Mathe I Zusammenfassung

Quellen: Vorlesung Mathematik für Ingenieure der CAU Kiel bei Gesine Hellwig,
„Vorlesungsmitschrift von Torsten Krause zur Vorlesung Mathematik für Ingenieure I – III , bei Priv.-Doz. Dr. rer. nat. Peter Klopsch, WS 2005/06 – WS 2006/07“, das Internet, Bücher, Freunde, Verwandte

Anmerkung:
Matrizen und LGS sind NICHT enthalten, die Nummerierung dieser Punkte in der Vorlesungsmitschrift (s.o.) stimmt wieder mit der Nummerierung von Frau Hellwig überein.

Zur internen Nutzung bestimmt.

Inhalt

Teil 0: Mathematische Sprache 6
1. Aussagen & ihre Verknüpfungen 6
   1. Verknüpfung von Aussagen (Junktoren): 6
   2. Bemerkung zu Verknüpfungen 6
   3. Satz: Gesetzmäßigkeiten 6
   4. Satz: Kontraposition 6
2. Aussageformen und Quantoren (Quantoren-Kalkül) 7
   1. Spezialfall: Aussageform mit einer Variablen 7
   2. Allaussage: ∀ = Allquantor 7
   3. Existenzaussage: ∃ = Existenzquantor 7
   4. Negierung von Aussagen 7
3. Beweismethoden 7
   1. Direkter Beweis 7
   2. Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis) 7
   3. Beweis durch Kontraposition 7
Teil I: Mengen, Relationen, Abbildungen 8
1. Elementarbeziehung (€-Relation) 8
2. *Teilmengenbeziehung (Inklusion)* 8
3. Gleichheitsprinzip (Extensionalitätsprinzip) 8
4. Aussonderungsprinzip (Komprehensionsprinzip) 8
5. Definition: Leere Menge 8
6. Definition: Vereinigungsmenge 9
7. Definition: Schnittmenge 9
8. Definition: Differenzmenge 9
9. Definition: Potenzmenge 9
10. Definition: Mächtigkeit 9
11. Definition: Geordnete Paare 10
12. Definition: Kartesisches Produkt 10
13. Definition: n-Tupel, n-faches kartesisches Produkt 10
14. Einschub (Ergänzung zu 11-13) 10
15. Definition: Abbildung (Funktion) 10
16. Begriffe im Zusammenhang mit Abbildungen 11
17. Gleichheitskriterium für Abbildungen 11
18. Injektivität, Surjektivität, Bijektivität 11
19. Definition einer Relation 11
Teil II: Analysis 12
1. Eigenschaften der reellen Zahlen 12
   1. Die Körpereigenschaften/Körperaxiome von R 12
   2. Erste Folgerungen aus den Körperaxiomen 12

3. Definition von Subtraktion und Division ... 12
4. Weitere Folgerungen aus den Körperaxiomen ... 12
5. Anordnungseigenschaften/Anordnungsaxiome von R ... 13
6. Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen ... 13
7. Definition: (Absolut-)Betrag einer reellen Zahl ... 13
8. Satz: Eigenschaften des Absolutbetrags ... 14
9. Definition: Maximum / Minimum ... 14
10. Definition: obere / untere Schranke ... 14
11. Definition: Infinum, Supremum ... 14
12. Eigenschaften der Ordnungsvollständigkeit … ... 14
13. Satz/Folgerung: Approximation (Näherung)… ... 15
14. Satz: Existenz von √2 ... 15
15. Satz: Archimedisches Axiom ... 15
16. Satz: Wohlordnungsprinzip ... 15
17. Satz: (WOP) ... 15
2. Vollständige Induktion, Potenzen, Wurzeln, Binomische Formel ... 15
1. Induktionssatz (Mengentheoretisches Induktionsprinzip) ... 15
2. Induktionsprinzip mit beliebigem Anfang (beliebige Menge) ... 16
3. Prinzip der Abschnittsinduktion ... 16
4. Definition: Potenzen ... 16
5. Rechenregeln für Potenzen ... 16
6. Bernoulische Ungleichung ... 16
7. Definition: Fakultät, Binomialkoeffizienten ... 16
8. Hilfssätze ... 17
9. Satz: Kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten ... 17
10. Satz: Binomische Formel ... 17
11. Folgerung aus der binomischen Formel ... 17
12. Satz: Dritte binomische Formel und geometrische Summenformel ... 18
13. Satz: p-te Wurzel ... 18
14. Satz: Rechenregeln für Wurzelausdrücke ... 18
15. Satz: Monotonie der Wurzelfunktion ... 18
16. Bemerkung zur Monotonie der Wurzelfunktion ... 18
17. Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel ... 18
3. Konvergenz ... 19
1. Definition: Folge ... 19
2. Definition: Grenzwert ... 19
3. Definition: Konvergenz/Divergenz einer Folge ... 19
4. Satz: Eindeutigkeit des Grenzwertes ... 19
5. Definition: Schranken ... 19
6. Satz: Konvergente Folgen in R ... 19

7. Satz: Multiplikation mit Nullfolgen ... 20
8. Vergleichssatz für Folgen ... 20
9. Einschnürungssatz für Folgen ... 20
10. Betragsfolgensatz ... 20
11. Grenzwertregeln für Folgen ... 20
12. Definition: Teilfolge ... 20
13. Satz: Konvergenz von Teilfolgen ... 20
14. Definition: Monotonie ... 21
15. Satz: Konvergenzkriterien für monotone Folgen ... 21
16. Definition: Die Eulersche Zahl e ... 21
17. Satz: Monotone Teilfolgen ... 21
18. Satz von Bolzano-Weierstraß ... 21
19. Definition: Cauchy-Folge ... 22
20. Konvergenzkriterium von Cauchy ... 22
21. Definition: Uneigentlicher Grenzwert ... 22
22. (Mikkos) Wunderformel ... 23
23. Grenzwertregeln für ∞ (uneigentliche Grenzwerte) ... 23
24. Satz: Grenzwert monotoner Folgen ... 23
4. Komplexe Zahlen, Komplexe Folgen, Komplexe Reihen ... 23
1. Definition: Komplexe Zahlen ... 23
2. Definition: Imaginäre Einheit ... 24
3. Definition: Realteil/Imaginärteil ... 24
4. Satz: Folgerung aus den Definitionen ... 24
5. Satz: Quadratwurzel ... 25
6. Definition: komplexe Wurzel ... 25
7. Definition: Grenzwert / Limes ... 26
8. Satz: Rechenregeln für komplexe Grenzwerte ... 26
Teil III: Lineare Algebra ... 27
1. Reelle & Komplexe Vektorräume ... 27
1. Definition: $\mathbb{K}$-Vektorraum ... 27
2. Erste Folgerung aus den Vektorraum-Axiomen ... 27
3. Die arithmetischen Standard-Vektorräume $\mathbb{R}^n$, allg. $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ... 28
4. Funktionsräume über $\mathbb{K}$ ... 29
5. Definition: Teilraum ... 29
6. Satz: Durchschnitt und Summe endlich vieler Teiler ... 30
7. Definition: Aufspann ... 30
8. Satz: Aufspann als Teilraum ... 30
9. Definition: Einheitsvektoren ... 30
10. Definition: Erzeugersystem ... 30
11. Definition: Lineare Unabhängigkeit ... 30

12. Definition: Rang 31
13. Definition: Elementare Umformungen 31
14. Rangerhaltung bei elementaren Umformungen 32
15. Satz zur linearen Abhängigkeit 32
16. ? 32
17. ? 32
18. ? 32
19. Definition: Basis 32
20. Charakterisierende Eigenschaften einer Basis 32
21. Basisauswahlsatz 32
22. Satz: Basis 32
23. Satz: Basis 33
24. Definition: Dimensionen 33
25. Satz: Basisergänzung 33
26. Bemerkung zu Dimension, Basis, Aufspann und linearer Abhängigkeit 33
27. Satz: Gleichheitskriterium für endlichdimensionale Teilräume 33
28. Satz: Dimensionsformel 33
29. Satz: Dimension eines Aufspanns 33
Index 34

Teil 0: Mathematische Sprache

1. Aussagen & ihre Verknüpfungen

Unter einer Aussage (im mathematischen Sinne) verstehen wir ein (grammatikalisch korrektes,) sprachliches Gebilde, welches einen Sachverhalt ausdrückt, der wahr (w) oder falsch (f) sein kann [ ].

1. Verknüpfung von Aussagen (Junktoren):

A, B seien Aussagen

Name	**Symbol**	**Bedeutung**	**Entstandene Aussage**
Negation	$\neg$	Nicht, non	$\neg$ A, nicht A
Konjunktion	$\wedge$	Und	A $\wedge$ B, A und B
Disjunktion	$\vee$	Oder	A $\vee$ B, A (und/)oder B
Implikation	$\Rightarrow$	Folgt; wenn, dann	A$\Rightarrow$B, wenn A, dann B
Äquivalenz	$\Leftrightarrow$	Äquivalent zu, genau dann wenn	A $\Leftrightarrow$ B, A äquivalent zu B, (= wenn A, dann B; wenn B, dann A)

2. Bemerkung zu Verknüpfungen

a) Die Implikation aus A $\Rightarrow$ B ist genau dann falsch, wenn die Voraussetzung A wahr und die Konklusion B falsch ist.
Die Implikation aus A $\Rightarrow$ B ist genau dann wahr, wenn die Voraussetzung A wahr und die Konklusion B wahr ist.

b) "A$\Leftrightarrow$B" ist gleichwertig zu „(A$\Rightarrow$B) und (B$\Rightarrow$A)"

c) Vorrangregeln
   i. Negation
   ii. Konjunktion
   iii. Disjunktion
   iv. Folgerung
   v. Äquivalenz

3. Satz: Gesetzmäßigkeiten

a) **Assoziativität** (beliebige Klammerung möglich)
   für $\wedge$: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
   für $\vee$: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

b) **Kommutativität** (Vertauschbarkeit der Aussagen)
   für $\wedge$: $A \wedge B = B \wedge A$
   für $\vee$: $A \vee B = B \vee A$

c) Distributivität
   $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

d) Regeln für Negation
   $\neg(\neg A) = A$ (doppelte Verneinung)
   $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge (\neg B)$ (Verneinung der Implikation)
   $| \neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ (Verneinung der Konjunktion)
   $| \neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ (Verneinung der Disjunktion)
   |→ De morgan´sche Regeln

4. Satz: Kontraposition

Seien A, B Aussagen. Dann gilt: Die Implikation „A$\Rightarrow$B" ist äquivalent zu ihrer sogenannten Kontraposition „($\neg$B) $\Rightarrow$ ($\neg$A)".

2. Aussageformen und Quantoren (Quantoren-Kalkül)

Unter einer Aussageform verstehen wir ein (sinnvolles, grammatikalisch korrektes) Gebilde, welches mindestens eine Variable enthält und durch Belegung aller vorkommenden Variablen mit zulässigen Werten stets in eine Aussage im Sinne von (1.) übergeht.

