Économie et management.
Licence 2.
Microéconomie 3.

Année
2014 - 2015

Chapitre 1 :

Équilibre général dans une économie d'échange

Robert Jordan.

→ Modèle économique : contexte parfaitement statique.

→ Biens présents : $i = 1, \dots, l$.

→ Agents présents : $h = 1, \dots, n$.

→ Consommateurs : $h = 1, \dots, n$.

→ Chaque consommateur h : défini par une relation de préférence sur tous les plans de consommation qu'il peut réaliser.

→ Préférences de h : $\geq_h \ \forall\ h = 1, \dots, n$.

→ Caractérisation des consommateurs : fonctions d'utilité.

→ Possession initiale de quantités de biens susceptibles d'être consommés par les consommateurs.

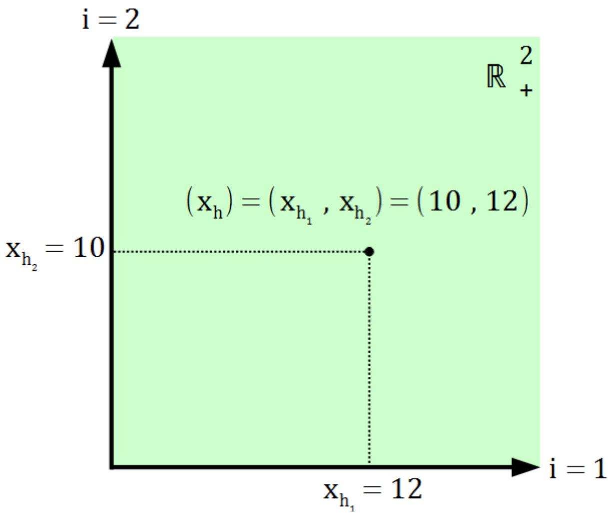
→ Dotation initiale : $(e_h) = (e_{h_1}, \dots, e_{h_i}, \dots, e_{h_l}) \in R_+^l$.

I _ Comportement des consommateurs.

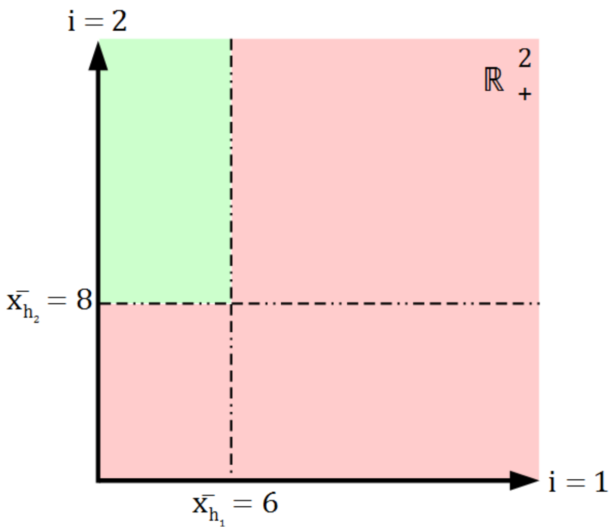
→ Nombre de consommateurs : n .
→ Nombre de biens : l .

→ Choix d'un plan de consommation : réalisation des actions de consommation des agents.
→ $(x_h) = (x_{h_1}, \dots, x_{h_i}, \dots, x_{h_l}) \in R^l_+$ avec $x_{h_i} \geq 0 \ \forall \ i = 1, \dots, n$.

→ Ensemble de consommation de h : $(x_h) \in X_h$.



→ **Espace possiblement plus restreint que l'espace positif à l dimensions**.
→ Cas : survie du consommateur garantie uniquement par la consommation de certains biens.
→ Biens de nécessité.
→ Cas : santé du consommateur en danger par la consommation excessive de certains biens.



→ Choix du consommateur prient en considération : dits physiquement réalisables pour ce consommateur.
→ $X_h = \{(x_{h_i}) \in R^2_+ \ \forall \ x_{h_1} \leq 6 \text{ et } x_{h_2} \geq 8\}$: $X_h = \{x_{h_1} \leq 6 \text{ et } x_{h_2} \geq 8\}$.

→ **Représentation : préférences du consommateur**.

→ Permettre de comparer deux plans de consommations réalisables pour lui : (x_h) et $(x'_h) \in X_h$.

→ Préférence pour un plan ou un autre : $(x_h) \underset{h}{\geq} (x'_h)$.

→ Relation binaire sur $X_h \times X_h$.

→ **Relation de préférence du consommateur : trois propriétés**.

→ **Complétude**.

→ **Transitivité**.

→ **Réflexibilité**.

→ **Complétude**.

→ Consommateur : capable de porter un jugement sur toutes les possibilités de consommation.

→ Préférences complètes sur tous les couples (x_h , x'_h) .

→ Possible de former ainsi : l'ensemble de consommation X_h .

→ **Transitivité : toujours vérifiée**.

→ Trois plans de consommation : $(x'_h) , (x''_h) , (x'''_h) \in X_h$ avec $(x'_h) \geq_h (x''_h)$ et $(x''_h) \geq_h (x'''_h)$.

→ Alors : $(x'_h) \geq_h (x'''_h)$.

→ **Réflexibilité**.

→ $(x_h) \geq_h (x_h) \ \forall \ (x_h) \in X_h$.

→ **Consommateur capable de proposer des préférences : complètes, transitives et réflexibles**.

→ Alors : **l'ensemble** h **est pré-ordonné par la relation** $\geq_h$.

