

Chapitre 2 :

Jeux sous forme normale

→ **Jeux sous forme normale.**

→ **Définition : représentation formelle d'un problème d'interaction dans laquelle on fait abstraction du caractère séquentiel des décisions.**

→ Détails pertinents pour : comprendre la nature de l'interaction et en prévoir son issue.

→ **Jeu sous forme normale : description.**

→ Ensemble fini N de n joueurs, indicés par i .

→ Pour chaque joueur i : ensemble A_i des actions disponibles à i .

→ Aucune hypothèse sur A_i : fini ou infini.

→ Chaque joueur i : fonction de paiement $U_i : A_1 \times \dots \times A_n$ dans $\mathbb{R}$.

→ Associe à chaque liste $(a_1, \dots, a_n)$ d'actions individuelles : paiement (subjectif) reçu par i .

→ Lorsque : joueurs choisissent les actions considérées.

→ **Exemple : la course cycliste.**

→ $N = (1 ; 2) = (\text{Alberto} , \text{Lance})$.

→ $A_1 = A_2 = (\text{EPO} , \text{NON})$.

→ U_1 et U_2 : définies par.

→ $U_1(\text{EPO} , \text{EPO}) = U_2(\text{EPO} , \text{EPO}) = 1$.

→ $U_1(\text{NON} , \text{NON}) = U_2(\text{NON} , \text{NON}) = 2$.

→ $U_1(\text{EPO} , \text{NON}) = U_2(\text{NON} , \text{EPO}) = 5$.

→ $U_1(\text{NON} , \text{EPO}) = U_2(\text{EPO} , \text{NON}) = -5$.

I _ Stratégies mixtes.

→ **Stratégies mixtes** : stratégie aléatoire modélisée comme une fonction de probabilité.

→ Ensembles d'actions A_i finis.

→ **Stratégie mixte** σ pour un joueur i : fonction de probabilité sur A_i .

→ **Interprétation** : $\sigma(a)$: « probabilité que i choisisse l'action a ».

→ $\sigma \in [0,1] \forall a \in A_i \forall i$.

→ $\sum_{a \in A_i} \sigma(a) = 1$.

→ **Stratégie pure** $a \in A_i$: peut être une stratégie mixte particulière.

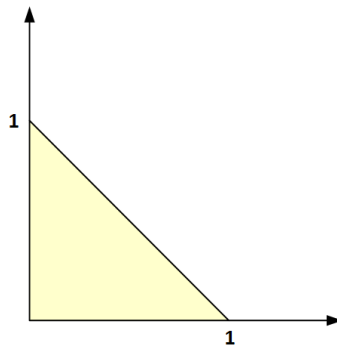
→ Probabilité de 1 à a et de 0 aux autres actions.

→ S_i : ensemble de toutes les stratégies mixtes sur $A_i = (a_1, \dots, a_{\text{card}(A_i)})$.

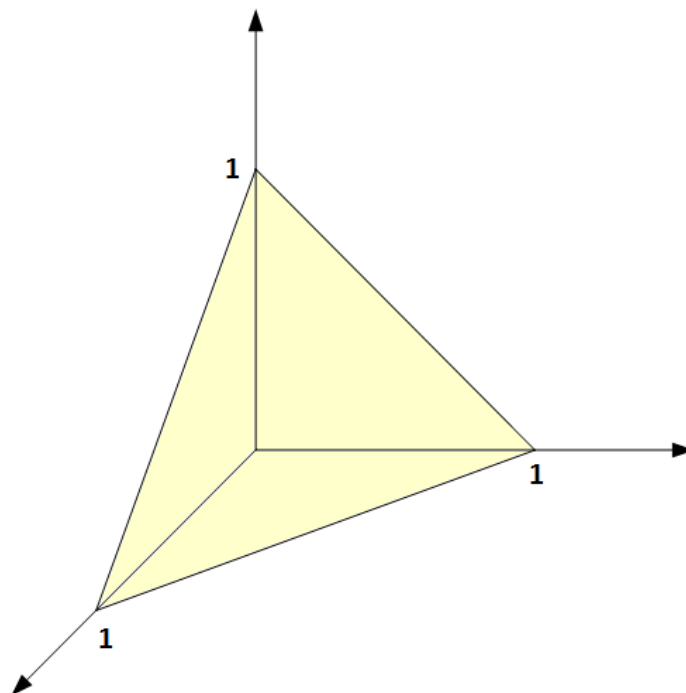
→ S_i : simplexe de dimension.

→ $\text{card}(A_i) - 1 = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_{\text{card}(A_i)}) \in [0,1]^{\text{card}(A_i)} : \sum_i \sigma_i = 1\}$.

→ **Simplexe de dimension 1** dans $\mathbb{R}^2$.



→ **Simplexe de dimension 2** dans $\mathbb{R}^3$.



→ **Combinaison de stratégies mixtes : adoptée.**

→ **Hypothèse : stratégies mixtes choisies indépendamment.**

→ **Païement espéré de i :**
$$p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} \prod_{h \in N} \sigma_h(a_h) U_i(a_1, \dots, a_n) .$$

→ Païement en moyenne.