1. Spezialfall: Aussageform mit einer Variablen

Sei M eine Menge und x eine Variable für beliebige Elemente aus M. Dann verabredet man für eine Aussageform A(x) über M:

2. Allaussage: ∀ = Allquantor

$\forall\, x \in M: A(x)$ oder $\forall_{\in} x_M: A(x)$ (für alle x Element von M gilt Aussage A)

3. Existenzaussage: ∃ = Existenzquantor

$\exists\, x \in M: A(x)$ oder $\exists_{\in} x_M: A(x)$ (für mindestens ein Element der Menge M gilt die Aussage A)
$\exists^1\, x \in M: A(x)$ (für genau ein Element der Menge M gilt die Aussage A)

4. Negierung von Aussagen

1) Negation einer Allaussage
$\neg(\forall\, x \in M: A(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in M: \neg\, A(x)$ (es existiert ein $x \in M$ für das A nicht gilt)
1) Negation einer Existenzaussage
$\neg(\exists\, x \in M: A(x)) \Leftrightarrow \forall\, x \in M: \neg A(x)$ (für alle $x \in M$ gilt nicht A)

Warnung: Bei gleichzeitiger Anwendung verschiedener Quantoren (∀,∃) auf Aussageformen ist die Reihenfolge von Entscheidender Bedeutung:
$\exists_x\, \forall_y$: $A(x,y)$ (Absolute Existenzaussage, x unabhängig von y, dasselbe x für alle y)
$\forall_y \exists_x$: $A(x,y)$ (relative Existentaussage, x abhängig von y, x=x(y) zu jedem y kann es ein anderes x geben)

3. Beweismethoden

Satz: Sei … (Liste der Vorraussetzungen)
Dann gilt: $A \Rightarrow B$ (Mathematische Aussagen)

1. Direkter Beweis

Mit Hilfe der Voraussetzung und A erhält man durch logisches schließen B.

2. Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis)

Mit Hilfe der Vorraussetzungen und A und der Annahme ¬B wird durch logisches schließen ein Widerspruch erzeugt

3. Beweis durch Kontraposition

Mit Hilfe der Vorraussetzung und ¬B wird auf ¬A geschlossen. (vgl. Kontrapositionsprinzip)

Teil I: Mengen, Relationen, Abbildungen

Wichtige Zahlenmengen:

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
$\mathbb{N}_0$: Menge der natürlichen Zahlen mit Null
$\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen (Brüche ganzer Zahlen)
$\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen (Dezimalzahlen)
$\mathbb{C}$: Menge der komplexen Zahlen

1. Elementarbeziehung (€-Relation)

Ist a ein mathematisches Objekt und M eine Menge, so schreibt man

$a \in M$ *für a Element von M und* $a \notin M$ *für a NICHT Elemente von M*

2. Teilmengenbeziehung (Inklusion)

Sind A, B Mengen, so heißt A Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Man schreibt:

$A \subseteq B$ *für A ist Teilmenge von B und* $A \subseteq B$ *für A nicht Teilmenge von B*

Ist A eine Teilmenge von B und es gibt ein Element in B, welches kein Element von A ist, so heißt A eine **echte Teilmenge** von B, man schreibt

$A \subset B$ *bzw.* $A \subsetneq B$

3. Gleichheitsprinzip (Extensionalitätsprinzip)

Sind A, B Mengen, so schreiben wir

$A = B$ *für A ist gleich B und* $A \neq B$ *für A ungleich B*

Es gilt die Aussage A = B genau dann, wenn die beiden Aussagen $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ wahr sind. Zwei Mengen sind stets dann gleich, wenn sie beide die selben Elemente haben. Dies rechtfertigt die Bezeichnung $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ für die Mengen, deren Elemente genau die Objekte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sind.

4. Aussonderungsprinzip (Komprehensionsprinzip)

Ist A eine Menge und E eine Eigenschaft, so gibt es genau eine Menge, deren Elemente genau die

$x \in A$ sind, welche die Eigenschaft E besitzen. Diese Menge wird mit

$\{x \in A \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$

bezeichnet. Sie ist Teilmenge von A.

5. Definition: Leere Menge

Es gibt genau eine Menge, die gar keine Elemente enthält. Diese Menge heißt leere Menge.

Bezeichnung: $\emptyset := \{\ \}$

6. Definition: Vereinigungsmenge

Es seien A, B Mengen, dann gibt es die Vereinigungsmenge von A und B:

$A \cup B: \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

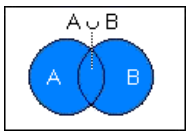
Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Mengen, dann gibt es die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}$:

$\bigcup \mathfrak{M} := \bigcup_{A \in \mathfrak{M}} A := \{x \mid \text{es existiert eine Menge } A \in \mathfrak{M}: x \in A\}$

Hinweis: Ein Element einer Vereinigungsmenge ist KEINE Teilmenge, da es nur ein Element ist.

Ist $n \in A$ und sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen, so setzt man:

$A1 \cup A2 \cup \ldots \cup An := \bigcup \{A1, A2, \ldots, An\}$



7. Definition: Schnittmenge

Es seien A, B Mengen. Dann gibt es die Schnittmenge von A und **B** (auch Durchschnitt):

$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

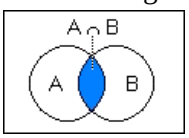
Gilt $A \cap B = \emptyset$, so heißen A, B **disjunkt**.

Sei $\mathfrak{M}$ eine nichtleere Menge von Mengen, dann gibt es die Schnittmenge von $\mathfrak{M}$:

$\bigcap \mathfrak{M} := \bigcap_{A \in \mathfrak{M}} A := \{x \mid \text{für alle } A \in \mathfrak{M}: x \in A\}$

Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $A_1, A_2, \ldots A_n$ Mengen, so setzt man

$A1 \cap A2 \cap \ldots \cap A3 := \bigcap \{A1, A2, \ldots, A3\}$



8. Definition: Differenzmenge

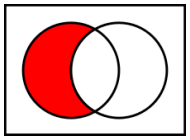
Seien A, B beliebige Mengen. Dann gibt es die Differenzmenge von A und B:

$A \setminus B: \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

Gilt $B \subseteq A$, so heißt $A \setminus B$ das Komplement von B in A.

Weiterhin gibt es die symmetrische Differenzmenge von A und B:

$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



9. Definition: Potenzmenge

Es sei A eine Menge. Dann gibt die Potenzmenge von A, die alle (a^n) Teilmengen von A enthält:

$Pot(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

10. Definition: Mächtigkeit

Eine Menge A heißt **endlich**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass A genau n Elemente hat. $\emptyset$ ist endlich.

Ist A eine endliche Menge, so bezeichnet man als Mächtigkeit (also Anzahl der Elemente) von A:

$|A|$ oder $//A$

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind **unendliche** Mengen (<u>nicht</u> genau n Elt), man bezeichnet ihre Mächtigkeit als:

$|A| = \infty$

11. Definition: Geordnete Paare

Für je zwei Objekte a,b (dabei ist auch a = b zulässig) gibt es das Objekt (Reihenfolge entscheidend):

(a,b)

Man nennt **es geordnetes Paar von a und b.**

12. Definition: Kartesisches Produkt

Seien A, B Mengen. Dann gibt es die Menge des kartesischen Produktes von A und B:

$A \times B \coloneqq \{ (a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$

13. Definition: n-Tupel, n-faches kartesisches Produkt

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein n-Tupel ist ein Objekt aus beliebigen Objekten (Mengen, Zahlen,…) der Form

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$

Die Objekte sind genau dann gleich, wenn $a_1=b_1, \dots, a_n=b_n$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ heißt a_i die i-te Komponente des Paares. Zwei Paare sind also genau dann gleich, wenn sie komponentenweise gleich sind.

Seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ beliebige Mengen. Dann gibt es die Menge des kartesischen Produktes:

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$

Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ heißt A_i der i-te Faktor von $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$.

14. Einschub (Ergänzung zu 11-13)

Brauchbare Realisierung des Paarbegriffs - Definition (Kuratowski):

Für alle Objekte a,b sei $(a,b) \coloneqq \{\{a\},\{a,b,\}\}$

→ Es gilt das gewünschte Gleichheitskriterium

<u>Satz:</u> Seien A, B Mengen. Dann gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$:

$(a,b) \coloneqq \{\{a\},\{a,b,\}\} \in Pot(Pot\ (A \cup B))$

<u>Bemerkung:</u> Bei der Bildung der Produktmenge $A \times B$ kann dann Pot (Pot $(A \cup B)$) als Rahmenmenge zugrunde gelegt werden.

15. Definition: Abbildung (Funktion)

1) <u>1. Definition:</u>

   Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung von X nach Y ist eine **„Vorschrift“ f** die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet.

2) <u>2.Definition</u>

   Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung von X nach Y ist eine **Teilmenge f** von dem kartesischen Produkt $X \times Y$, welche folgende Eigenschaft besitzt: Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ mit der Eigenschaft $(x, y) \in f$.

16. Begriffe im Zusammenhang mit Abbildungen

Seien X, Y Mengen. Für die Aussage „f ist eine Abbildung von X nach Y “ schreiben wir kurz

$f : X \to Y$

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so heißt für jedes $x \in X$ das eindeutig bestimmte Element $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ das Bild von x bei f oder der Funktionswert von f an der Stelle x; man bezeichnet diesen Wert y mit f(x).
X heißt der Definitionsbereich von f. Man bezeichnet ihn mit Def(f).
Y heißt (ein) Wertebereich von f.

Für $\forall A \subseteq X$ und $\forall B \subseteq Y$ heißt

$f(A) \coloneqq \{y \in Y \mid \exists x \in A: f(x) = y\}$	**Bildmenge von A bei f**
$f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) \in B\}$	**Urbildmenge von B bei f**
$\mathrm{Bild}(f) \coloneqq f(x)$	**Bildbereich von f**
$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Def}(x)\}$	**Funktionsgraph / Graph von f**

<u>Restriktion (Einschränkung) von f auf A:</u>

$$\forall A \subseteq X: \quad \left.\begin{matrix} f \mid A \\ f \mid A \end{matrix}\right\} \coloneqq f \cap A \times Y = f \cap A \times \mathrm{Bild}\,(f): \left\{\begin{matrix} A \to Y \\ A \to \mathrm{Bild}(f) \end{matrix}\right.$$

<u>Konkrete Angabe einer Abbildung von X nach Y:</u>

f: $X \to Y$, $X \to f(x)$ (wobei f(x) konkret angegeben wird)

17. Gleichheitskriterium für Abbildungen

Seien X_1, X_2, Y_1, Y_2 Mengen, $f_1: X_1 \to Y_1$ und $f_2: X_2 \to Y_2$, dann gilt:

$$f_1 = f_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Def}(f_1) = \mathrm{Def}(f_2) \quad \text{und} \quad (\forall x \in \mathrm{Def}(f_1): (\mathbb{N})\ f_1(x) = f_2(x)$$

18. Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Seien X,Y Mengen und f: $x \to Y$;
f heißt **injektiv,** wenn jedem x ein anderes y zugewiesen wird. Es gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in X: \qquad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

f heißt **surjektiv**, wenn jedes y einem beliebigen x zugewiesen ist. Es gilt:

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X: \quad f(x) = y$$

f heißt bijektiv (auf y), oder eine Bijektion, wenn sie injektiv und surjektiv (auf y) ist.