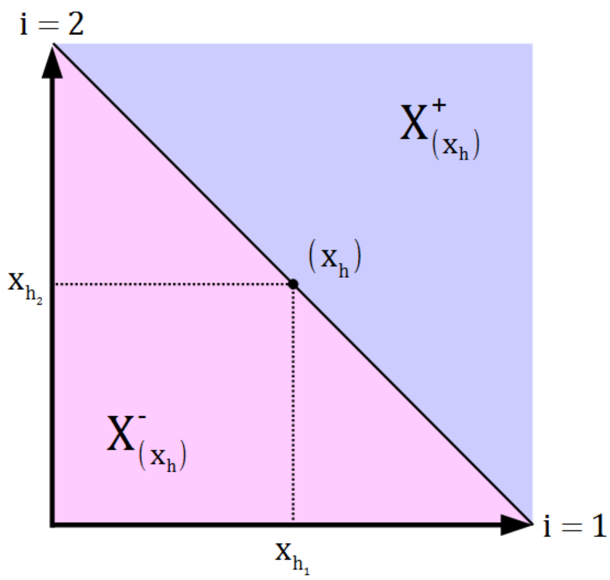
→ Consommateur : capable de classer tous les plans de consommation proposés.

→ **Représentation à l'aide de courbes : propriété supplémentaire**.

→ Relation de préférences du consommateur : continuité.

→ **Continuité**.

→ Si $\begin{cases} X^+_{x_h} = \{(x'_h) \in X_h / (x'_h) \geq_h (x_h)\} \\ X^-_{x_h} = \{(x'_h) \in X_h / (x_h) \geq_h (x'_h)\} \end{cases}$: ensembles fermés dans X_h .



→ **Continuité**.

→ **Par n'importe quel point** x_h **: possibilité de faire passer une courbe**.

→ Ensemble $X^{+}_{(x_h)}$: au dessus de cette courbe.

→ Ensemble $X^{-}_{(x_h)}$: en dessous de cette courbe.

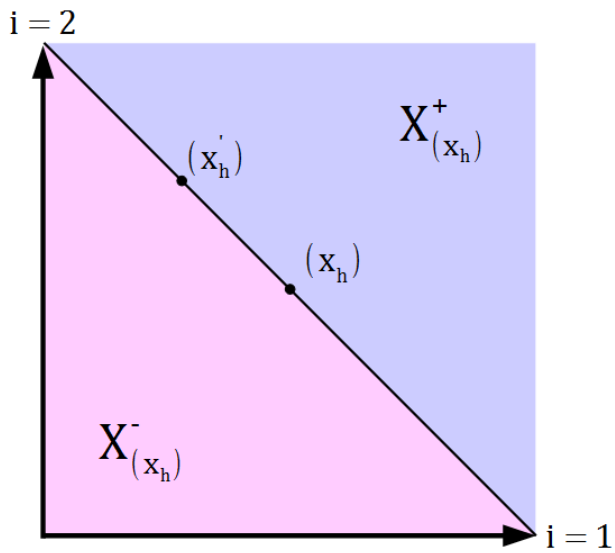
→ **Passer de l'ensemble** $X^{+}_{(x_h)}$ **à l'ensemble** $X^{-}_{(x_h)}$ **: obligé de traverser la frontière commune**.

→ **Relation de préférences du consommateur : continuité**.

→ **Représentation avec des courbes d'indifférence**.

→ Points sur la courbe : $(x_h) \sim_h (x_h^{'})$.

→ Classe d'indifférence de (x_h) : $I_{(x_h)} = \{(x_h^{'}) \in X_h \ / \ (x_h^{'}) \gtrsim_h (x_h) \text{ et } (x_h) \gtrsim_h (x_h^{'})\}$.



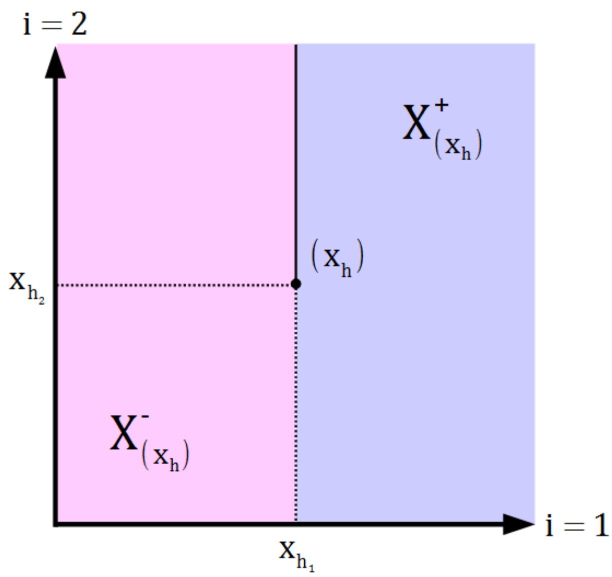
→ **Relation de préférence non-continue : relation de de préférence lexicographique**.

→ Consommateur : classe les paniers de biens en fonction de l'ordre préexistant.

→ « *Je préfère le bien 1 au bien 2, que je préfère au bien 3, etc.* ».

→ $(x_h) \text{ LP } (x_h^{'})$: si $\begin{array}{l} (i) : x_{h_1} > x_{h_1}^{'} \\ (ii) : x_{h_1} = x_{h_1}^{'} \text{ et } x_{h_2} > x_{h_2}^{'} \end{array}$.

→ Ensembles non-fermés : pas de courbes d'indifférence.



→ **Relation de préférence monotone**.

→ Si $\forall\ (x_h)$ et $(x_h^{'})$ tel que $\begin{matrix} (x_{h_i}^{'}) > (x_{h_i})\ \forall\ i = 1, \ldots, l \\ (x_h^{'}) >> (x_h) \end{matrix}$.

→ Alors $(x_h^{'}) \geq_h (x_h)$.