→ **Hypothèses : indépendance statistique et païement moyen.**

→ **Exemple : pierre-papier-ciseaux.**

→ Païement espéré.

		Joueur 2		
		PIERRE	FEUILLE	CISEAUX
Joueur 1	PIERRE	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	FEUILLE	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	CISEAUX	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

→ **Hypothèses.**

→ Joueur 1.

→ Roche : probabilité $1/2$.

→ Papier : probabilité $1/2$.

→ Ciseaux : jamais.

→ Joueur 2.

→ Chaque stratégie : probabilité $1/3$.

		Joueur 2		
		PIERRE $1/3$	FEUILLE $1/3$	CISEAUX $1/3$
Joueur 1	PIERRE $1/2$	(0,0) $1/6$	(-1,1) $1/6$	(1,-1) $1/6$
	FEUILLE $1/2$	(1,-1) $1/6$	(0,0) $1/6$	(-1,1) $1/6$
	CISEAUX 0	(-1,1) 0	(1,-1) 0	(0,0) 0

→ **Païements espérés.**

$$\rightarrow p_1 = \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * (-1) + \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * (-1) = 0 .$$

$$\rightarrow p_2 = \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * (-1) + \frac{1}{6} * (-1) + \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{6} * 1 = 0 .$$

II _ Jeux résolubles par dominance.

→ **Combinaison de stratégies (pures) :** (a_i, a_{-i}) .

→ Où.

→ **Joueur i : action** $a_i \in A_i$.

→ **Autres joueurs : combinaison actions** $a_{-i} \in A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n = A_{-i}$.

1 _ Dominance stricte.

→ **Définition : dominance stricte de la stratégie a_i sur a_{-i} du joueur i .**

→ **Si quelque soit :** $a_{-i} \in A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n$.

→ $U_i(a_i, a_{-i}) > U_i(a'_i, a_{-i})$ **est vrai.**

→ Exemple : course cycliste.

→ Pour chaque joueur : stratégie « NON » strictement dominée par la stratégie « EPO ».

2 _ Dominance faible.

→ **Définition : dominance faible de la stratégie a_i sur a_{-i} du joueur i .**

→ **Si quelque soit :** $a_{-i} \in A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n$.

→ $U_i(a_i, a_{-i}) \geq U_i(a'_i, a_{-i})$ **est vrai.**

→ $U_i(a_i, a_{-i}) > U_i(a'_i, a_{-i})$ **est vrai.**

→ Exemple : bataille de la mer de Bismark.

→ Pour Kimura : stratégie « SUD » faiblement dominée par la stratégie « NORD ».

3 _ Exemples.

→ **Notion de domination : application aux stratégies mixte.**

→ **Remplacement :** a_i par σ et U_i par p_i .

→ **Exemple.**

→ **Stratégies pures : aucune relation de domination.**

→ Joueur 1 : aucune dominance entre A et B.

→ Joueur 2 : aucune dominance entre C et D, C et E ou D et E.

→ **Stratégie mixte : domine une stratégie pure.**

→ Joueur 2 : jamais E.

→ Mixture C et D : domine E.

→ Joueur 1 : stratégie dominante en A.

→ Joueur 2 : choisira C.

		Joueur 2		
		C	D	E
Joueur 1	A	(4,10)	(3,0)	(1,3)
	B	(0,0)	(2,10)	(10,3)

4 _ Principe de rationalité et connaissance commune.

→ Principe fondamental de rationalité.

- **Rationalité faible** : joueur n'adoptera jamais une stratégie strictement dominée par une autre.
- **Rationalité forte** : joueur n'adoptera jamais une stratégie faiblement dominée par une autre.

→ Situations : issue du jeu déterminée par ces principes.

- Chaque joueur : possession d'une stratégie qui domine toutes les autres.

→ Rationalité : connaissance commune.

- **Rationalité des autres joueurs : croyances réciproques *ad infinitum*.**

5 _ Équilibre en stratégies dominantes.

→ Combinaison de stratégies pures : $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$.

→ Combinaison de stratégies mixtes : $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$.

→ Définition : équilibre en stratégies strictement (resp. faiblement) dominantes.

- **Condition** : pour tout joueur i .

- a_i domine strictement (resp. faiblement) a'_i pour toute $a'_i \in A_i$.

→ Exemple : course cycliste.

- (EPO , EPO) : équilibre en stratégies strictement dominantes.

→ Équilibre en stratégies dominantes : prédiction très plausible de l'issue du jeu.

- **Prédiction** : obtenue du principe de rationalité.

III _ Élimination itérative de stratégies dominées.

1 _ Définition intuitive.

- Chaque joueur : élimination des stratégies strictement dominées.
 - Nouveau jeu : apparition de nouvelles relations de dominance.
 - Élimination des stratégies dominées.
 - Processus itératif d'élimination des stratégies dominées.
 - Arrêt : une seule stratégie pour chaque joueur.
 - Jeu : résolvable par élimination itérative des stratégies strictement dominées.