19. Definition einer Relation

Seien X,Y Mengen.
Jede Teilmenge R von X + Y wird eine Relation zwischen X und Y genannt.

Teil II: Analysis

1. Eigenschaften der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen. Auf $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen gegeben.
Addition („+“): $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow x + y$
Multiplikation („*“): $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \rightarrow x * y$

1. Die Körpereigenschaften/Körperaxiome von R

K1: Assoziativgesetz (bzgl +, *)
$\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$: $(x+y)+z = x+(y+z)$
$\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$: $(x*y)*z = x*(y*z)$

K2: Kommutativgesetz (bzgl +, *)
$\forall\ x,y \in \mathbb{R}$: $x+y = y+x$
$\forall\ x,y \in \mathbb{R}$: $x*y = y*x$

K3: Es gibt in $\mathbb{R}$ zwei verschiedene Elemente 0 und 1 mit folgenden Eigenschaften:
a. Existenz eines neutralen Elements der Addition (0) und Multiplikation (1)
$\forall\ x \in \mathbb{R}$: $x+0 = 0$
$\forall\ x \in \mathbb{R}$: $x*1 = x$
b. Existenz eines additiv inversen Elements
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \exists\ y \in \mathbb{R}$: $x+y = 0$
c. Existenz eines multiplikativ inversen Elements
$\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{o\}\ \exists\ y \in \mathbb{R} \setminus \{o\}$: $x*y = 1$

K4: Distributivgesetz
$\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$: $x(y+z) = x*y + x*z$

Die Aussagen K1 bis K4 heißen Körperaxiome. R=(R,+,*) wird Körper der reellen Zahlen genannt.

2. Erste Folgerungen aus den Körperaxiomen

a) Es gibt in $\mathbb{R}$ nur ein neutrales Element der Addition (0) und Multiplikation (1), das heißt also dass „0“ und „1“ eindeutig bestimmt sind.
b) Jedes $x \in \mathbb{R}$ besitzt nur ein additiv inverses Element, es wird mit $-x$ bezeichnet.
Jedes $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ besitzt nur ein multiplikativ inverses Element, es wird mit x^{-1} bezeichnet.

3. Definition von Subtraktion und Division

Subtraktion und Division als abgekürzte Schreibweisen von Addition/Multiplikation:
$\forall\ x,y \in \mathbb{R}$: $x-y \coloneqq x+(-y)$
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \forall\ y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $x/y \coloneqq x*y^{-1}$

4. Weitere Folgerungen aus den Körperaxiomen

Abkürzung: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
1) $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $-(-x) = x$
2) $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$: $(x^{-1})^{-1} = x$
3) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$: $x*(y-z) = (x*y) - (x*z)$
4) $\forall\ x,y \in \mathbb{R}$: $(-x)*y = -(xy) = x*(-y)$
5) $\forall\ x,y \in \mathbb{R}$: $(-x)*(-y) = x*y$
6) $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $(-1)*x = -x$
7) $\forall\ x,y \in \mathbb{R}$: $x*y = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ oder } y=0$
8) $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $x = x/1$
9) $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$: $x^{-1} = 1/x$

10) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}^*$: $x/y = (x*z) / (y*z)$
11) $\forall x,y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}^*$: $x/z + y/z = x+y / z$
12) $\forall x,x' \in \mathbb{R}\ \forall y,y' \in \mathbb{R}^*$: $x/y + x'/y' = (x*y' + y*x') / (y*y')$
13) $\forall x,x' \in \mathbb{R}\ \forall y,y' \in \mathbb{R}^*$: $x/y * x'/y' = (x*x') / (y*y')$
14) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}^*$: $-(x/y) = -x/y = x/-y$
15) $\forall x,y \in \mathbb{R}^*$: $(x/y)^{-1} = y/x$
16) $\forall a,v \in \mathbb{R}\ \exists^1 x \in \mathbb{R}$: $a+x = b$
17) $\forall a \in \mathbb{R}^*\ \forall b \in \mathbb{R}\ \exists^1 x \in \mathbb{R}$: $a*x = b$

Kleiner-Relation < auf $\mathbb{R}$
Reelle Zahlen lassen sich größenmäßig vergleichen. Auf $\mathbb{R}$ ist eine Kleiner-Relation erklärt: Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ schreibt man $x<y$ für x ist kleiner als y.

5. Anordnungseigenschaften/Anordnungsaxiome von R

AO 1) Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen: $x<y$, $x=y$, $y<x$ (Trichotomie)
AO 2) Für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x<y$ und $y<z$ folt $x<z$ (Transitivität)
AO 3) Für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x<z$ folgt $x+z < y+z$ (Monotonie der Addition)
AO 4) Für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x<y$ und $0<z$ folgt: $x*z < y*z$ (Monoto. der Multiplikation)

6. Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen

Seien $x,y,z,x',y',z' \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1) $x < 0 \Rightarrow -x > 0$
   $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
2) $x < y \wedge x' < y' \Rightarrow x+x' < y+y'$
3) $0 < y \wedge 0 < y' \Rightarrow 0 < y+y'$ Spezialfall für $x=0=x'$
   $0 < y \wedge 0 > y' \Rightarrow 0 < y*y'$
4) $x < y \Leftrightarrow x-y < 0$
   $x > y \Leftrightarrow 0 < y-x$
5) $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz > yz$
   $0 < y \wedge z < 0 \Rightarrow yz < 0$ Spezialfall für $x=0$
6) $x \neq 0 \Rightarrow x*x = x^2 > 0$
7) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$
   $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$
8) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

Bemerkung: Die vorangegangen Aussagen liefern diverser Merkregeln:

- Gleichsinnige Ungleichungen dürfen addiert werden
- Eine Ungleichung darf man mit positiven Zahlen multiplizieren; bei Multiplikation mit einer negativen Zahl kehrt sich ihre „Richtung“ um
- Ein Produkt (aus zwei Faktoren) ist genau dann positiv, wenn die Faktoren entweder beide positiv oder beide negativ sind.

7. Definition: (Absolut-)Betrag einer reellen Zahl

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei

$$|x| := \begin{cases} x, \text{ falls } x \geq 0 \\ -x, \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

8. Satz: Eigenschaften des Absolutbetrags

Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $|x| = |-x| \geq x, -x$
4) $|x*y| = |x| * |y|$ (Multiplikativität)
5) $y \neq 0 \Rightarrow |x/<| = |x|/|y|$
6) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (Δ-Ungleichung)
7) $|\,|x|-|y|\,| \leq |x-y|$

9. Definition: Maximum / Minimum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.
m heißt Maximum von M (oder größtes Element von M), wenn gilt:
m (letztes) $\in M$, also auch: $\forall x \in M: x \leq m$
m heißt Minimum von M (oder kleinstes Element von M), wenn gilt:
m (erstes) $\in M$, also auch: $\forall x \in M: x \geq m$
M hat höchstens ein Maximum (max M) und höchstens ein Minimum (min M).

10. Definition: obere / untere Schranke

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$.
M heißt nach oben beschränkt, wenn sie eine obere Schranke besitzt.
s heißt obere Schranke von M, wenn gilt:
$\forall x \in M: x \leq s$
M heißt nach unten beschränkt, wenn sie eine untere Schranke besitzt.
s heißt untere Schranke von M, wenn gilt:
$\forall x \in M: x \geq s$
M heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach unten, als auch nach oben beschränkt ist.
s kann, muss aber nicht $\in$ M sein.

11. Definition: Infinum, Supremum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt:
$OS(M) := \{s \in \mathbb{R} \mid s \text{ ist eine obere Schranke von } M\}$
$US(M) := \{s \in \mathbb{R} \mid s \text{ ist eine untere Schranke von } M\}$
Supremum von M: $\sup M := \min OS(M)$ (falls es existiert - kleinste obere Schranke)
Infinum von M: $\inf M := \max US(M)$ (falls es existiert – größte untere Schranke)

<u>Bemerkung:</u> Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt:

a) Hat M ein Maximum, dann hat M auch ein Supremum und es gilt: $\sup M = \max M$
b) Hat M ein Minimum, dann hat M auch ein Infinum und es gilt: $\inf M = \min M$
<u>Aber:</u> Supremum/Infinum bzw. obere/untere Schranke <u>heißt nicht</u>, dass es ein Maximum gibt.
<u>Bsp:</u> $X := \{x|x < 5\} \rightarrow OS(X) := \{x|x \geq 5\} \rightarrow \sup X = 5 \rightarrow$ Maximum $\approx 4{,}9 \rightarrow$ nicht genau bestimmt

12. Eigenschaften der Ordnungsvollständigkeit …

1) <u>… von R als Supremumsprinzip</u>
OV(SP): Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum
2) <u>… von R als Infinumsprinzip</u>
OV(IP): Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infinum
<u>Anmerkung:</u> Supremum/Infinum $\Rightarrow$ Obere Schranke, aber

13. Satz/Folgerung: Approximation (Näherung)…

1) … des Supremums: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $s \in OS(M)$, dann gilt:

$s = \sup M \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists x \in M: s - \epsilon < x$

Anmerkung: Sobald von s irgend etwas abgezogen wird ist es kleiner als ein Element der Menge.

2) … des Infinums: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $s \in US(M)$, dann gilt:

$s = \inf M \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists x \in M: x < s + \epsilon$

14. Satz: Existenz von √2

Es gibt ein x_0 mit $x_0 > 0$ und $x_0^2 = 2$

$y0 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis für Eindeutigkeit:

Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0, y_0 > 0$ und $x_0^2 = 2 = y_0^2$

Dann gilt $x_0 + y_0 > 0$, also $x_0 + y_0 \neq 0$ und

$x_0 - y_0 = (x_0^2 - y_0^2) / (x_0 + y_0) = 0$ also $x_0 = y_0$

15. Satz: Archimedisches Axiom

1) Satz von Archimedes

$OS(\mathbb{N}) = \emptyset$ d.h.: $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt, d.h. AA:

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: x < n$

2) Satz von Eudoxos

Umformulierung von 1.

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n \in \mathbb{N}: 1/n < x$

16. Satz: Wohlordnungsprinzip

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von Z besitzt in Minimum.