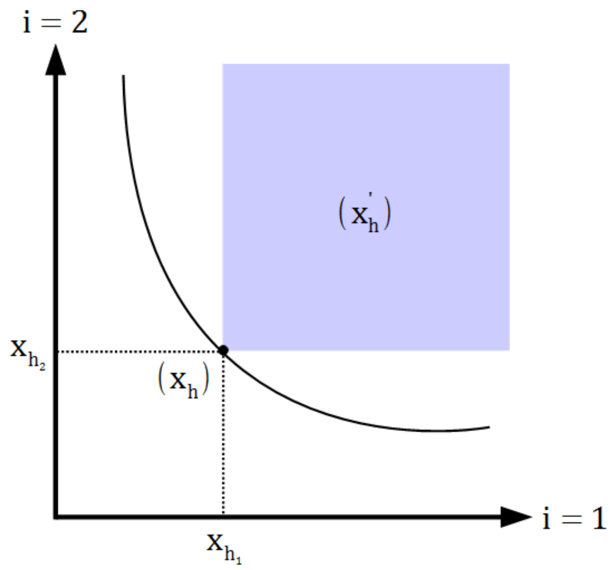
→ **Relation de préférence monotone**.

→ **Au plus le consommateur reçoit de bien, au plus il est satisfait**.

→ $X_{(x_h)}^{+}$: au-dessus de la courbe d'indifférence I passant par x_h .

→ $X_{(x_h)}^{-}$: en-dessous de la courbe d'indifférence I passant par x_h .

→ **Courbe d'indifférence : décroissante**.



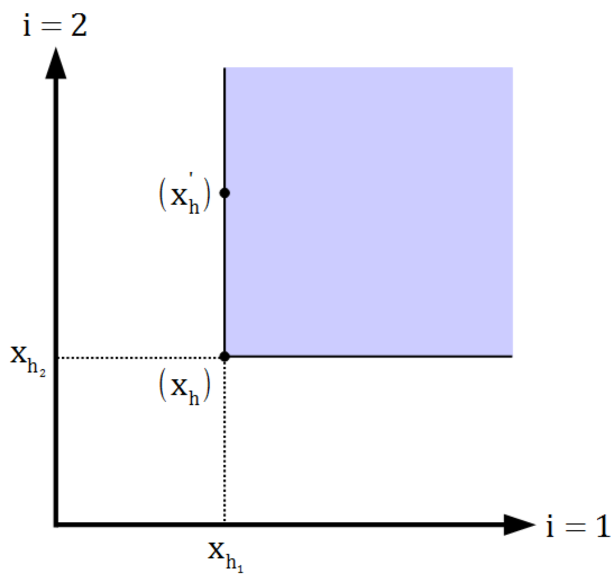
→ **Stricte monotonicité**.

→ Si $\forall\ (x_h)$ et $(x_h^{'})$ tel que $\begin{matrix} (x_{h_i}^{'}) > (x_{h_i})\ \forall\ i = 1, \ldots, l \\ (x_h) \neq (x_h^{'}) \end{matrix}$.

→ Alors $(x_h^{'}) >_h (x_h)$.

→ **Relation de préférence strictement monotone : propriété plus forte**.

→ Courbe d'indifférence passant par (x_h) : ne peut pas passer par un point du type $(x_h^{'})$.



→ **Non-saturation locale**.

→ Si $\forall\ (x_h)\ \exists\ (x_h^{'})$ tel que $\begin{matrix} \|(x_h)-(x_h^{'})\| < \varepsilon \quad \forall\ \varepsilon > 0 \\ (x_h) >_h (x_h^{'}) \end{matrix}$.

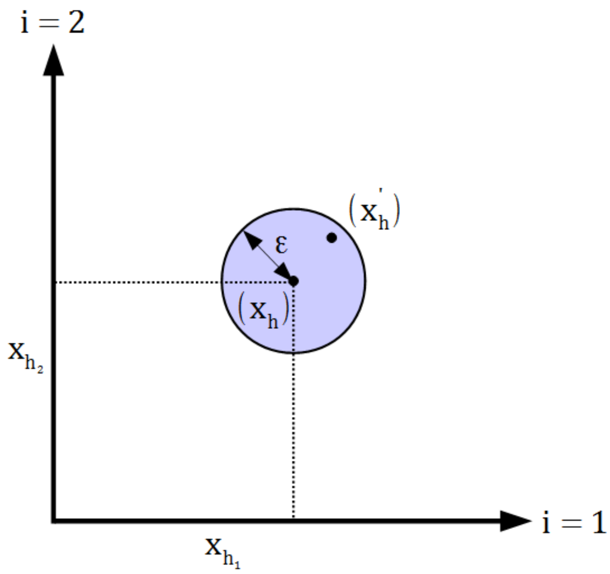
→ **Relation de préférence localement non-saturée : propriété la plus faible**.

→ Généralement : représentation des préférences d'un consommateur moyen.

→ Utilisation de la propriété de stricte monotonicité.

→ Vérifiant nécessairement : propriété de monotonicité.

→ $\text{strictement monotone} \Rightarrow \text{monotone} \Rightarrow \text{localement non saturé}$.



→ **Courbe d'indifférence : propriétés nécessaires**.

→ Complétude.

→ Réflexibilité.

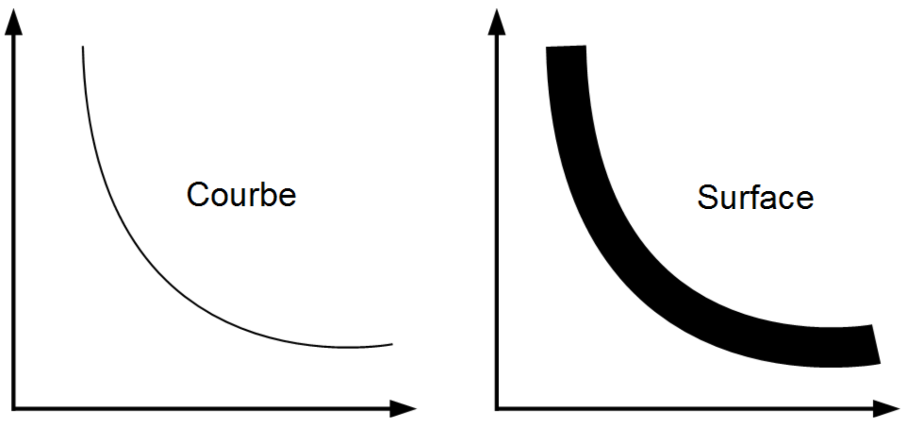
→ Transitivité.