→ Exemple : bataille de la mer de Bismark.

		Kimura	
		C	D
Kenney	A	(2,-2)	(2,-2)
	B	(1,-1)	(3,-3)

- Kimura : « Sud » faiblement dominée.
 - Élimination de « Sud » de l'ensemble des stratégies de Kimura.

		Kimura
		C
Kenney	A	(2,-2)
	B	(1,-1)

- Kenney : relation de dominance.

		Kimura
		C
Kenney	A	(2,-2)

2 _ Définition formelle.

→ Procédure d'élimination de stratégies dominées.

→ Hypothèses.

→ Ensembles d'actions : finis.

→ Stratégies mixtes : autorisées.

→ Pour $i \in N$, $A_i(0) = A_i$, et, $t = 1, \dots$.

→ $A_i(t) = a_i \in A_i(t-1) : \exists \sigma \in S_i(t-1) : \text{tel que.}$

→ $\sum_{a \in A_i(t-1)} \sigma(a) U_i(a; a_{-i}) > U_i(a_i; a_{-i}) \forall a_{-i} \in A_{-i}$.

→ $S_i(t) = \sigma_i \in S_i : \sigma_i(a) > 0 \forall a \in A_i(t)$.

→ Pour $t' = \text{Min}(t)$ et $A_i(t') = A_i(t' + 1)$ pour tout les joueurs i .

→ $S_i(t') = \sigma_i \in S_i(t) : \exists \sigma \in S_i(t') : \text{tel que.}$

→ $\sum_{a \in A_i(t')} \sigma(a) U_i(a; a_{-i}) > \sum_{a \in A_i(t')} U_i(a_i; a_{-i}) \forall a_{-i} \in A_{-i}$.

→ $A_i(t)$: ensemble des stratégies pures du joueur i .

→ Pas encore éliminées à l'étape t de la procédure.

→ $A_i(t')$: ensemble des stratégies pures du joueur i .

→ Obtenues à la fin de la procédure itérative d'élimination des stratégies dominées.

→ $S_i(t)$: ensemble des stratégies mixtes du joueur i .

→ Assignant une probabilité nulle aux stratégies pures éliminées à l'étape t .

→ $S_i(t')$: ensemble des stratégies mixtes du joueur i .

→ Pas dominées à la fin de la procédure.

→ $S_i(t')$: ensemble des stratégies mixtes sur $A_i(t')$.

→ Exemple.

→ Joueur 2.

→ Stratégie mixte : C et D avec probabilité $1/2$.

→ Paiement moyen : $-1/2$.

→ Dominance de E sur C et D avec probabilité $1/2$.

→ Paiement de E : 0 .

		Joueur 2		
		C	D	E
Joueur 1	A	(3,1)	(0,-2)	(1,0)
	B	(0,-2)	(3,1)	(1,0)

→ Stratégies mixtes sur l'ensemble des stratégies pures résistant à un procédure d'élimination itérative de stratégies dominées.

→ Pas nécessairement : stratégies mixtes survivant à une procédure d'élimination de stratégies mixtes dominées.

3 _ Jeux résolubles par dominance.

→ Définition : jeu résoluble par stricte dominance.

→ Exacte prédiction de l'issue sous seule hypothèse de rationalité et de connaissance commune.

→ Condition : $\text{card } A_i(t') = 1$ ou $\text{card } S_i(t') = 1$ pour tout i .

→ Raisonnement analogue : jeu résoluble par dominance faible.

→ Ensemble $S_i(t')$: coïncide avec l'ensemble des combinaisons choisies des joueurs.

→ Sous hypothèse : rationalité et connaissance commune de la rationalité.

→ Exemple : jeu à trois joueurs.

→ Joueur 1 : choisit la ligne.

→ Joueur 2 : choisit la colonne.

→ Joueur 3 : choisit le tableau.

Tableau A		
	G	D
H	0,0,3	0,1,1
B	1,1,1	1,0,2

Tableau B		
	G	D
H	2,0,0	0,1,0
B	2,2,0	2,2,0

Tableau C		
	G	D
H	3,1,1	2,0,0
B	1,1,0	1,2,1

→ Joueur 3 : tableau A domine le tableau B et C

Tableau A		
	G	D
H	0,0,3	0,1,1
B	1,1,1	1,0,2

→ Joueur 1 : stratégie B domine la stratégie H.

Tableau A		
	G	D
B	1,1,1	1,0,2

→ Joueur 2 : stratégie G domine la stratégie D.

Tableau A	
	G
B	1,1,1

→ Une seule combinaison pure : résultat de la procédure d'élimination itérative des stratégies dominées.

4 _ Applications.

a _ Tragédie des communs.

→ Application : tragédie des communs.

→ Anna et Bob : voisins partageant l'entretien d'une cage d'escalier.

→ Chacun : possibilité de consacrer jusqu'à 10 heures par mois à l'entretien.

→ **Qualité d'entretien** : $Q = T^{1/2}$.

→ Fonction du temps total passé par les deux voisins.

→ **Préférences de chaque individu** : $\Phi(t, Q) = (10 - t) Q$.

