ensemble des stratégies pures du joueur** i .

→ **Obtenues à la fin de la procédure itérative d'élimination des stratégies dominées.**

→ $S_i(t)$ **: ensemble des stratégies mixtes du joueur** i .

→ **Assignant une probabilité nulle aux stratégies pures éliminées à l'étape** t .

→ $S_i(t')$ **: ensemble des stratégies mixtes du joueur** i .

→ **Pas dominées à la fin de la procédure.**

→ $S_i(t')$ **: ensemble des stratégies mixtes sur** $A_i(t')$.

→ Exemple.

→ Joueur 2.

→ Stratégie mixte : C et D avec probabilité $1/2$.

→ Paiement moyen : $-1/2$.

→ Dominance de E sur C et D avec probabilité $1/2$.

→ Paiement de E : 0 .

		Joueur 2		
		C	**D**	**E**
Joueur 1	**A**	(3,1)	(0,-2)	(1,0)
	B	(0,-2)	(3,1)	(1,0)

→ **Stratégies mixtes sur l'ensemble des stratégies pures résistant à un procédure d'élimination itérative de stratégies dominées.**

→ **Pas nécessairement : stratégies mixtes survivant à une procédure d'élimination de stratégies mixtes dominées.**

3 _ Jeux résolvables par dominance.

→ **Définition : jeu résolvable par stricte dominance**.

→ **Exacte prédiction de l'issue sous seule hypothèse de rationalité et de connaissance commune**.

→ **Condition :** $\text{card } A_i(t') = 1$ **ou** $\text{card } S_i(t') = 1$ **pour tout** i .

→ **Raisonnement analogue : jeu résolvable par dominance faible**.

→ **Ensemble** $S_i(t')$ **: coïncide avec l'ensemble des combinaisons choisies des joueurs**.

→ Sous hypothèse : rationalité et connaissance commune de la rationalité.

→ Exemple : jeu à trois joueurs.

→ Joueur 1 : choisit la ligne.

→ Joueur 2 : choisit la colonne.

→ Joueur 3 : choisit le tableau.

Tableau A		
	G	D
H	0,0,3	0,1,1
B	1,1,1	1,0,2

Tableau B		
	G	D
H	2,0,0	0,1,0
B	2,2,0	2,2,0

Tableau C		
	G	D
H	3,1,1	2,0,0
B	1,1,0	1,2,1

→ Joueur 3 : tableau A domine le tableau B et C

Tableau A		
	G	D
H	0,0,3	0,1,1
B	1,1,1	1,0,2

→ Joueur 1 : stratégie B domine la stratégie H.

Tableau A		
	G	D
B	1,1,1	1,0,2

→ Joueur 2 : stratégie G domine la stratégie D.

Tableau A	
	G
B	1,1,1

→ **Une seule combinaison pure : résultat de la procédure d'élimination itérative des stratégies dominées**.

→ **Application : tragédie des communs**.

→ Anna et Bob : voisins partageant l'entretien d'une cage d'escalier.

→ Chacun : possibilité de consacrer jusqu'à 10 heures par mois à l'entretien.

→ **Qualité d'entretien :** $Q = T^{1/2}$ **.**

→ Fonction du temps total passé par les deux voisins.

→ **Préférences de chaque individu :** $\Phi\left(t\ ,\ Q\right) = \left(10 - t\right) Q$.

→ Fonction du temps individuel passé et de la propreté.

→ **Problème : temps passé par chaque individu à l'entretien de la cage d'escalier**.

→ **Représentation : jeu sous forme normale**.

→ $N = \{1{,}2\}$.

→ Joueur 1 : Bob.

→ Joueur 2 : Anna.

→ $A_1 = A_2 = [0{,}10]$.

→ Temps : supposé divisible.

→ Stratégie pure : quantité mensuelle de temps passé à l'entretien.

→ $U_i\left(t_{1,}\ t_2\right) = \left(10 - t_i\right)\left(t_1 + t_2\right)^{1/2}\ \forall\ i = 1\ ;\ 2$.

→ **Courbe d'indifférence : construction**.

→ $U_i\left(t_{1,}\ t_2\right) = \left(10 - t_i\right)\left(t_1 + t_2\right)^{\frac{1}{2}} = u$.