→ Monotonicité.

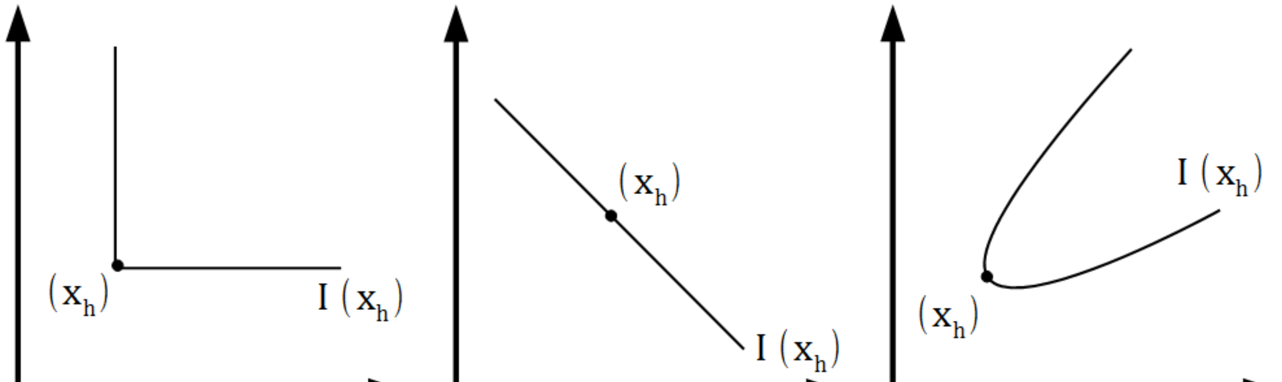
→ **Sans monotonicité : il faudrait parler de surface d'indifférence**.

→ **Différence : courbe et surface d'indifférence**.

→ Classe d'indifférence de (x_h) : pas d'épaisseur.



→ **Monotonicité de la relation de préférence : comparaison**.



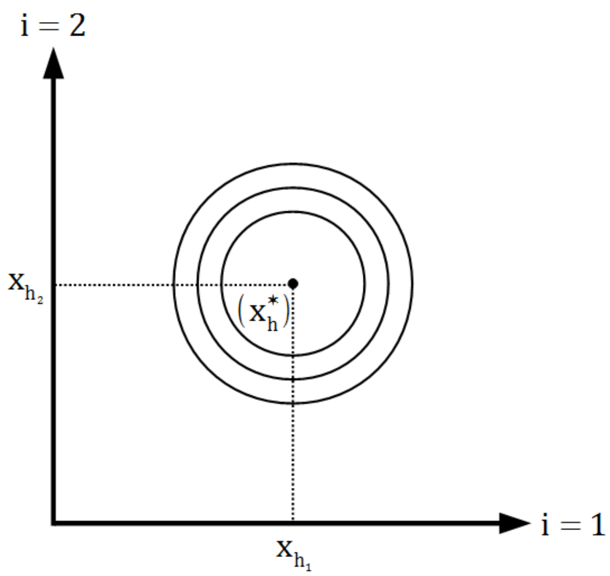
Monotone

Strictement monotone

Localement non-saturée

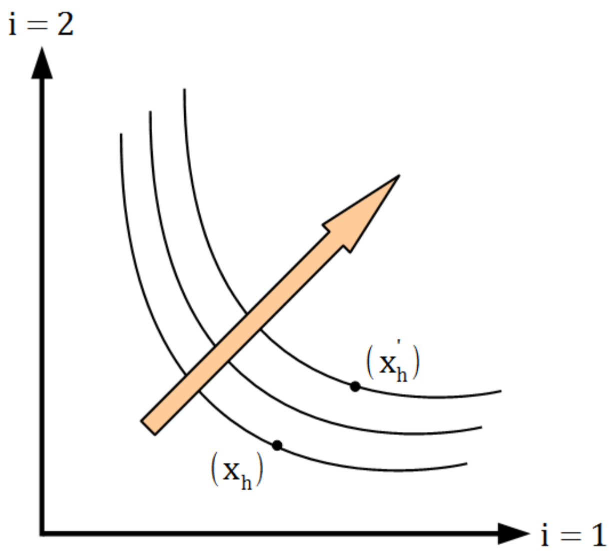
→ **Relation de préférence : saturée**.

→ $(x_h^*) >_h (x_h^{'})$.



→ **Courbes d'indifférence : niveaux de satisfactions plus élevé au plus les courbes sont à droite**.

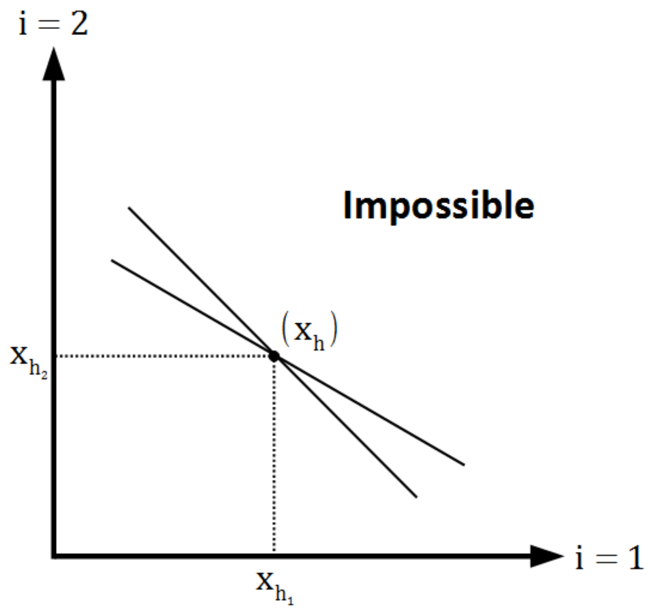
→ **Entre deux courbes d'indifférence : infinité de courbes d'indifférence**.