→ Fonction du temps individuel passé et de la propreté.

→ Problème : temps passé par chaque individu à l'entretien de la cage d'escalier.

→ Représentation : jeu sous forme normale.

→ $N = \{1, 2\}$.

→ Joueur 1 : Bob.

→ Joueur 2 : Anna.

→ $A_1 = A_2 = [0, 10]$.

→ Temps : supposé divisible.

→ Stratégie pure : quantité mensuelle de temps passé à l'entretien.

→ $U_i(t_1, t_2) = (10 - t_i)(t_1 + t_2)^{1/2} \forall i = 1 ; 2$.

→ Courbe d'indifférence : construction.

→ $U_i(t_1, t_2) = (10 - t_i)(t_1 + t_2)^{1/2} = u$.

→ $(t_1 + t_2)^{1/2} = \frac{u}{10 - t_i}$.

→ $(t_1 + t_2) = \frac{u^2}{(10 - t_i)^2}$.

→ $t_j = \frac{u^2}{(10 - t_i)^2} - t_i$.

→ Représentation des préférences : ensemble $[0, 10] \times [0, 10]$ des combinaisons de temps disponibles.

→ **Courbe d'indifférence typique de i** : $t_j = \frac{u^2}{(10 - t_i)^2} - t_i$.

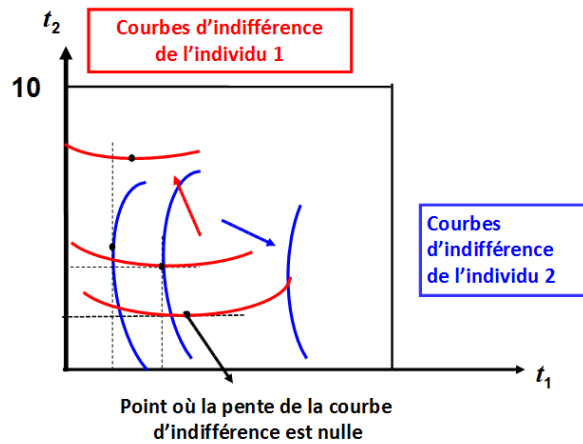
→ Pour un niveau d'utilité u arbitraire.

→ Graphiquement.

→ Point où la pente de la courbe d'indifférence est nulle : meilleure réponse d'un joueur à tout choix donné de l'autre.

→ Supposition : joueur 2 choisit 4 .

→ Meilleure réponse du joueur 1 à 4 sera : $r_1(4)$.



→ Meilleure réponse du joueur i à tout choix de j : programme d'optimisation.

$$\rightarrow \max_{t_i \in [0,10]} u = (10 - t_i) + (t_i + t_j)^{1/2} .$$

$$\rightarrow \text{C.P.O : } \frac{du}{dt_i} = 1 - (t_i + t_j)^{1/2} + (10 - t_i) (t_i + t_j)^{-1/2} = 0 .$$

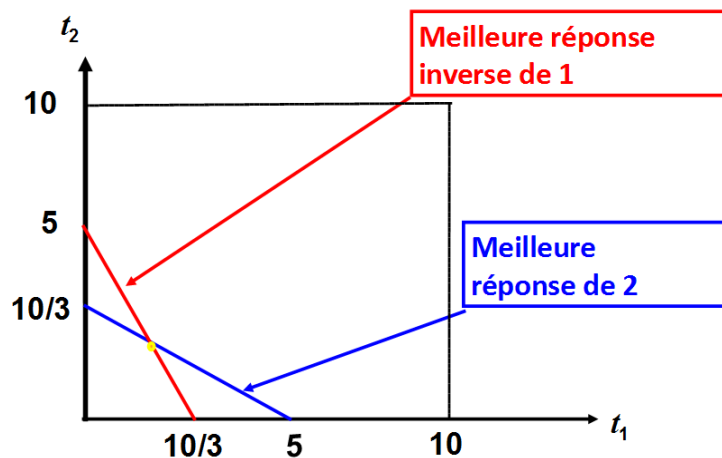
$$\rightarrow -(t_i + t_j) + \frac{10 - t_i}{2} = 0 .$$

$$\rightarrow t_i = \frac{10 - 2t_j}{3} \text{ si } t_i = \frac{10 - 2t_j}{3} \geq 0 .$$

→ Graphiquement.

→ Intersection : unique combinaison survivante à une procédure d'élimination itérative de stratégies dominées.

→ Procédure : infinie mais convergente.



→ **Issue du jeu : système.**

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{10 - 2t_2}{3} \\ t_2 = \frac{10 - 3t_1}{2} \end{cases} .$$

$$\rightarrow \text{Résolution : } \begin{cases} t_1^* = 2 \\ t_2^* = 2 \end{cases} .$$

→ **Combinaison d'efforts : pas efficace au sens de Pareto.**

→ Conflit : intérêt collectif et individuel.

b _ Octroi de concession.

→ **Application : octroi de concession.**

→ n entreprises intéressées.

→ Entreprise i : fournisseur d'une unité d'eau potable au coût de c_i .