17. Satz: (WOP)

Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt

a) Es gibt ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$ → $\mathbb{Q}$ liegt „dicht“ in $\mathbb{R}$

b) Es gibt auch ein $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit $a < x < b$ → $\mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Q}\}$ liegt „dicht“ in $\mathbb{R}$

2. Vollständige Induktion, Potenzen, Wurzeln, Binomische Formel

1. Induktionssatz (Mengentheoretisches Induktionsprinzip)

Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

Ind.1) $1 \in M$

Ind.2) $\forall n \in \mathbb{N}: n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

Dann gilt: $M = N$

1) Induktionsprinzip:

Sei A(n) eine Aussageform über $\mathbb{N}$. Es gelte:

IA) A(1) ist wahr

IS) $\forall n \in \mathbb{N}$: A(n) ist wahr ⇒ A(n+1) ist wahr

Dann gilt A(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$

2) Schema des Induktionsprinzips (vollständige Induktion)

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt A(n) → Beweis durch vollständige Induktion
IV: Induktionsvoraussetzung – Es gelte A(n)
IA: Induktionsanfang – Man beweist die Gültigkeit von A(1) (konkretes n)
IS: Induktionsschritt – Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte A(n) → IV
Jetzt leitet man mit A(n) doie Gültigkeit von A(n+1) her

2. Induktionsprinzip mit beliebigem Anfang (beliebige Menge)

Sei $m \in \mathbb{Z}$ und A(m) eine Aussageform über die Menge $\mathbb{R} > m := \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq m\}$
IA: A(m) ⇒ A(m+1) gelte.
IS: $\forall\, n \in \mathbb{Z} \geq m$
Dann gilt {A(m)} für jedes $n \in \mathbb{R}_{\geq m}$
Anmerkung: Es wird eine eigene Menge aus $\mathbb{Z}$ mit anderem Anfang als 1 $\in \mathbb{N}$ definiert

3. Prinzip der Abschnittsinduktion

Sei A(n) eine Aussageform über $\mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte:
$\forall\, j \in \mathbb{N}_{<n} := \{j \in \mathbb{N} \mid k < n\}$: A(j) ⇒ A(n)
Dann gilt A(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$
Anmerkung: Es wird eine eigene, nach oben begrenzte Menge aus $\mathbb{N}$ gebildet

4. Definition: Potenzen

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir:

$a^n := a*a*a * \ldots * a$ mit n Faktoren,
$a^0 = 1$
$a^{-n} = (a^{-1})^n$ für $a \neq 0$

Damit sind alle Potenzen a^n für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$ definiert.
Induktives Definitionsverfahren für die natürlichen Potenzen von $a \in \mathbb{R}$:sog. Rekursive Definition

$$\left.\begin{array}{l} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n * a \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} a^{n+1} := a^n * a \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

5. Rechenregeln für Potenzen

Seien $a,b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $n,m \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $(ab)^n = a^n * b^n$; $(a/b)^n = a^n/b^n$
b) $(a^n)^m = a^{nm}$
c) $a^n * a^m = a^{n+m}$

6. Bernoulische Ungleichung

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq x$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$1 + nx \leq (1+x)^n$

7. Definition: Fakultät, Binomialkoeffizienten

a) 0! = 1
b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $n! = 1*2*3*\ldots*n = {}_{i=1}\Pi^n\, i$ „n Fakultät“
c) $\binom{n}{k} := n! / (k!(n-k)!)$ „n über k“ → Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient ist eine statistische Größe, die angibt auf wie viele Arten man k Objekte aus einer Menge von n Objekten auswählen kann. Gelesen „n über k“ oder „k aus n“

8. Hilfssätze

Für alle n,k ∈ ℕ mit k ≤ n gilt:

1) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$
2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3) $\binom{n}{k-1} \neq \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ [falls $k \geq 1$] → Rekursionsformel
4) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$
5) $\binom{n}{k} = (n(n-1) \ldots (n-k+1)) / (1*2*\ldots*k) = \prod_{k=1}^{k} (n-i+1) / i$

9. Satz: Kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten

Anschauliche Darstellung der Rekursionsformel (PASCALsches Dreieck):

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Bemerkung: Kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten:

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Dann gilt: Jede n-elementige Menge besitzt genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmenegn, also

$$\left|\{T \in \mathrm{Pot}(\{1,2,\ldots,n\}) \mid |T| = k\}\right| = \binom{n}{k}.$$

<u>Anmerkung:</u> Aufbau der Pyramide / Anwendung auf Binomische Formel

Zeilen-nummer:	Pascalsches Dreieck	Binomische Formeln:
0	1	$(a+b)^0 = 1$
1	1 1	$(a+b)^1 = a+b$
2	1 2 1	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
3	1 3 3 1	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
4	1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
5	**1 5 10 10 5 1**	$(a+b)^5 = \mathbf{1}a^5+\mathbf{5}a^4b+\mathbf{10}a^3b^2+\mathbf{10}a^2b^3+\mathbf{5}ab^4+\mathbf{1}b^5$

Zeilennummer = Rang = höchster Exponent

10. Satz: Binomische Formel

Seien a,b ∈ ℝ.

$\forall\, n \in \mathbb{N}: (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

11. Folgerung aus der binomischen Formel

$\forall\, n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$

12. <u>Satz: Dritte binomische Formel und geometrische Summenformel</u>

Seien $a,b \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

a) $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}$, (dritte binomische Formel)

b) $1^n - b^n = (1-b)(b^0 + b^1 + b^2 + \ldots + b^{n-1})$,

c) $(b^0 + b^1 + b^2 + \ldots + b^{n-1}) = (1-b^n) / (1-b)$, falls $b \neq 1$ (geometrische Summenformel)

13. <u>Satz: p-te Wurzel</u>

Sei $p \in \mathbb{N}$. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt

$\exists\, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}: s^p = a$

Die Zahl s heißt p-te Wurzel aus a und wird mit $\sqrt[p]{a}$ bezeichnet.

<u>Bemerkung:</u> Für alle $p \in \mathbb{N}$ haben wir also die Wurzelfunktion

$\sqrt[p]{\ }: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}: x \to \sqrt[p]{x}$

Außerdem: $\forall\, p \in \mathbb{N}$: $\sqrt[p]{0} = 0$ und $\sqrt[p]{1} = 1$

$\forall\, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $\sqrt[1]{x} = x$ also $\sqrt[1]{\ } = id_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$

14. <u>Satz: Rechenregeln für Wurzelausdrücke</u>

Seien $p,q \in \mathbb{N}$ und $a,b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt:

a) $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b}$,

b) $\sqrt[p]{(a^q)} = (\sqrt[p]{a})^q$,

c) $\sqrt[p]{(a/b)} = (\sqrt[p]{a}) / (\sqrt[p]{b})$ falls $b \neq 0$

15. <u>Satz: Monotonie der Wurzelfunktion</u>

Sei $p \in \mathbb{N}$. Seien $a,b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt:

a) $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt[p]{a} \leq \sqrt[p]{b}$,

b) $a < b \Leftrightarrow \sqrt[p]{a} < \sqrt[p]{b}$

16. <u>Bemerkung zur Monotonie der Wurzelfunktion</u>

$\forall\, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}\ \forall\, p \in \mathbb{N}$: $a < 1 \Rightarrow \sqrt[p]{a} < 1$, $a > 1 \Rightarrow \sqrt[p]{a} > 1$

17. <u>Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Dann heißt $\sqrt[n]{(a_1 * a_2 * a_3 * \ldots * a_n)}$ das geometrische Mittel von $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

und $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) / n$ das arithmetische Mittel von $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Es gilt: $\sqrt[n]{(a_1 * a_2 * a_3 * \ldots * a_n)} \leq (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) / n$

3. Konvergenz

1. Definition: Folge

Sei X eine beliebige Menge. Jede Abbildung a: $\mathbb{N} \to X$ heißt Folge in X.
Schreibweise: Ist a eine Folge in X, so setzt man:

$\forall\, n \in \mathbb{N}: a_n \coloneqq a(n)$

Man bezeichnet die Folge a dann auch mit:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n) oder $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

Manchmal wird die Verallgemeinerung des Folgebegriffs aus II.3.1 benötigt:

Sei $m \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_{\geq m} \coloneqq \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq m\}$. Dann gilt
$a: \mathbb{Z}_{\geq m} \to x$

2. Definition: Grenzwert

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. α heißt **Grenzwert** oder **Limes** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$ gilt:

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$

Anmerkung: d.h. Betrag aus beliebigem Folgeglied – Grenzwert ist = 0

Wir sagen dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen α und schreiben dafür

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha.$

In Kurzschreibweise:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha \;\Leftrightarrow\; \forall\, \epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}\;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\;\; \forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: |a_n - \alpha| < \epsilon$

Alternative Beschreibung:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha \;\Leftrightarrow\; \forall\, \epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}\;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots,\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha-\epsilon < x < \alpha+\epsilon\}$

Gilt $\alpha = 0$, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

3. Definition: Konvergenz/Divergenz einer Folge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert besitzt.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent ist.

4. Satz: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(a_n) \to \alpha$ und $(a_n) \to \beta$. Dann gilt $\alpha = \beta$.
Bemerkung: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, so besitzt (a_n) genau einen Grenzwert.
Übliche Bezeichnungen für den Grenzwert sind

$\lim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.$

5. Definition: Schranken

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben/unten beschränkt, wenn die Menge (der Komponenten von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) $\{a_n \mid n \in N\}$ nach oben/unten beschränkt ist.
(a_n) heißt beschränkt, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben und nach unten beschränkt ist.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\;\Leftrightarrow\; \exists\, c \in \mathbb{R}\;\; \forall\, n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq c$

6. Satz: Konvergente Folgen in R

Jede konvergente Folge (in $\mathbb{R}$) ist beschränkt.

7. Satz: Multiplikation mit Nullfolgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann gilt:

$$(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$

8. Vergleichssatz für Folgen

Es seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n0}$.Es gilt:

$$\lim(a_n) \leq \lim(b_n).$$

Folgerung:

Seien $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \leq d$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $c \leq n \leq d$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n0}$. Dann gilt

$$c \leq \lim\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq d.$$

9. Einschnürungssatz für Folgen

Es seien $n_0 \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen in R mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n0}$. Sei ferner $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha$. Dann gilt

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha.$$

10. Betragsfolgensatz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist auch die $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt: $\mathrm{Lim}(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}} = |(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|$.

11. Grenzwertregeln für Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Sei $\alpha := \lim(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\beta := \lim(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha + \beta$,
b) $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha \cdot \beta$,
c) $(c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to c \cdot \alpha$.

Ist $\beta \neq 0$, so existiert ein $p \in \mathbb{N}_0$ mit $b_p + n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann

$$((a_p+n) / (b_p+n))_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha / \beta$$

12. Definition: Teilfolge

Sei X eine Menge und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Ist dann $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $k_n < k_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiele:

a) $k_n := 2n \Rightarrow (a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots)$
b) $k_n := n + 7 \Rightarrow (a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} = (a_n+7)_{n\in\mathbb{N}} = (a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \ldots)$
c) $k_n := 3n \Rightarrow (a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{3n})_{n\in\mathbb{N}} = (a_3, a_9, a_{27}, \ldots)$

13. Satz: Konvergenz von Teilfolgen

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ und $\alpha := \lim(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt:
Auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen α.

14. Definition: Monotonie

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in R.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konstant $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n = a_n+1$,
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton steigend $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_n+1$,
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt streng monoton steigend $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_n+1$,
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton fallend $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_n+1$,
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt streng monoton fallend $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n > a_n+1$,
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton $:\Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend / fallend,
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt streng monoton $:\Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend / fallend.