→ **Relation de préférence : transitivité.**

→ **Courbes d'indifférence : ne peuvent jamais se toucher.**

→ **Un point : une seule courbe d'indifférence.**

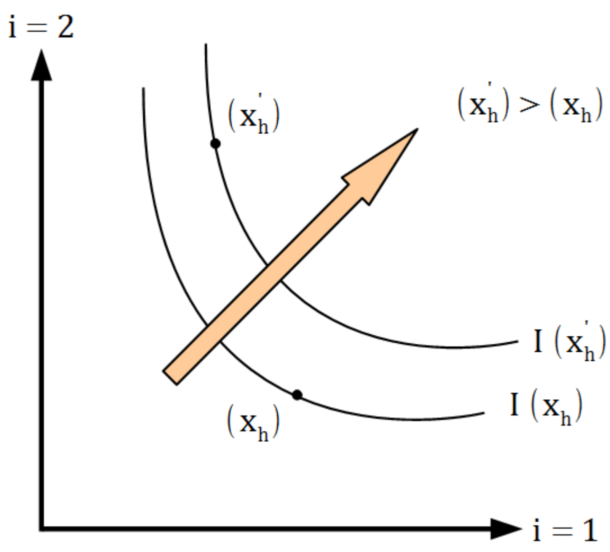


→ **Relation des préférences : propriétés nécessaires.**

→ Transitivité.

→ Continuité.

→ Stricte monotonicité.



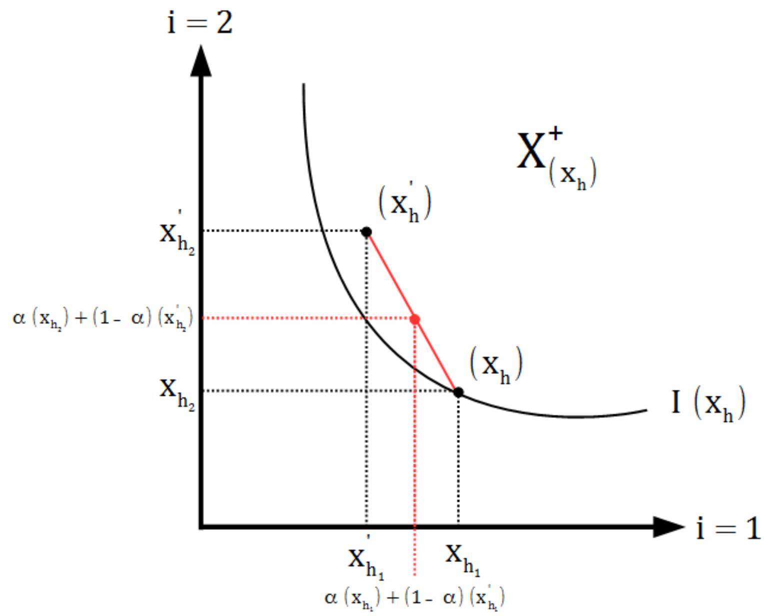
→ **Relation de préférence convexe**.

→ Si $\forall\ (x_h)$ et $(x_h^{'})$ tel que $(x_h^{'}) \geq_h (x_h)$.

→ Alors $\exists\ \alpha \in [0,1]\ |\ \alpha\ (x_h) + (1-\alpha)\ (x_h^{'}) \geq_h (x_h)$.

→ **Relation de préférence convexe**.

→ **Ensemble au-dessus de la courbe est convexe :** $X^{+}_{(x_h)}$ **convexe**.



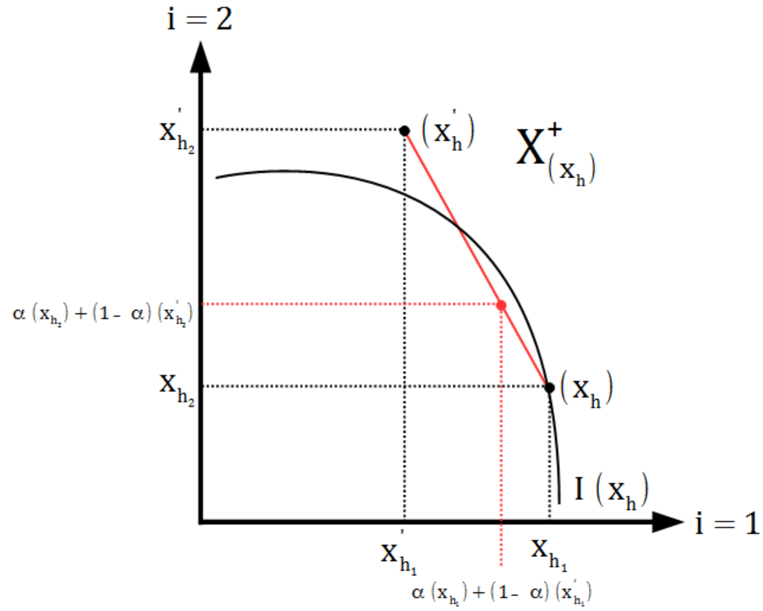
→ **Relation de préférence non-convexe**.

→ **Démonstration : trouver un seul cas où la propriété de convexité n'est pas vérifiée**.