→ Unités d'eau à fournir : e .

→ Maire : donner la concession à l'entreprise fournissant l'eau au prix le plus faible.

→ Objectif : construire un jeu, sous forme normale, incitant chaque entreprise à révéler au maire son véritable coût.

→ À un euro près : problème discret.

→ **Jeu naïf : demander à chaque entreprise de faire une offre sous pli scellé.**

→ Entreprise proposant le prix le plus bas : obtient la concession et vente de l'eau au prix indiqué.

→ Problème : non-incitation à mettre dans l'enveloppe le prix le plus proche du coût.

→ **Jeu naïf : forme normale.**

→ Ensemble des joueurs : $N = \{1, \dots, n\}$.

→ Chaque firme : libre de mettre n'importe quel nombre entier non-négatif.

→ $A_i = \mathbb{N}_+ \forall i$.

→ **Pour** $p_i > \min_{j \neq i} (p_j)$: $U_i(p_1, \dots, p_n) = 0$.

→ **Pour** $p_i = \min_{j \neq i} (p_j)$: $U_i(p_1, \dots, p_n) = e \frac{(p_i - c_i)}{\text{card} \{j : p_j = \min_{h \in N} (p_h)\}}$.

→ **Pour** $p_i < \min_{j \neq i} (p_j)$: $U_i(p_1, \dots, p_n) = e (p_i - c_i)$.

→ Entreprise gagnante : offre la plus petite dans l'enveloppe.

→ Ex-æquo : brisés par un mécanisme aléatoire uniforme exogène mais connu.

→ **Situation : point de vue de la firme i** .

→ **Plus faible des prix proposées par les concurrents de i** : $p_{-i}^* = \min_{j \neq i} (p_j)$.

→ **Hypothèse** : $c_i + 1 \geq p_{-i}^*$.

→ Pour $p_i^* > p_{-i}^*$: entreprise i gagne 0 .

→ Pour $p_i^* = p_{-i}^*$: entreprise i gagne $e \frac{(p_{-i}^* - c_i)}{\text{card} \{j : p_j = p_{-i}^*\}} \leq 0$.

→ Pour $p_i^* < p_{-i}^*$: entreprise i gagne $e (p_i - c_i) \leq 0$.

→ **Faible intérêt à choisir** : $p_i = c_i + 1$.

→ **Hypothèse** : $c_i + 1 < p_{-i}^*$.

→ Pour $p_i^* > p_{-i}^*$: entreprise i gagne 0 .

→ Pour $p_i^* = p_{-i}^*$: entreprise i gagne $e \frac{(p_{-i}^* - c_i)}{\text{card} \{j : p_j = p_{-i}^*\}} \leq 0$.

→ Pour $p_i^* < p_{-i}^*$: entreprise i gagne $e (p_i - c_i) > 0$.

→ Prix de $c_i + 1$: dominé pour l'entreprise i par $p_{-i}^* - 1$.

→ **Jeu : non-incitation des entreprises à proposer le prix le plus faible possible.**

→ **Jeu moins naïf : incitation de Vickrey (1950).**

→ Chaque firme : offre sous plu scellé.

→ Firme proposant le prix le plus bas : gagne la concession.

→ Prix obtenu : deuxième prix le plus faible.

→ Pour $p_i > p_{-i}^*$: $U_i(p_1, \dots, p_n) = 0$.

→ Pour $p_i = p_{-i}^*$: $U_i(p_1, \dots, p_n) = e \frac{(p_{-i}^* - c_i)}{\text{card} \{j : p_j = \min_{h \in N} (p_h)\}}$.

→ Pour $p_i < p_{-i}^*$: $U_i(p_1, \dots, p_n) = e (p_i - p_{-i}^*)$.

→ **Situation : point de vue de la firme i** .

→ **Hypothèse** : $p_i \leq c_i + 1$.

→ **Stratégie faiblement dominante** : $p_i = c_i + 1$.

Cas de figure	Pailements			
	$p_i = c_i + 1$	$p_i \neq c_i + 1$ $p_i < p_{-i}^*$	$p_i \neq c_i + 1$ $p_i = p_{-i}^*$	$p_i \neq c_i + 1$ $p_i > p_{-i}^*$
$c_i + 1 > p_{-i}^*$	0	0	$\frac{e (p_{-i}^* - c_i)}{\text{card} \{j : p_j = p_{-i}^*\}} \leq 0$	$e (p_{-i}^* - c_i) \leq 0$
$c_i + 1 = p_{-i}^*$	$\frac{e}{\text{card} \{j : p_j = p_{-i}^*\}} > 0$	0	Impossible	e
$c_i + 1 < p_{-i}^*$	$e (p_{-i}^* - c_i) > 0$	0	$\frac{e (p_{-i}^* - c_i)}{\text{card} \{j : p_j = p_{-i}^*\}} \geq 0$	$e (p_{-i}^* - c_i) > 0$

IV _ Équilibre de Nash.

1 _ Définition intuitive.