Bemerkungen:

a) Konstante Folgen sind monoton wachsend und monoton fallend
b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt
   a. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton
   b. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend $\Rightarrow (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend
   c. Die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend,
      Die Folge $(1- 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend

15. Satz: Konvergenzkriterien für monotone Folgen

a. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:
   $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent
b. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:
   $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent

16. Definition: Die Eulersche Zahl e

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := (1 + 1/n)^n$, $b_n := (1 + 1/n)^{n+1}$
Man betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt dann:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend,
b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend,
c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und es gilt:
   $\lim(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Man definiert dann als **EULERsche Zahl e** $:= \lim ((1 + 1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Ergänzung:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 2 \leq (1 + 1/n)^n \leq e \leq (1 + 1/n)^{n+1} \leq 4$$

Folglich sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Beide Folgen sind monoton. Nach (II.3.15) konvergieren also beide Folgen.

Bemerkung:
e = 2, 718281828459045 . . .

17. Satz: Monotone Teilfolgen

Jede Folge in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge.

18. Satz von Bolzano-Weierstraß

1) Satz

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Teilfolge in $\mathbb{R}$. Nach (3.17) hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge. Diese ist natürlich auch beschränkt. Sie konvergiert nach (3.15).

2) Rekursive Folgendefinition

Sei X eine Menge. Sei $k \in \mathbb{N}$.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, ...)$ in X lässt sich auch folgendermaßen definieren:

a) Die ersten k Folgenglieder $a_1, a_2, a_3, ... , a_k$ werden explizit angegeben.
b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ wird das Folgenglied a_{n+1} mit Hilfe der bereits definierten Folgenglieder $a_1, a_2, a_3, ... , a_n$ angegeben.

Beispiel:
$a_1 := 1$
$a_{n+1} := \sqrt{(1+a_n)}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
Also: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{(1+\sqrt{2})}, \dots)$

Bekannte rekursive Zahlenfolge: Fibonacci

19. Definition: Cauchy-Folge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}: \ |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Bemerkung:
Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Cauchy-Folge und jede Cauchy-Folge ist konvergent.

20. Konvergenzkriterium von Cauchy

1) Kriterium:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent} \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge.}$$

2) Bemerkung 1:

Die divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sum_{i=1}^{n} 1/i$$

heißt für alle $n \in N$ **harmonische Reihe**. Sie ist streng monoton steigend, also nach (3.15) nicht (nach oben) beschränkt.

3) Bemerkung 2 (erweiterte Reelle-Achse):

Zur Bildung von Grenzwerten ist es zweckmäßig, $\mathbb{R}$ um zwei Elemente (∞ und $-\infty$) zur Menge $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ erweitern. Dabei setzt man

a) $-\infty < \infty$
b) $\forall\, x \in \mathbb{R}: -\infty < x < \infty$

21. Definition: Uneigentlicher Grenzwert

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.
Man sagt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *uneigentlich* gegen $+\infty$ und schreibt dafür $(a_n) \to \infty$ wenn gilt:

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n0}: c \leq a_n,$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty$ und schreibt dafür $(a_n) \to -\infty$ wenn gilt:

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq n0}: c \geq a_n.$$

Gilt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$, so nennt man ∞ auch uneigentlichen Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreibt:

$$\lim(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Entsprechendes gilt für $-\infty$.

Beispiele:
$(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, ...) \to +\infty$
$(-2n)_{n\in\mathbb{N}} = (-2, -4, -8, -16, ...) \to -\infty$

22. <u>(Mikkos) Wunderformel</u>

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$; es gelte $(a_{n+1}/a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha$
Dann gilt auch $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha$

23. <u>Grenzwertregeln für ∞ (uneigentliche Grenzwerte)</u>

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in R. Seien $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Dann gilt:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty \Rightarrow \quad \{ (c * a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$ falls $c > 0$,
$\{ (c * a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to -\infty$ falls $c < 0$,
b) $(a_n \neq 0)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty \Rightarrow (1/a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$,
$(a_n \neq 0)_{n\in\mathbb{N}} \to -\infty \Rightarrow (1/a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$,
c) $(a_n > 0)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Rightarrow (1/a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$,
$(a_n < 0)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Rightarrow (1/a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to -\infty$,
d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ }
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to ß$ } $\Rightarrow (a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$
e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ }
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to ß > 0$ } $\Rightarrow (a_n * b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$

24. <u>Satz: Grenzwert monotoner Folgen</u>

Jede monotone Folge in $\mathbb{R}$ besitzt ein Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$.

4. Komplexe Zahlen, Komplexe Folgen, Komplexe Reihen

Man betrachte die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir führen auf $\mathbb{C}$ zwei Verknüpfungen, eine Addition + und eine Multiplikation * wie folgt ein: Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ sei:

a) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1+_1, x_2+y_2)$
b) $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) := (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. (siehe II.4.3)

1. <u>Definition: Komplexe Zahlen</u>

$\mathbb{C}$ erfüllt bezüglich Addition/Multiplikation alle Körperaxiome K1, K2, K3, K4 aus (II.1.1).
Für jedes $(x_1, x_2) \in C$ ist

a) $(0, 0)$ das neutrale Element der Addition,
b) $(1, 0)$ das neutrale Element der Multiplikation,
c) $(-x_1, -x_2)$ das additiv inverse Element.

Für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ ist

d) $((x_1/x_1^2+x_2^2) , (-x_2/x_1^2+x_2^2))$ das multiplikativ inverse Element.

Man bezeichnet $\mathbb{C}$ als Körper der komplexen Zahlen, und $\forall \in \mathbb{C}$ als komplexe Zahlen.

<u>Bemerkung:</u> Nach unserer Definition sind komplexe Zahlen nicht anders Paare reeller Zahlen.
Subtraktion & Division von komplexen Zahlen werden entsprechend II.1.3 def.
Alle bekannten, für $\mathbb{R}$ gültigen Rechenregeln gelten auch für $\mathbb{C}$. Man betrachte:

$\mathbb{R}' := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq C$.

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

a) $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$
b) $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$

Dies lehrt: $\mathbb{R}'$ ist ein „Teilkörper“ von $\mathbb{C}$ der zu $\mathbb{R}$ „isomorph“1 ist.
Jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die komplexe Zahl $(x, 0) \in \mathbb{C}$ zugeordnet und umgekehrt ist jedem $(y, 0) \in \mathbb{C}$ eine reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet.
Es ist üblich für jedes $x \in \mathbb{R}$ die komplexe Zahl $(x, 0) \in \mathbb{C}$ mit der reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ zu „identifizieren“.
Das bedeutet praktisch: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ wird an Stelle von $(x, 0)$ einfach x geschrieben.
Man erhält so $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

2. Definition: Imaginäre Einheit

Man setze

$i := (0, 1).$

Diese komplexe Zahl heißt imaginäre Einheit. Es gilt

$i^2 = -1.$

Beweis - Es gilt

$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$

3. Definition: Realteil/Imaginärteil

Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gibt es genau ein Paar reeller Zahlen $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$z = (x, y) = x + yi.$

Das Element **x** heißt der Realteil von z und wird mit **Re(z)** bezeichnet.
Das Element **y** heißt der Imaginärteil von z und wird mit **Im(z)** bezeichnet.

Ferner heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl:

$z := x - yi$

und der Betrag von z:

$|z| := (\sqrt{(x2 + y2)}) \in \mathbb{R}$

Beweis:

Sei $z \in \mathbb{C}$. Offensichtlich gibt es genau ein Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $z = (x, y)$. Weiter gilt:

$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$

Bemerkung:

Die Definition von $|z|$ in (4.3) ist verträglich mit der Betragsdefinition (1.7) für reelle Zahlen.
Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt *(nach ausmultiplizieren und verwenden von $i^2=-1$)*:

$(x_1 + x_2i) + (y_1 + y_2i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i,$

$(x_1 + x_2i) \cdot (y_1 + y_2i) = (x_1y_1 - x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$

Herleitung:

$(x_1 + x_2i) \cdot (y_1 + y_2i) = x_1y_1 + x_1y_2i + x_2iy_1 + x_2y_2i^2 = (x_1y_1 + x_2y_2i^2) + (x_1y_2i + x_2iy_1)$

$(i^2 = -1 \Rightarrow) \quad = (x_1y_1 - x_2y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

4. Satz: Folgerung aus den Definitionen

Für alle $z,w \in \mathbb{C}$ gilt:

1) $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i$

   $\mathrm{Re}(z) = ½ \ (z + \bar{z})$

   $\mathrm{Im}(z) = ½i \ (z - \bar{z})$

2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w},$

3) $z^*\bar{z} = |z|^2, \ |z| = |\bar{z}|,$

4) $|z| \geq 0,$

   $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$

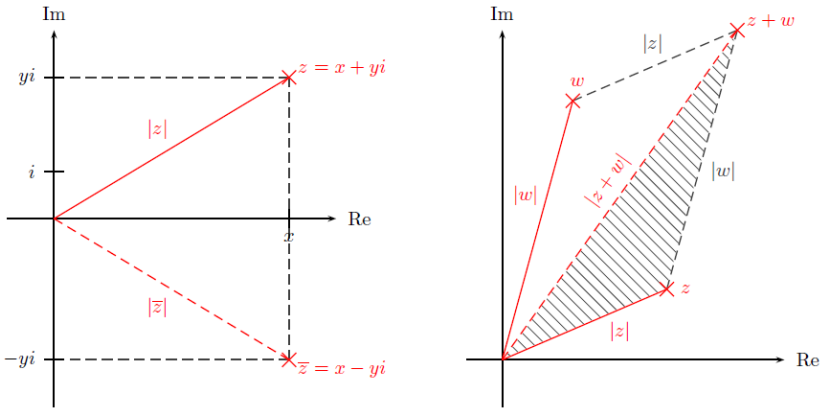
5) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|,$

6) $|z \cdot w| = |z||w|,$

7) $|z + w| \leq |z| + |w|.$ (Δ-Ungleichung)

Geometrische Veranschaulichung von $\mathbb{C}$

Wie $\mathbb{R}$ durch die Zahlengrade, wird $\mathbb{C}$ durch die Ebene (Gausssche Zahlenebene) veranschaulicht:



Betrag von z und konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ — Dreiecksungleichung

|z|: (Euklidischer) Abstand des Punktes z vom Nullpunkt 0.

z: Bild von z bei der Spiegelung an der reellen Achse

5. Satz: Quadratwurzel

Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$. Ist $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so gilt dies bereits nach (II.2.13). Ist $z \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist $|z| > \mathrm{Re}(z)$ und es gilt $w^2 = z$ für

$$w := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\sqrt{|z| - \mathrm{Re}(z)}} + i\sqrt{|z| - \mathrm{Re}(z)}\right).$$

6. Definition: komplexe Wurzel

Für alle $z \in \mathbb{C}$ setzen wir:

$$\sqrt{z} := \begin{cases} \sqrt{z} & \text{falls } z \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{Im}\, z}{\sqrt{|z| - \mathrm{Re}\, z}} + i\sqrt{|z| - \mathrm{Re}\, z}\right) & \text{falls } z \notin \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{cases}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt dann:

$$\{x \in \mathbb{C} \mid w^2 = z\} = \{\sqrt{z}, -\sqrt{z}\}.$$

Bemerkung:

Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\mathrm{Im}\sqrt{z} > 0.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}_{<0}$ gilt

$$\sqrt{x} = i\sqrt{|x|}.$$

Insbesondere gilt

$$\sqrt{(-1)} = i\sqrt{1} = i.$$!!!