→ Si $\forall\ (x_h)$ et $(x_h^{'})$ tel que $(x_h^{'}) \geq_h (x_h)$.

→ Alors $\exists\ \alpha \in [0,1]\ |\ \alpha\ (x_h) + (1-\alpha)\ (x_h^{'}) \leq_h (x_h)$.

→ **Ensemble au-dessus de la courbe n'est pas convexe :** $X^{+}_{(x_h)}$ **non-convexe**.



→ **Courbe d'indifférence affine : convexe**.

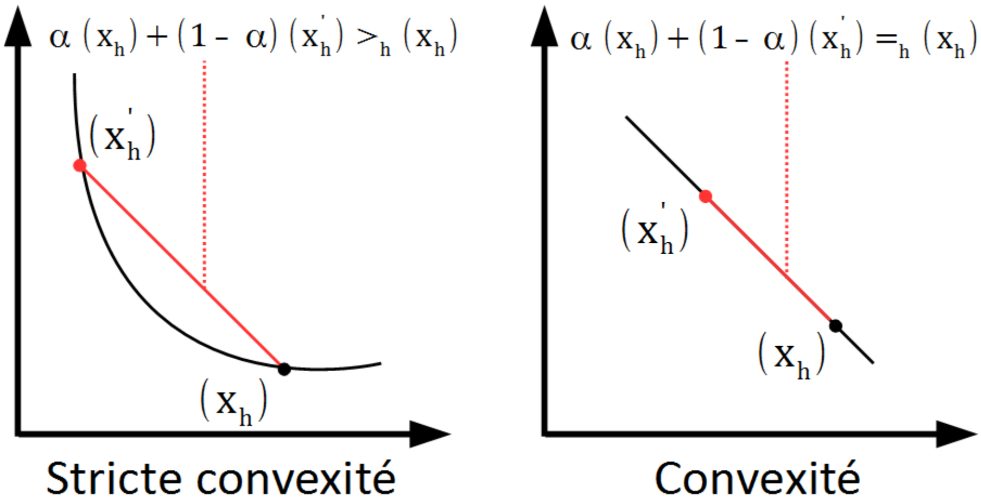
→ $\forall\ (x_h)$ et $(x_h^{'})$ tel que $(x_h^{'}) \geq_h (x_h)$: $\exists\ \alpha \in [0,1]\ |\ \alpha\,(x_h) + (1-\alpha)\,(x_h^{'}) =_h (x_h)$.

→ **Relation de préférence strictement convexe**.

→ Si $\forall\ (x_h)$ et $(x_h^{'})$ tel que $(x_h^{'}) \geq_h (x_h)$.

→ Alors $\exists\ \alpha \in\ ]\,0{,}1\,[\ |\ \alpha\,(x_h) + (1-\alpha)\,(x_h^{'}) >_h (x_h)$.

→ **Différence : stricte convexité et convexité**.



→ **Relation de préférence convexe : préférence pour la diversité**.

→ Solutions moyennes préférées aux solutions extrêmes.

→ **Relation de préférence non-convexe : préférence pour l'extrême**.

→ Solutions extrêmes préférées aux solutions moyennes.

→ **Représentation paramétrique des préférences : fonction d'utilité ordinale**.

→ $\begin{matrix} U_h(x_h) \\ (x_h) \in R_+^l \to R \end{matrix}$.

→ U_h : fonction représentant les préférences du consommateur h .

→ Si $\forall\ (x_h)$ et $(x_h^{'})$.

→ Alors $(x_h) \geq_h (x_h^{'}) \iff U_h(x_h) \geq U_h(x_h^{'})$.

→ V_h **: fonction croissante de** U_h .

→ **Préférences du consommateur représentées de la même manière**.

→ Si $\begin{matrix} V_h(x_h) = F(U_h(x_h)) \\ F^{'} > 0 \end{matrix}$.

→ Alors $(x_h) \geq_h (x_h^{'}) \iff V_h(x_h) \geq V_h(x_h^{'})$.

→ **Fonction d'utilité** U_h **: propriétés identiques à la relation des préférences**.

→ **Modifications de propriété : monotonicité et convexité**.

→ **Propriété de monotonicité**.

→ $(x_h^{'}) >> (x_h) \Rightarrow (x_h^{'}) \geq_h (x_h) \iff U_h(x_h^{'}) > U_h(x_h)$.

→ $(x_h^{'}) >> (x_h) \iff U_h(x_h^{'}) > U_h(x_h)$.

→ Stricte monotonicité : U_h admet uniquement des dérivées positives.

→ Monotonicité : U_h admet au moins une dérivée positive.

→ Localement non-saturée : $\vec{grad} \neq 0$.

→ $\vec{grad} = 0$: existence d'un point de saturation.

→ **Propriété de convexité**.

→ Si $\begin{matrix} \forall\ (x_h) \text{ et } (x_h^{'}) \text{ avec } (x_h) \geq_h (x_h^{'})\ \forall\ \alpha \in [0,1] \\ \alpha(x_h) + (1-\alpha)(x_h^{'}) \geq_h (x_h^{'}) \iff U_h(\alpha(x_h) + (1-\alpha)(x_h^{'})) \geq U_h(x'_h) \\ \iff U_h(x_h) \geq U_h(x_h^{'}) \end{matrix}$.

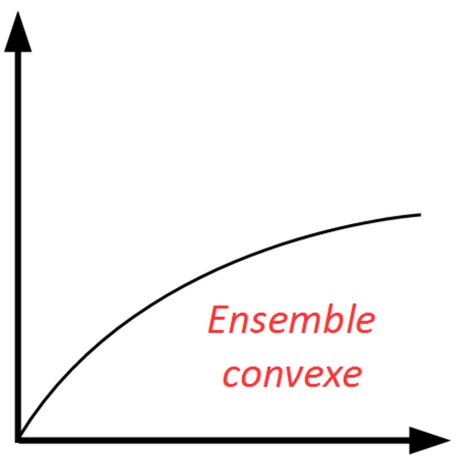
→ Alors U_h **est une fonction quasi-concave**.