- Jeu résolvable par élimination itérative de stratégies dominées.
 - Issue prédite : sous deux hypothèses.
 - Rationalité des joueurs.
 - Connaissance commune de cette rationalité.
 - Beaucoup de jeux : non-résolvables par élimination itérative de stratégies dominées.
- **Équilibre de Nash : John Nash, 1950.**
 - **Condition nécessaire à toute prédiction plausible : robustesse vis-à-vis des déviations unilatérales.**
- **Exemple.**
 - Stratégies dominées : aucune.
 - **Unique équilibre de Nash en stratégies pures : (b , B) .**
 - Propriété de robustesse : aucun intérêt unilatéral à dévier.

		Joueur 2		
		A	B	C
Joueur 1	a	(1,4)	(0,2)	(8,3)
	b	(2,0)	(3,3)	(1,1)
	c	(3,5)	(1,1)	(6,6)

2 _ Définition formelle.

- **Définition formelle.**
 - **Admission : stratégies mixtes.**
 - **Stratégies pures : cas particuliers de stratégies mixtes.**
 - Jeu sous forme normale : (N_i, A_i, U_i) .
 - $S_i = \{ \sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{i \text{card}(A_i)}) \in [0,1]^{\text{card}(A_i)} : \sum_i \sigma_i = 1 \}$: ensemble de toutes les stratégies mixtes de i .
 - σ_{ij} : probabilité que la stratégie mixte σ_i attribue à la stratégie pure a_{ij} du joueur i .
 - Notation alternative : $\sigma_i(a_{ij})$.
 - **Équilibre de Nash : combinaison de stratégies mixtes** $(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$.
 - **Absence d'incitations unilatérales à dévier** : $P_i(\sigma_i^* ; \sigma_{-i}^*) \geq P_i(\sigma_i ; \sigma_{-i}^*)$.
 - **Pour tout joueur i et toute stratégie mixte σ_i .**

→ **Équilibre de Nash : remarques.**

→ Toute prédiction plausible de l'issue d'un jeu sous forme normale : **condition nécessaire.**

→ **Équilibre de Nash.**

→ **Tout équilibre en stratégies dominantes .**

→ **La seule combinaison survivante à une procédure itérative d'éliminations strictement dominées.**

→ **Non-valable : procédure itérative d'éliminations faiblement dominées.**

→ Si $(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$: **équilibre de Nash.**

→ σ_i^* : **pas strictement dominée pour i .**

→ **Exemple : France et Deutch Telecom.**

→ Deux équilibres de Nash.

→ (PAIX , ENTRE) .

→ (GUERRE , DEHORS) .

→ PAIX : stratégie faiblement dominante sur GUERRE .

→ Équilibre de Nash avec stratégie faiblement dominée adoptée.

		DT	
		ENTRE	DEHORS
FT	GUERRE	(75,-25)	(300,0)
	PAIX	(150,50)	(300,0)

3 _ Équilibre de Nash en stratégies mixtes.

a _ Approche intuitive.

→ **Exemple.**

→ Stratégies dominées : aucune.

→ **Unique équilibre de Nash en stratégies pures : (b , B) .**

		Joueur 2		
		A	B	C
Joueur 1	a	(1,4)	(0,2)	(8,3)
	b	(2,0)	(3,3)	(1,1)
	c	(3,5)	(1,1)	(6,6)

→ **Équilibre en stratégie mixte.**

→ Joueur 1 : stratégie mixte $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

→ Joueur 2 : stratégie mixte $\sigma_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

		Joueur 2		
		A avec $\frac{1}{2}$	B avec 0	C avec $\frac{1}{2}$
Joueur 1	a avec $\frac{1}{2}$	(1,4)	(0,2)	(8,3)
	b avec 0	(2,0)	(3,3)	(1,1)
	c avec $\frac{1}{2}$	(3,5)	(1,1)	(6,6)

→ Paiement espérés : différentes stratégies pures.

→ Joueur 1 : sachant que joueur 2 choisit la stratégie mixte $\sigma_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

→ Paiement espéré de a : $1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

→ Paiement espéré de b : $2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

→ Paiement espéré de c : $3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

→ Joueur 2 : sachant que joueur 1 choisit la stratégie mixte $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

→ Paiement espéré de A : $4 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

→ Paiement espéré de B : $2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

→ Paiement espéré de C : $3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

		Joueur 2		
		A avec $\frac{1}{2}$ (9/2)	B avec 0 (3/2)	C avec $\frac{1}{2}$ (9/2)
Joueur 1	a avec $\frac{1}{2}$ (9/2)	(1,4)	(0,2)	(8,3)
	b avec 0 (3/2)	(2,0)	(3,3)	(1,1)
	c avec $\frac{1}{2}$ (9/2)	(3,5)	(1,1)	(6,6)

→ Joueur 1 : pas intérêt à augmenter la probabilité nulle attribuée à b.

→ Indifférent entre toute mixture de a et c.

→ Aucun intérêt à dévier de $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

→ Joueur 2 : pas intérêt à augmenter la probabilité nulle attribuée à B.

→ Indifférent entre toute mixture de A et C.

