

1. wyznaczyć sumę szeregu:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}.$$

2. Uzasadnić, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

3. Ocenąć zbieżność szeregów:

$$\begin{array}{lll} (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, & (b) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n n}, & (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sin \frac{1}{n}}, \\ (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}}, & (e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right), & (f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}, \\ (g) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}, & (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2-n}, & (i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right), \\ (j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, & (k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}, & (l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln(n!)}, \\ (l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}, & (m) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}, & (n) \sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}, \\ (o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + n^n}{(2n)!}, & (p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, & (r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}, \\ (s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, & (t) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}, & (u) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \frac{n}{2^n}. \end{array}$$

4. Ocenąć zbieżność bezwzględną szeregów:

$$\begin{array}{lll} (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \ln^2 n}, & (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n + 2^n}, & (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}}{n}, \\ (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + (-1)^{n-1}}. & & \end{array}$$

5. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ również jest zbieżny bezwzględnie.

6. Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony i $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n > 0$.

Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$ jest rozbieżny.