→ **Préférences convexes : fonction d'utilité quasi-concave**.

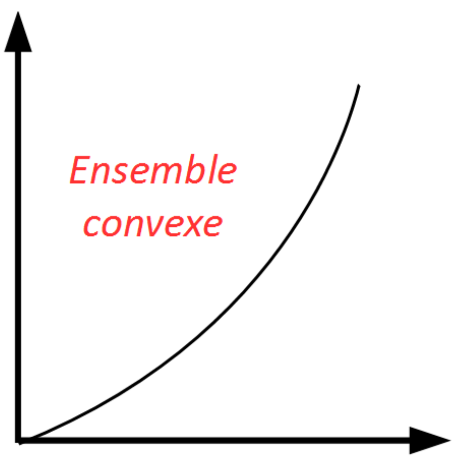
→ **Différence : fonction concave et convexe**.

→ **Concave : tous les points au-dessous de la courbe forment un ensemble convexe**.

→ **Convexe : tous les points au-dessus de la courbe forment un ensemble convexe**.



Fonction concave



Fonction convexe

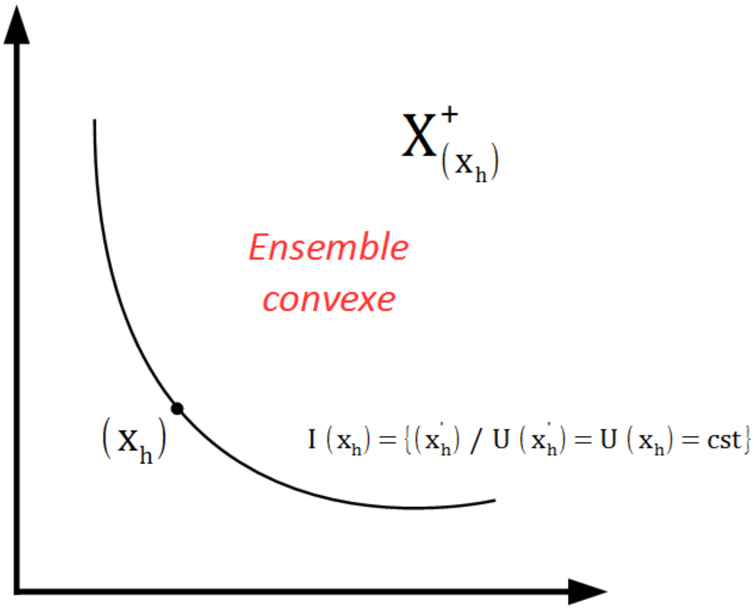
→ **Fonctions d'utilité : représentent des préférences convexes**.

→ Parfois non-concave.

→ **Critère de reconnaissance : ensemble des points se trouvant au-dessus d'une courbe de niveau de la fonction est convexe**.

→ U_h **quasi concave**.

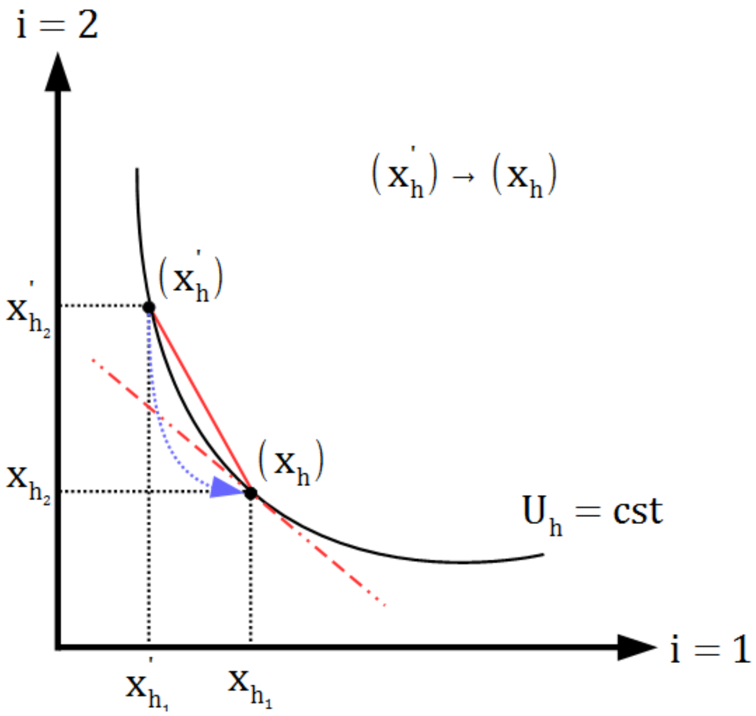
→ Si $\begin{matrix} U_h(x_h) = \bar{U}_h = cst \\ \{U(x_h^{'}) \geq U(x_h)\} \text{ convexe} \end{matrix}$.



→ $(x_h^{'})$ **tend vers** (x_h) **:** $(x_h^{'}) \to (x_h)$.

→ **Tangente en** $(x_h^{'})$ **: déplacement le long de** U_h **jusqu'à** (x_h).

→ $dU_h = \frac{dU_h}{dx_{h_1}} * dx_{h_1} + \frac{dU_h}{dx_{h_2}} * dx_{h_2} = 0$.



→ **Taux Marginal de Substitution (TMS) :** $\mathrm{TMS} = -\frac{dx_{h_2}}{dx_{h_1}} \mid \bar{U}_h = \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}}$.