→ Aucun intérêt à dévier de $\sigma_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

b _ Approche formelle.

→ Équilibre de Nash en stratégies mixtes : identification.

→ Jeu sous forme normale : (N_i, A_i, U_i) .

→ $(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ **équilibre de Nash en stratégie mixte : condition nécessaire.**

$$\rightarrow \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \prod_{g \neq i} \sigma_g^*(a_{-il}) U_i(a_i; a_{-i}) = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \prod_{g \neq i} \sigma_g^*(a_{-il}) U_i(a'_i; a_{-i}) .$$

→ Pour tout joueur i et toutes stratégies pures a_i et $a'_i \in A_i$.

→ Telles que : $\sigma_i^*(a_i) \rightarrow 0$ et $\sigma_i^*(a'_i) \rightarrow 0$.

→ Joueur doit être indifférent entre : toutes les stratégies pures jouées avec probabilité strictement positive.

→ Exemple : Alonzo et Natacha.

→ En stratégies pures : deux équilibres de Nash.

→ (BALLET , BALLET) .

→ (FOOT , FOOT) .

→ En stratégies mixtes : équilibre de Nash.

		Natacha	
		BALLET	FOOT
Alonzo	BALLET	(3,2)	(1,1)
	FOOT	(0,0)	(2,3)

→ Trouver : équilibre de Nash en stratégies mixtes.

→ Trouver pour chaque joueur : probabilités de choix rendant l'autre joueur indifférent entre ses stratégies pures.

→ Trouver : σ_{N1} et $\sigma_{N2} = 1 - \sigma_{N1}$ pour Natacha.

→ Rendant Alonzo indifférent entre BALLET et FOOT .

→ Trouver : σ_{A1} et $\sigma_{A2} = 1 - \sigma_{A1}$ pour Alonzo.

→ Rendant Natacha indifférent entre BALLET et FOOT .

		Natacha	
		BALLET avec σ_{N1}	FOOT avec $1 - \sigma_{N1}$
Alonzo	BALLET avec σ_{A1}	(3,2)	(1,1)
	FOOT avec $1 - \sigma_{A1}$	(0,0)	(2,3)

$$\rightarrow \sigma_{N1} \text{ doit vérifier : } \begin{cases} 3 \cdot \sigma_{N1} + 1 \cdot \sigma_{N2} = 0 \cdot \sigma_{N1} + 2 \cdot \sigma_{N2} \\ \text{S/c } \sigma_{N2} = 1 - \sigma_{N1} \end{cases} .$$

→ Rendant Alonzo indifférent entre BALLET et FOOT .

→ Résolution : $3 \cdot \sigma_{N1} + 1 - \sigma_{N1} = 2 \cdot (1 - \sigma_{N1})$.

$$\rightarrow \sigma_{N1} = \frac{1}{4} ; \sigma_{N2} = \frac{3}{4} .$$

$$\rightarrow \sigma_{A1} \text{ doit vérifier : } \begin{cases} 2 \cdot \sigma_{A1} + 0 \cdot \sigma_{A2} = 1 \cdot \sigma_{A1} + 3 \cdot \sigma_{A2} \\ S/c \sigma_{A2} = 1 - \sigma_{A1} \end{cases}$$

→ Rendant Natacha indifférent entre BALLET et FOOT .

→ Résolution : $2 \cdot \sigma_{A1} = \sigma_{A1} + 3 \cdot (1 - \sigma_{A1})$.

$$\rightarrow \sigma_{A1} = \frac{3}{4} ; \sigma_{A2} = \frac{1}{4} .$$

4 _ Existence d'un équilibre de Nash.

→ **Dominance : prédictions de l'issue d'un jeu pas toujours obtenues.**

→ **Équilibre de Nash (1950) : défini dans une grande classe de jeux sous forme normale.**

→ **Théorème 1.**

→ Hypothèses.

→ Soit, un jeu sous forme normale (N, A_i, U_i) où A_i fini pour tout i .

→ Soit, S_i l'ensemble de stratégies mixtes sur A_i .

→ Alors : **au moins un équilibre de Nash.**

→ **Théorème 2.**

→ Hypothèses.

→ Soit, un jeu sous forme normale (N, A_i, U_i) où A_i un sous-ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^k$ pour tout joueur i .

→ Soit U_i une fonction continue de $x_{i \in N} A_i$.

→ Alors : **au moins un équilibre de Nash en stratégies pures.**

→ **Exemple : jeu politique.**

→ Communauté : 30.000 individus.

→ 10.000 personnes : revenu annuel de 10.000 €.

→ 10.000 personnes : revenu annuel de 30.000 €.

→ 10.000 personnes : revenu annuel de 60.000 €.

→ Individus : mêmes préférences pour la dépense publique (Y) et la dépense privée (x) .

→ **Préférences : fonction d'utilité** $V(Y, x) = Y^{\frac{1}{2}} + x$.

→ Deux partis politiques A et B : soumis au suffrage des électeurs.

→ **Parti i ($i = A, B$)** : proposant aux électeurs une politique économique résumée par un taux de taxe $t_i \in [0, 1]$.