Es gibt $z,w \in \mathbb{C}$ mit:

$$\sqrt{(zw)} \neq \sqrt{z}\sqrt{w}.$$

Beispiel: Sei z = -1 und w = -1. Dann gilt:

$1 = \sqrt{((-1)(-1))} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = i^2 = -1.$

Quadratische Gleichung / p-q-Formel

Seien $p,q \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\{w \in \mathbb{C} \mid w^2 + pw + q = 0\} = \{-p/2 \pm \sqrt{((p/q)^2 - q)}\}$$

Anmerkung zum Beweis:

Die Behauptung folgt aus $(w-w_1)(w-w_2) = w^2 + pw + q = 0$.

Vorgehensweise:

1) ggf. quadratische Gleichung auf Normalform bringen: pq-Formel
2) $\sqrt{}$ - Formel auf die Diskriminanten anwenden.

7. Definition: Grenzwert / Limes

Vgl II.3.2 *(ζ = [„Zeta“])*

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. ζ heißt ein Grenzwert oder Limes von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn gilt:

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}_{\geq n0} : |z_n - \zeta| < \varepsilon.$$

Ist ζ ein Grenzwert von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so sagen wir auch $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ζ und schreiben:

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \zeta \qquad \text{oder} \quad \lim(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \zeta \qquad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = \zeta.$$

8. Satz: Rechenregeln für komplexe Grenzwerte

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$. Sei (zn)n∈N eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \zeta$,
2) $(z_n - \zeta)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$,
3) $(|z_n - \zeta|)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$,
4) $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \to \mathrm{Re}(\zeta)$,
   $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \to \mathrm{Im}(\zeta)$,
5) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \zeta$.

***Kurz**: Grenzwert hat ebenfalls Re / Im*

Dieser Satz lehrt:
Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ ist genau dann konvergent, wenn die reellen Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. Ist dies der Fall, so gilt:

$$\lim(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}} + i\ \lim(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Beispiel:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$z_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right) + i\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Es gilt nach (4.8)

$$(z_n) \to 1 + ie.$$

Bemerkung:
Es ist nicht möglich, auf $\mathbb{C}$ eine Anordnungsrelation < so einzuführen, da die Anordnungsaxiome AO1(Trichotomie), AO2 (Transitivität), AO3, AO4 (Monotonie) aus II.1.5 gelten.

Mit Ausnahme der Sätze II. -3.8/3.9/3.15/3.17 (Vergleichssatz, Einschnürungssatz, monot. Folgen) welche die Anordnung auf $\mathbb{R}$ benutzen, gelten alle Sätze über die Konvergenz reeller Zahlenfolgen auch für komplexe Zahlenfolgen, ua. Gilt auch Cauchy`s Konvergenzkriterium.

Teil III: Lineare Algebra

1. Reelle & Komplexe Vektorräume

Allgemeiner: VRe über Körpern, $\mathbb{K}$-VRe
GV (Grundvoraussetzung): Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen Zahlen oder der Körper der komplexen Zahlen.

1. Definition: $\mathbb{K}$-Vektorraum

Sei V eine beliebige Menge. Sei + eine „Addition“ für Elemente aus V:
$V \times V \to V$
Sei * eine „Multiplikation“ für Elemente aus $\mathbb{K}$ mit Elementen aus V (Skalarmultiplikation):
$\mathbb{K} \times V \to V$
Dann heißt der Tripel V = (v,+,*) ein $\mathbb{K}$ Vektorraum oder Vektorraum über $\mathbb{K}$, wenn die folgenden Bedingungen (V$\mathbb{R}$ -Axiome) erfüllt sind.

VR 1: Rechenregeln für die Vektoraddition
1) $\forall\, u,v,w \in V$: $(u+v) + w = u+(v+w)$ (Assoziativgesetz)
2) $\forall\, u,v, \in V$: $u+v = v+u$ (Kommutativgesetz)
3) Es existiert ein Element $(0,0,0)=\odot \in V$ derart, dass gilt:
   a) $\forall\, v \in V$: $v+\odot = v$ (neutrales Element)
   b) $\forall\, v \in V\ \exists\, w \in V$: $v+w = \odot$ (additiv inverses Element)

VR 2: Rechenregeln für die Skalarmultiplikation
1) $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall\, v \in V$: $\lambda(\mu*v) = (\lambda\mu)*v$ (AG)
2) $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall\, v \in V$: $(\lambda+\mu)*v = \lambda v + \mu v$ (Distributivgesetz)
3) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}\ \forall\, u,v \in V$: $\lambda(u+\mu)*v = \lambda u + \lambda v$ (DG)
4) $\forall\, v \in V$: $1_{\mathbb{K}}*v = v$ (Unitarität)

Bemerkung:
Ist V ein $\mathbb{K}$-VR, so zeigt man:
Es gibt in V nur ein neutrales Element 0 der Addition, d.h. 0 ist eindeutig bestimmt.
Um Missverständnisse zu vermeiden, schreiben wir auch $\odot=\odot_v$ für das neutrale Element der Addition in $\mathbb{K}$.

Jedes $v \in V$ besitzt nur ein additiv inverses Element, es wird mit –v bezeichnet.
Für alle $u,v \in V$ definiert man:
$u-v \coloneqq u+(-v)$
Die Elemente aus V heißen Vektoren, insbesondere heißt $\odot=\odot_v$ der Nullvektor von V.

Im Rahmen der VR-Theorie werden die Elemente aus $\mathbb{K}$ auch Skalare genannt.

V: reeller Vektorraum, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
V: komplexer Vektorraum, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2. Erste Folgerung aus den Vektorraum-Axiomen

Sei V = (V,+,*) ein $\mathbb{K}$-VR. Dann gilt:
1) $\forall\, v \in V$: $0_{\mathbb{K}}*v = \odot_v$
2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda * \odot_v = \odot_v$
3) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}\ \forall\, v \in V$: $\lambda*v = \odot_v \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ oder $v = \odot_v$
4) $\forall\, v \in V$: $(-1)*v = -v$
5) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}\ \forall\, v \in V$: $(-\lambda)*v = -(\lambda*v) = \lambda*(-v)$

3. Die arithmetischen Standard-Vektorräume $\mathbb{R}^n$, allg. $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

1) Satz: Kartesisches Produkt

Sei $n \in \mathbb{N}$. Man betrachte das n-fache kartesische Produkt

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K} = \{(x_1,\ldots,x_n) | x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{K}\}$$

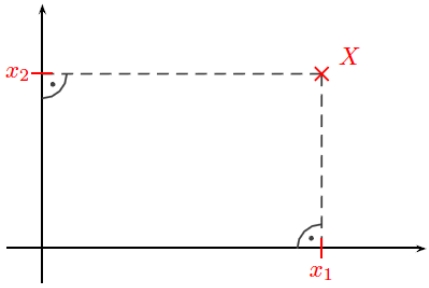
Und definiere die Verknüpfungen „Vektoraddition“ und „Skalarmultiplikation“ wie folgt:

$$\forall\ (x_1,\ldots,x_n), (y_1,\ldots y_n) \in \mathbb{K}^n\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}: \quad (x_1,\ldots,x_n) * (y_1,\ldots y_n) := (x_1 + y_1 \ldots, x_n + y_n);$$
$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) := (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

Dann gilt: $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^n, +, *)$ ist ein $\mathbb{K}$-VR ($n :=$ Dimensionsfaktor).

2) Geometrische Deutung des $\mathbb{R}^2$

Sei $\mathfrak{E}$ eine euklidische Ebene (z.B. die Schreibebene) mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem.



Dann ist die Abbildung

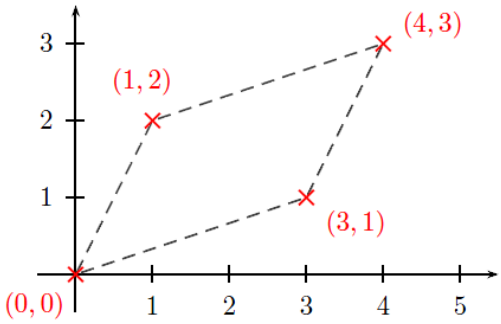
$$X \mapsto (x_1, x_2)$$

die jedem Punkt X von $\mathfrak{E}$ das 2-Tupel (x_1, x_2) seiner Koordinaten zuordnet, eine Bijektion *von* der Menge aller Punkte von $\mathfrak{E}$ *auf* die Menge aller Vektoren aus $\mathbb{R}^2$.

Bezüglich dieser Bijektion kann man die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ als Punkte von $\mathfrak{E}$ deuten.

Man bezeichnet daher die Elemente von $\mathbb{R}^2$ auch als **Punkte**.

3) Geometrische Bedeutung der Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$



Man sieht, (4, 3) ist der zu (3, 1), (0, 0), (1, 2) gehörige vierte Parallelogrammpunkt.
Allgemein gilt:
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ ist $x + y$ der zu x, (0, 0), y gehörige vierte Parallelogrammpunkt.

4) Definition: Vektormultiplikation

Sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann liegt λx auf der Geraden durch den Nullpunkt und den Punkt x.
Gilt $\lambda > 0$, so liegt λx – vom Nullpunkt aus gesehen – in der selben Richtung wie x und der Abstand des Punktes λx vom Nullpunkt ist gleich dem λ-fachen des Abstandes des Punktes x vom Nullpunkt. Entsprechendes gilt für $\lambda < 0$.

5) Definition: Geraden

G heißt eine Gerade, wenn es ein $u \in \mathbb{R}$ und ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, für das gilt:

$G = u + \mathbb{R}_v := \{u+\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

G heißt eine Urpsrungsgerade, wenn es ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, für das gilt:

$G = \mathbb{R}_v := \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Ist G eine gerade im Sinne der vorangegangen Def. Ist es keineswegs eindeutig bestimmt.

6) Satz: Geraden in der Ebene

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt G ist genau dann eine Gerade, wenn für $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ gilt:

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by = c\}$ falls $b \neq 0$: $y = -(a/b)x + c/b$

4. Funktionsräume über $\mathbb{K}$

1) Definition: Funktionsräume

Für beliebige Mengen M, N bezeichnen wir mit Abbildungen (M,N) die Menge aller Abbildungen von M nach N.

Bsp: Abb: ($\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$) ist die Menge aller Folgen in $\mathbb{R}$.

Sei M eine beliebige Menge.

Man betrachte Abb (M,) und definiere Verknüpfungen auf folgende Weise:

$+: \text{Abb}(M,\mathbb{K}) \times \text{Abb}(M,\mathbb{K}) \to \text{Abb}(M,\mathbb{K})$

$* : \mathbb{K} \times \text{Abb}(M,\mathbb{K}) \to \text{Abb}(M,\mathbb{K})$

Für alle $f,g \in$ Abb $(M,\mathbb{K})$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ seien $f+g$, $\lambda f \in$ Abb$(M,\mathbb{K})$ definiert durch:

$\forall\, x \in M: (f+g)^*(x) := f(x)+g(x)$

$\forall\, x \in M: (\lambda^* f)^*(x) := \lambda * f(x)$

$\Rightarrow$ $f+g$: $M \to \mathbb{K}$, $x \to f(x)+g(x)$ $\qquad$ $\lambda^* f$: $M \to \mathbb{K}$, $x \to \lambda^* f(x)$

2) Satz: Funktionsräume

Sei M eine beliebige Menge.