→ **Proportion dans laquelle le consommateur est d'accord d'échanger un des deux bien pour garder un niveau de consommation constant.**

→ **Définition de la propriété de convexité : utilisation du calcul du TMS.**

→ **Fonction d'utilité : condition que sa dérivée soit continue.**

→ **TMS : exprimé en fonction des quantités consommées.**

→ **Préférences convexes : si.**

→ **TMS une fonction décroissante en** x_{h_1} .

→ **TMS une fonction croissante en** x_{h_2} .

→ **Utilité marginale (Um) :** $\mathrm{Um}_{h_1} = \frac{dU_h}{dx_{h_1}}$.

→ **Fonction d'utilité ordinale : aucune interprétation précise pour l'utilité marginale.**

→ $\mathrm{TMS} = \frac{\mathrm{Um}_{h_1}}{\mathrm{Um}_{h_2}}$.

→ **Applications.**

→ $U_h = x_{h_1} * x_{h_2}$.

→ Monotonicité des préférences : car x_{h_1} et x_{h_2} croissants.

→ Convexité des préférences ?

→ Calculer la valeur du TMS en n'importe quel point d'une courbe d'indifférence.

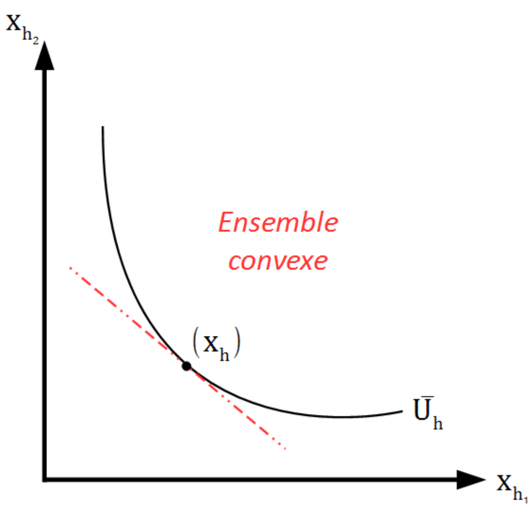
→ Mesurer la pente de la tangente en n'importe quel point.

→ TMS en fonction des quantités consommées : $\mathrm{TMS} = -\frac{dx_{h_2}}{dx_{h_1}} \mid \bar{U}_h = \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}} = \frac{x_{h_2}}{x_{h_1}}$.

→ Préférences convexes : car $\mathrm{TMS} = \frac{x_{h_2}}{x_{h_1}}$.

→ Fonction décroissante en x_{h_1} .

→ Fonction croissante en x_{h_2} .



→ $U_h = x_{h_1}^2 + x_{h_2}^2$.

→ $U_h = x_{h_1}^2 + x_{h_2}^2 = \bar{U}_h$

→ Monotonicité des préférences.

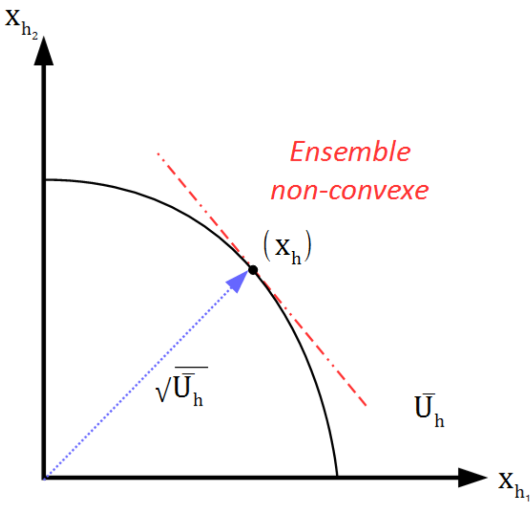
→ Convexité des préférences ?

$$\rightarrow \quad TMS = -\frac{dx_{h_2}}{dx_{h_1}} \mid \bar{U}_h = \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}} = \frac{x_{h_1}}{x_{h_2}} \quad .$$

→ Préférences non-convexes : car $TMS = 1$.

→ Fonction croissante en x_{h_1} .

→ Fonction décroissante en x_{h_2} .



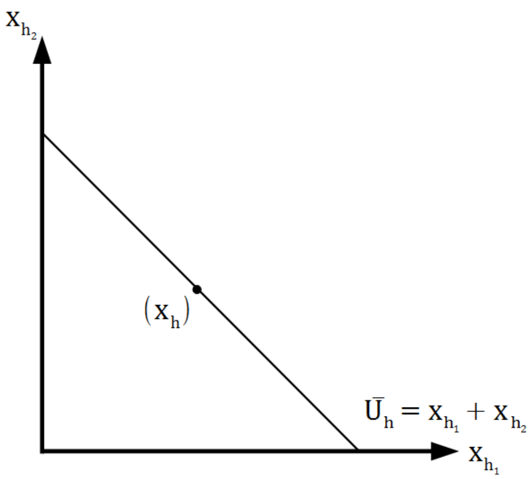
→ $U_h = x_{h_1} + x_{h_2}$.

→ Monotonicité des préférences.

→ Convexité des préférences ?

$$\rightarrow \quad TMS = -\frac{dx_{h_2}}{dx_{h_1}} \mid \bar{U}_h = \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}} = 1 \quad .$$

→ Préférences convexes (pas strictement) : car $TMS = 1$ constant.



→ **Concavifier une fonction** U_h **: utiliser une** V_h .

→ V_h **doit être positive et concave**.

→ $V_h = \sqrt{U_h}$ ou $V_h = \ln(U_h)$.

→ **Écrire** U_h **sous forme concave :** U_h **quasi-concave**.

→ **Alors : préférences convexes**.

→ Application : concavifier $U_h = x_{h_1} * x_{h_2}$.

→ $V_h = \sqrt{U_h} = x_{h_1}^{1/2} * x_{h_2}^{1/2}$ ou $V_h = \ln(U_h) = \ln(x_{h_1}) + \ln(x_{h_2})$.