→ **Électeur de richesse R** : évaluation des différents taux de taxes t proposés.

→ **Fonction** : $\Phi(t, R) = (tW)^{\frac{1}{2}} + (1 - t) R$.

→ $W = 1.000.000.000$: assiette fiscale de cette communauté.

→ Question : Quelle politique proposera chaque parti sachant que son objectif est simplement d'être élu ?

→ **Construction d'un jeu** : descriptif du problème de décision que doit résoudre chaque parti.

→ $N = \{A, B\}$.

→ $A_i = [0,1]$ pour $i = A, B$; $j = A, B$ et $i \neq j$.

→ **Parti i gagne l'élection** : $U_i(t_A, t_B) = 1$.

→ $\text{card} \{h : \Phi(t_i, R_h) \geq \Phi(t_j, R_h)\} > \text{card} \{h : \Phi(t_j, R_h) \geq \Phi(t_i, R_h)\}$.

→ **Suffrages se partagent également entre les deux partis** : $U_i(t_A, t_B) = \frac{1}{2}$.

→ $\text{card} \{h : \Phi(t_i, R_h) \geq \Phi(t_j, R_h)\} = \text{card} \{h : \Phi(t_j, R_h) \geq \Phi(t_i, R_h)\}$.

→ **Parti i perd l'élection** : $U_i(t_A, t_B) = 0$.

→ $\text{card} \{h : \Phi(t_i, R_h) \geq \Phi(t_j, R_h)\} < \text{card} \{h : \Phi(t_j, R_h) \geq \Phi(t_i, R_h)\}$.

→ **Jeu : unique équilibre de Nash.**

→ **Dans cet équilibre** : deux partis proposent le même taux d'impôt t^* .

→ **Taux d'impôt d'équilibre** : taux d'impôt préféré par l'électeur médian.

→ **Taux d'impôt préféré d'un électeur** : préférences retranscrites par $\Phi(t, R)$.

→ $\text{Max } \Phi(t, R) = (tW)^{1/2} + (1-t)R$.

→ $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{W^{1/2}}{2t^{1/2}} - R$.

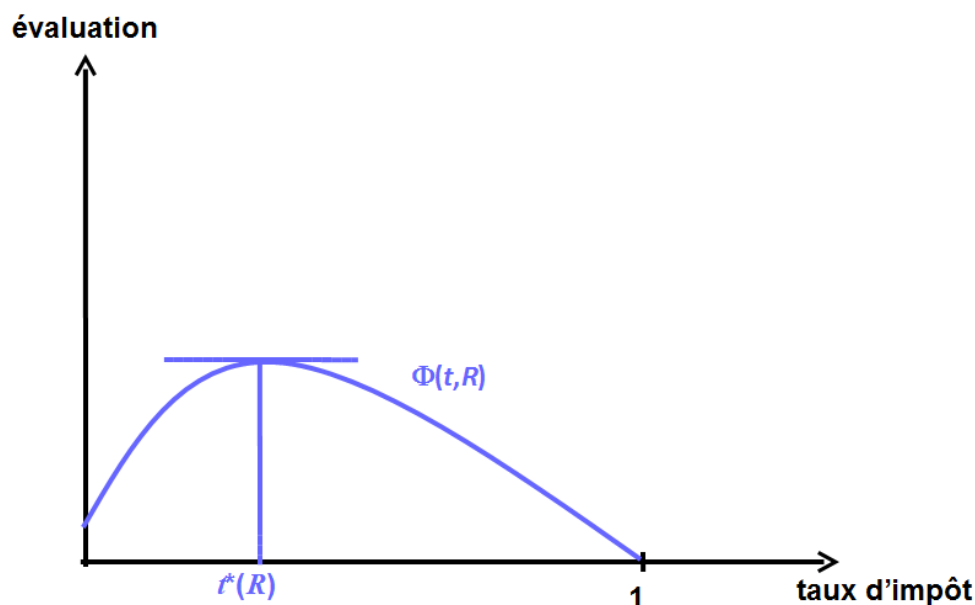
→ $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{W^{1/2}}{4t^{3/2}}$: $\Phi(t, R)$ fonction concave de t .

→ **Graphiquement** : $\Phi(t, R)$.

→ $t^*(R)$: taux d'impôt préféré d'un électeur de richesse R .

→ Préférences de cet électeur : « **uni-modales** ».

→ Satisfaction de cet électeur : réduction lorsque l'on s'éloigne de son taux d'impôt préféré.



→ **Solution :** $t^*(R)$.

$$\rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{W}{2t^*(R)} \right)^{1/2} - R = 0 \quad .$$

$$\rightarrow t^*(R) = \frac{W}{4R^2} \quad \text{si : } W \leq 4R^2 \quad .$$

$$\rightarrow t^*(R) = 1 \quad \text{si : } W > 4R^2 \quad .$$

→ **Taux d'impôt préféré d'un électeur : décroît avec son revenu.**

→ « Plus on est riche, moins on veut d'impôt ».

→ Cette propriété : dépendante des préférences particulières dans cet exemple.