Dann ist Abb(M,) bzgl. der oben def. Verknüpfungen, genauer (Abb(M,$\mathbb{K}$),+,*), ein $\mathbb{K}$-VR.

Man nennt ihn auch einen Funktionsraum über $\mathbb{K}$.

Beweis: Durch Rückführung auf die entsprechenden VR-Eigenschaften von $\mathbb{K}$.

Spezialfälle:

Abb($\mathbb{N}$,) ist der $\mathbb{K}$-VR aller Folgen in $\mathbb{K}$.

Abb($\mathbb{K}$,) ist der $\mathbb{K}$-VR aller Funktionen $f: \mathbb{K} \to \mathbb{R}$

5. Definition: Teilraum

Sei V = (V,+,*) ein $\mathbb{K}$-VR. Sei $T \subseteq V$.

T heißt ein Teilraum von V, wenn die folgenden Bedingungen (Teilraum-Kriterien) erfüllt sind.

TR 1: $\odot_V \in T$ [T enthält (mindestens) den Nullvektor]

TR 2: $\forall\, u,v \in T: u+v \in T$ [T ist abgeschlossen bzgl. der Addition]

TR 3: $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}\ \ \forall\, v \in T: \lambda v \in T$ [T ist abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation]

T erfüllt die Kriterien TR1, TR2, TR3 genau dann, wenn T = (T,+ |T×T,*| $\mathbb{K} \times$ T) ein $\mathbb{K}$-VR ist.

6. <u>Satz: Durchschnitt und Summe endlich vieler Teiler</u>

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $T_1,\ldots,T_m$ TRe von V.
Dann sind auch $T_1 \cap \ldots \cap T_m$ und $T_1+\ldots+T_m := \{v_1 +\ldots+v_m | v_1 \in T_1,\ldots,v_m \in T_m\}$ TRe von V.

7. <u>Definition: Aufspann</u>

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $v_1,\ldots,v_m \in V$.
Ein Vektor $v \in V$ heißt eine Linearkombination von $v_1,\ldots,v_m$, wenn es $\lambda_1,\ldots\lambda_m \in \mathbb{K}$ gibt mit:

$$v = \lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_m v_m$$

Die Vektormenge „Span V“ heißt das Erzeugnis oder der Aufspann von $v_1,\ldots,v_m$:

$$\mathrm{Span}(v_1,\ldots,v_m) := \mathrm{Span}(\{v_1,\ldots,v_m)\} := \mathbb{K}v_1+\ldots+\mathbb{K}v_m = \lambda_m v_1+\ldots+\lambda_m v_m$$

$$\text{Ferner: } \mathrm{Span}(\emptyset) := \{\odot_v\} \text{ bzw. } \mathrm{Span}(\odot_v) := \{\odot_v\}$$

8. <u>Satz: Aufspann als Teilraum</u>

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $v_1,\ldots,v_m \in V$. Dann gilt:
$\mathrm{Span}(v_1,\ldots,v_m)$ ist ein Teilraum von V.

9. <u>Definition: Einheitsvektoren</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die n Vektoren

$$e_1 := e_1^{(n)} := (1,0,\ldots,0)$$
$$e_2 := e_2^{(n)} := (0,1,\ldots,0)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$e_n := e_n^{(n)} := (0,0,\ldots,1)$$

des $\mathbb{K}^n$ mit $0 = 0_{\mathbb{K}}$ und $1 = 1_{\mathbb{K}}$ heißen Einheitsvektoren. Es gilt:

$$\mathrm{span}(e_1^{(n)},\ldots, e_n^{(n)}) = \mathbb{K}^n$$

10. <u>Definition: Erzeugersystem</u>

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. V heißt endlich erzeugbar oder auch endlich dimensional oder Erzeugersystem, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und $v_1,\ldots,v_m$ gibt mit:

$$v = \mathrm{Span}(v_1,\ldots,v_m).$$

V heißt unendlich dimensional, wenn V nicht endlich dimensional / erzeugbar ist.

11. <u>Definition: Lineare Unabhängigkeit</u>

1) <u>Definition</u>

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $v_1,\ldots,v_m \in V$.
$(v_1,\ldots,v_m)$ heißt linear abhängig (la), wenn es $\lambda_1,\ldots\lambda_m \in \mathbb{K}$ gibt, mit:

$$(\lambda_1,\ldots\lambda_m) \neq (0,\ldots,0) \text{ und } \lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_m v_m = \odot_v$$

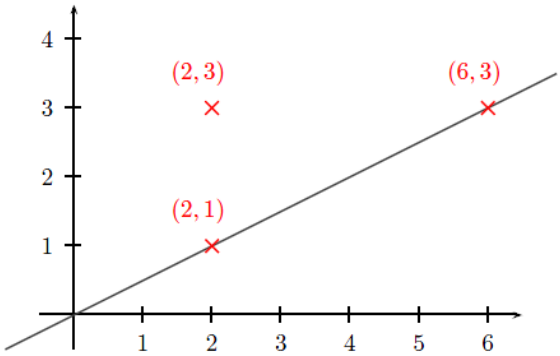
$(v_1,\ldots,v_m)$ heißt linear unabhängig (lu), wenn $(v_1,\ldots,v_m)$ nicht linear abhängig ist, d.h. wenn gilt:

$$\forall\, \lambda_1,\ldots\lambda_m \in \mathbb{K}: \lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_m v_m = \odot_v \;\Rightarrow\; (\lambda_1,\ldots\lambda_m) = (0,\ldots,0)$$

Mit anderen Worten: Der Nullvektor ist nur als triviale LK von $v_1,\ldots,v_m$ darstellbar.
Das leere Tupel $\emptyset$ heißt linear unabhängig.

2) <u>Geometrische Deutung der linearen Abhängigkeit für $\mathbb{R}^2$</u>

Man betrachte im $\mathbb{R}^2$ die Punkte (Vektoren) $(2,1), (6,3), (2,3)$.



$((2,1),(6,3))$ ist linear abhängig, denn es gilt

$$3(2,1) + (-1)(6,3) = (0,0).$$

$((2,1),(2,3))$ ist linear unabhängig.

<u>Allgemein gilt:</u>
Für alle x, y ∈ R2 ist (x, y) genau dann linear abhängig, wenn 0, x und y auf einer Geraden liegen.

12. <u>Definition: Rang</u>

Sei $r \in \mathbb{N}$. Seien $v_1,\ldots,v_r \in \mathbb{R}^n$. Dann definiert man

$$\mathrm{Rang}(v_1,\ldots,v_r) := \begin{cases} \max\{s \in \mathbb{N} \mid \exists w_1,\ldots,w_s \in \{v_1,\ldots,v_r\}: \\ \qquad (w_1,\ldots,w_s) \text{ linear unabhängig}\} & \text{falls } \{v_1,\ldots,v_r\} \neq \{0\} \\ \qquad 0 & \text{falls } \{v_1,\ldots,v_r\} = \{0\} \end{cases}$$

Diese Zahl heißt der Rang von $(v_1,\ldots,v_r)$. Der Rang von $(v_1,\ldots,v_r)$ ist also die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus $\{v_1,\ldots,v_r\}$.

$\mathrm{Rang}(v_1,\ldots,v_r) = p$ bedeutet:
a) Es gibt p Vektoren aus $\{v_1,\ldots,v_r\}$, die linear unabhängig sind.
b) Je p + 1 Vektoren aus $\{v_1,\ldots,v_r\}$ sind linear abhängig.
Umformungen
<u>Bemerkung:</u>
a) $(v_1,\ldots,v_r)$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rang}(v_1,\ldots,v_r) < r$
b) $(v_1,\ldots,v_r)$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rang}(v_1,\ldots,v_r) = r$
c) $\mathrm{Rang}(v_1,\ldots,v_r) = \mathrm{Rang}(v_1,\ldots,v_r,0,\ldots,0)$
<u>Beispiel:</u>
Rang((1, 0), (1, 1), (0, 1)) = 2.

13. <u>Definition: Elementare Umformungen</u>

Sei $r \in \mathbb{N}$. Die folgenden Abbildungen von $(\mathbb{R}^n)^r$ nach $(\mathbb{R}^n)^r$ heißen elementare Umformungen:

EU 1: $(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r)$	$\to (v_1,\ldots,\lambda v_i,\ldots,v_r)$,	(Multiplikation eines Vektors)
EU 2: $(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_r)$	$\to (v_1,\ldots,v_i+v_j,\ldots,v_j,\ldots,v_r)$,	(Addition zweier Vektoren)
EU 3: $(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_r)$	$\to (v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_r)$.	(Vertauschung von Vektoren)

Dabei ist stets $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$.
Sind $v_1,\ldots,v_r, w_1,\ldots,w_r \in \mathbb{R}^n$ und lässt sich $(v_1,\ldots,v_r)$ durch die reihenweise Anwendung von endlich vielen elementaren Umformungen in $(w_1,\ldots,w_r)$ überführen, so schreiben wir:
$(v_1,\ldots,v_r) \to\text{EU}\to (w_1,\ldots,w_r)$

14. Rangerhaltung bei elementaren Umformungen

Sei $r \in \mathbb{N}$. Seien $v_1,\ldots,v_r, w_1,\ldots,w_r \in \mathbb{R}^n$ mit $(v_1,\ldots,v_r) \rightarrow EU \rightarrow (w_1,\ldots,w_r)$. Dann gilt:
$\mathrm{Rang}(v_1,\ldots,v_r) = \mathrm{Rang}(w_1,\ldots,w_r)$.

Beweis, Hinweise:
Es genügt zu zeigen: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt:
a) $\mathrm{Rang}(v_1,v_2,\ldots,v_r)=\sqrt{}\ \mathrm{Rang}(\lambda v_1,v_2,\ldots,v_r)$,
b) $\mathrm{Rang}(v_1,v_2,\ldots,v_r)= \mathrm{Rang}(v_1+\lambda v_2,v_2,\ldots,v_r)$.

15. Satz zur linearen Abhängigkeit

Sei $r \in \mathbb{N}$, $v_1,\ldots,v_r \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ mit $r < m$ und seien $(w_1,\ldots,w_m) \in \mathrm{Span}(v_1,\ldots,v_r)$. Dann gilt:
$(w_1,\ldots,w_r)$ ist linear abhängig.

16. ?

17. ?

18. ?

19. Definition: Basis

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR (endlich m, endlich erzeugbar und $\neq \emptyset$), $r \in \mathbb{N}$ und $v_1,\ldots,v_r \in V$.
Das r-Tupel $(v_1,\ldots,v_r)$ heißt eine Basis von V, wenn folgende Bed. erfüllt sind:
a) $(v_1,\ldots,v_r)$ ist linear unabhängig
b) $V = \mathrm{span}(v_1,\ldots,v_r)$
Eine Basis ist also ein linear unabhängiges Erzeugersystem von V.