→ $\left(t_1 + t_2\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{u}{10 - t_i}$.

→ $\left(t_1 + t_2\right) = \dfrac{u^2}{\left(10 - t_i\right)^2}$.

→ $t_j = \dfrac{u^2}{\left(10 - t_i\right)^2} - t_i$.

→ **Représentation des préférences** : ensemble $[0{,}10]\ \mathrm{x}\ [0{,}10]$ des combinaisons de temps disponibles.

→ **Courbe d'indifférence typique de** i **:** $t_j = \dfrac{u^2}{\left(10 - t_i\right)^2} - t_i$.

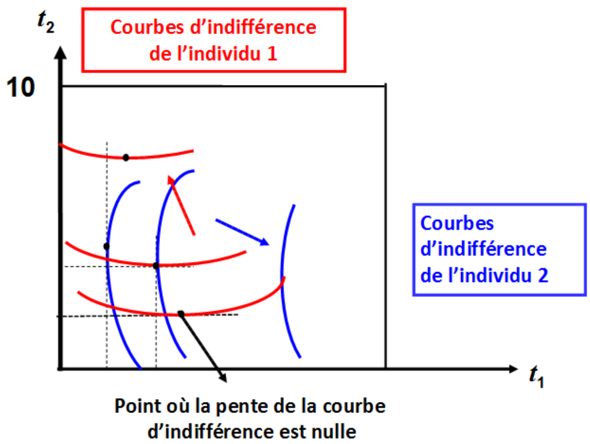
→ **Pour un niveau d'utilité** u **arbitraire**.

→ **Graphiquement**.

→ **Point où la pente de la courbe d'indifférence est nulle : meilleure réponse d'un joueur à tout choix donné de l'autre**.

→ Supposition : joueur 2 choisit 4 .

→ Meilleure réponse du joueur 1 à 4 sera : $r_1(4)$.



→ **Meilleure réponse du joueur** i **à tout choix de** j **: programme d'optimisation**.

→ $\text{Max}_{t_i \in [0,10]}\ u = (10 - t_i) + (t_i + t_j)^{1/2}$.

→ **C.P.O :** $\dfrac{du}{dt_i} = 1 - (t_i + t_j)^{1/2} + (10 - t_i)(t_i + t_j)^{-1/2} = 0$.

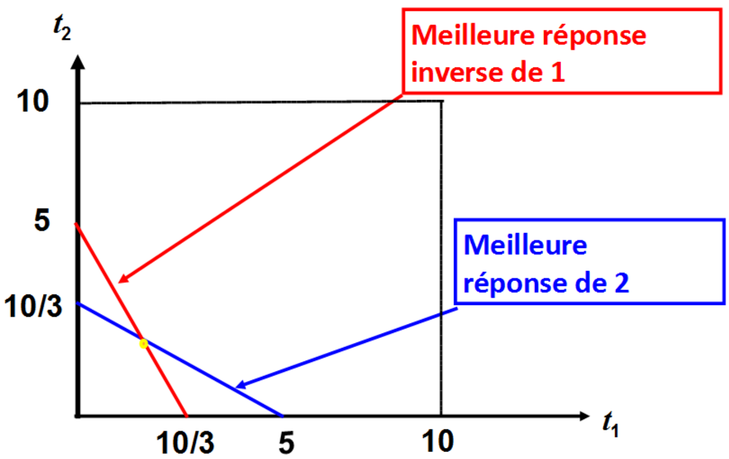
→ $-(t_i + t_j) + \dfrac{10 - t_i}{2} = 0$.

→ $t_i = \dfrac{10 - 2t_j}{3}$ si $t_i = \dfrac{10 - 2t_j}{3} \geq 0$.

→ **Graphiquement**.

→ **Intersection : unique combinaison survivante à une procédure d'élimination itérative de stratégies dominées**.

→ **Procédure : infinie mais convergente**.



→ **Issue du jeu : système**.

→ $\begin{cases} t_1 = \dfrac{10-2t_2}{3} \\ t_2 = \dfrac{10-3t_1}{2} \end{cases}$.

→ **Résolution :** $\begin{cases} t_1^* = 2 \\ t_2^* = 2 \end{cases}$.

→ **Combinaison d'efforts : pas efficace au sens de Pareto**.

→ Conflit : intérêt collectif et individuel.