20. Charakterisierende Eigenschaften einer Basis

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit $V \neq \emptyset$, $r \in \mathbb{N}$ und $(v_1,\ldots,v_r) \in V$.
Dann sind folgende Aussagen paarweise äquivalent:
1) $(v_1,\ldots,v_r)$ ist eine Basis von V.
2) Zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein r-Tupel $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ $\quad v = (\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_r v_r)$
3) $(v_1,\ldots,v_r)$ ist ein „unverkürzbares“ Erzeugersystem von V.
4) $(v_1,\ldots,v_r)$ ist ein „unverlängerbares“ linear unabhängiges Tupel von Vektoren aus V.

zu 3): $\mathrm{span}\,(v_1,\ldots,v_r) = V$ und $\forall\, i \in \{1,\ldots,r\}$: $\mathrm{span}\,(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_r) \neq V$
zu 4) $(v_1,\ldots,v_r)$ ist linear unabhängig und $\forall\, v \in V$: $(v_1,\ldots,v_r,v)$ ist linear abhängig

21. Basisauswahlsatz

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit $V \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{N}$ und $(v_1,\ldots,v_m) \in V$ mit $V = \mathrm{span}\,(v_1,\ldots,v_m)$.
Dann existiert $r \in \mathbb{N}$ und $w_1,\ldots,w_r \in \{v_1,\ldots,v_m\}$ so, dass $(w_1,\ldots,w_r)$ eine Basis von V ist.

22. Satz: Basis

Jeder endliche demensional/endlich erzeugbare $\mathbb{K}$-VR $\neq \emptyset$ besitzt eine Basis.

23. Satz: Basis

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $r,s \in \mathbb{N}$, $(v_1,\ldots,v_r)$ und $(w_1,\ldots,w_r)$ Basen von V. Dann gilt: r=s.
Bemerkung: Alle Basen eines endlich dimensionalen/endlich erzeugbaren $\mathbb{K}$-VRs haben die gleiche Länge.

24. Definition: Dimensionen

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Ist V endlich erzeugbar/endlich dimensionierbar, so def. Man:

$$\dim V := \begin{cases} 0 & \text{falls } V = 0 \\ \text{Anzahl der Komponenten einer Basis von V} & \text{falls } V \neq 0 \end{cases}$$

dimV heißt die Dimension von V. Ist V unendlich dimensional, so schreibt man dimV = ∞.

25. Satz: Basisergänzung

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR; $m,r \in \mathbb{N}$ mit $m < r$; $w_1,\ldots,w_m, v_1,\ldots,v_r \in V$.
Sei $w_1,\ldots,w_m$ linear unabhängig und $(v_1,\ldots,v_r)$ eine Basis von V.
Dann lassen sich $(w_{m+1},\ldots,w_r) \in \{v_1,\ldots,v_r\}$ finden, so dass $(w_1,\ldots,w_r)$ eine Basis von V ist.

Das heißt, dass linear unabhängige Tupel $(w_1,\ldots,w_m)$ lässt sich zu einer Basis $(w_1,\ldots,w_m,w_{m+1},\ldots w_r)$ „verlängern“, wobei $w_{m+1},\ldots,w_r$ aus der vorgegebenen Basis kommen.

1) Satz: Basisergänzung (schwache Form)
Sei $m \in \mathbb{N}$. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-VR. Es gelte dimV = m.
Sei $r \in N$; $(w_1,\ldots,w_r) \in V$; $(w_1,\ldots,w_r)$ linear unabhängig. Dann gilt:
$r \leq n$
und es lassen sich Vektoren $(w_{r+1},\ldots,w_m) \in V$ finden, so dass $(w_1,\ldots,w_m)$ eine Basis von V ist.

26. Bemerkung zu Dimension, Basis, Aufspann und linearer Abhängigkeit

a) $V = \mathrm{Span}\,(v_1,\ldots,v_r) \Rightarrow m \leq r$,
$r < n \Rightarrow V \neq \mathrm{Span}\,(v_1,\ldots,v_r)$,
b) $m < r \Rightarrow (v_1,\ldots,v_r)$ linear abhängig,
$(v_1,\ldots,v_r)$linear unabhängig $\Rightarrow r \leq m$,
c) $(w_1,\ldots,w_m)$ linear unabhängig $\Rightarrow (w_1,\ldots,w_m)$ ist Basis von V ,
d) $V = \mathrm{Span}\,(w_1,\ldots,w_m) \Rightarrow (w_1,\ldots,w_m)$ ist Basis von V .

27. Satz: Gleichheitskriterium für endlichdimensionale Teilräume

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Seien S, T endlich dimensionale Teilräume von V. Dann gilt:
$S \subseteq T \wedge \dim S = \dim T \Rightarrow S = T$.

28. Satz: Dimensionsformel

Sei V ein K-Vektorraum. Seien S, T endlich dimensionale Teilräume von V.
Dann sind auch die Teilräume S + T und $S \cap T$ endlich dimensional und es gilt:
$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$.

29. Satz: Dimension eines Aufspanns

Sei V ein K-Vektorraum. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(v_1,\ldots,v_n) \in V$. Dann gilt:
$\dim \mathrm{Span}\,(v_1,\ldots,v_n) = \mathrm{Rang}\,(v_1,\ldots,v_n)$.

Index

Abbildung 10
Abschnittsinduktion 16
Absolutbetrag 13
Addition 27
Additiv Inverses Element ..... *Siehe inverses Element*
Allaussage 7
Allquantor 7
Anordnungsaxiome/Eigenschaften (R) 13
Approximation 15
Äquivalenz 6
Archimedes ..... *Siehe auch Satz von …*
Archimedisches Axiom 15
Arithmetisches Mittel 18
Assoziativgesetz 6, 12, 27
Aufspann 30, 33
Aussage 6
Aussageform 7
Aussonderungsprinzip ..... *Siehe Komprehensionsprinzip*
Axiome 27
Basis 32
Basisauswahlsatz 32
Basisergänzung 33
Bernoulische Ungleichung 16
Beschränktheit 19, 21
Betrag (einer reellen Zahl) 13
Betragsdefinition 24
Betragsfolgensatz 20
Beweis durch Kontraposition 7
Beweis durch vollständige Induktion ..... *Siehe Vollständige Induktion*
Beweismethoden 7
Bijektivität 11
Bild 11
Bildbereich 11
Bildmenge 11
Binomialkoeffizient 16
Binomische Formeln 17
Bolzano-Weierstraß ..... *Siehe Satz von...*
Cauchy-Folge 22
De morgan´sche Regeln 6
Delta-Ungleichung 14, 24
Differenzmenge 9
Dimension 28, 30, 33
Dimensionsformel 33
Direkter Beweis 7
Disjunktion 6
Diskriminante 25
Distributivgesetz 6, 12, 27
Division 12
Einschnürungssatz 20
Elementarbeziehung 8
Elementare Umformungen 31
Endlich 9, 30
Erzeugersystem 30, 32
EU ..... *Siehe Elementare Umformungen*
Eudoxos ..... *Siehe Satz von Eudoxos*
Eulersche Zahl e 21
Existenz von √2 15
Existenzaussage 7
Existenzquantor 7
Extensionalitätsprinzip 8
Fakultät 16
Fibonacci 22
Folge 19, 26
Folgerung 6
Funktion 10
Ganze Zahlen 8
Gausssche Zahlenebene 25
Geometrisches Mittel 18
Geordnetes Paar 10
Gleichheitsprinzip 8
Graph 11
Grenzwert 19, 22, 23, 26
Grenzwertregeln 20, 23
Harmonische Reihe 22
Imaginäre Einheit 24
Imaginärteil 24
Implikation 6
Indirekter Beweis 7
Induktionsprinzip 15
Infinum 14
Injektivität 11
Inklusion 8
Inverses Element 27
Junktoren 6
Kartesisches Produkt 10
Kleiner-Relation auf ℝ 13
Kommutativgesetz 6, 12, 27
Komplexe Wurzel 25
Komplexe Zahlen 8, 23
Komplexer Grenzwert 26
Komprehensionsprinzip 8
Konjugiert komplexe Zahl 24
Konjunktion 6
Konklusion 6
Kontraposition 6
Kontrapositionsbeweis 7
Konvergenz 19, 20, 26
Konvergenzkriterien 21, 22
Körperaxiome 23
Körperaxiome/Eigenschaften (R) 12
Kuratowski 10
K-Vektorraum 27
Leere Menge 8
Limes 19, 26
Lineare Abhängigkeit 30, 31, 33

Lineare Unabhängigkeit 30, 31, 33
Linearkombination 30
Mächtigkeit.....9
Maximum 14
Mengen.....8
Mengentheoretisches Induktionsprinzip...*Siehe Induktionsprinzip*
Mikko .....*Siehe Wunderformel*
Minimum.....14
Mittel 18
Monotone Teilfolge.....21
Monotonie 21, 26
Monotonie der Addition 13
Monotonie der Multiplikation 13
Monotonie der Wurzelfunktion.....18
Multiplikation.....27
Multiplikativität.....14
Näherung 15
Natürliche Zahlen.....8
Negation 6
Negierung von Aussagen.....7
Neutrales Element 27
N-Tupel 10
Nullfolge.....20
Nullvektor.....27
Obere Schranke 14
Ordnungsvollständigkeit 14
Paarbegriff.....10
Parallelogramm 28
Pascalsches Dreieck 17
Potenzen 16
Potenzmenge 9
pq-Formel 25
Quadratwurzel 25
Quantoren 7
Rang 31
Rangerhaltung 32
Rationale Zahlen.....8
Realteil 24
Reelle Zahlen.....8, 12
Rekursive Folgendefinition 22
Relation 8, 11
Satz von Archimedes.....15
Satz von Bolzano-Weierstraß 21
Satz von Eudoxos 15
Schnittmenge 9
Schranke 14, 19
Skalarmultiplikation 27
Span .....*Siehe Aufspann, Siehe Aufspann*
Steigung von Folgen 21
Subtraktion..... 12
Supremum..... 14
Surjektivität 11
Teilfolge..... 20
Teilmenge 8, 10
Teilmengenbeziehung..... 8
Transitivität..... 13, 26
Trichotomie 13, 26
Tripel 27
Tupel 10, 33
Uneigentlicher Grenzwert..... 22
Unendlich..... 9, 30
Ungleichungen..... 13
Unitarität..... 27
Untere Schranke..... 14
Urbildmenge 11
Vektoraddition 27, 28
Vektormultiplikation..... 28
Vektorraum..... 27
Vektorraum-Axiome..... 27
Vektorräume 27
Vektorrmultiplikation 27
Vereinigungsmenge 9
Vergleichssatz für Folgen 20
Verneinung 6
Vollständige Induktion 16
Vorrangregeln..... 6
Vorschrift..... 10
Widerspruchsbeweis... *Siehe Indirekter Beweis*
Wohlordnungsprinzip 15
WOP .....*Siehe Wohlordnungsprinzip*
Wunderformel..... 23
Wurzel 18, 25
Wurzelausdrücke 18
Wurzelfunktion..... 18
Δ-Ungleichung..... 14, 24