Grzegorz Mika

WSTĘP DO LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI

Kraków, 19 stycznia 2014

Sesja is coming

1. Podaj definicję i pokaż przykład

1. Zdaniem logicznym nazywamy skończony ciąg symboli oraz funktorów z języka oraz nawiasów. W przypadku logiki dwuwartościowej ma ono określoną wartość logiczną, czyli jest na nim określona funkcja o wartościach 0 i 1.
Np. $2 < 3 \wedge 7|6$, $\pi \in \mathbb{R}$,
$(\mathbb{Q}, \prec) : \forall_{x,y\in\mathbb{Q}, x\neq y}\ x \prec y \Rightarrow \exists_{z\in\mathbb{Q}}\ x \neq z \neq y \wedge x \prec z \prec y$
2. Funkcją zdaniową, nazywamy schemat logiczny zawierający zmienne, które po skwantyfikowaniu bądź zastąpieniu przez symbole z języka staje się zdaniem logicznym.
Np. $x < y$, $p \in \mathbb{P}$, $(*)\ \phi(x) \wedge \phi(y) \Rightarrow \phi(x + y)$
(*) jest funkcją zdaniową ze zmiennymi uwiązanymi na wyższym niż pierwszy poziomie
3. Funktorem zdaniotwórczym nazywamy wyrażenie (spójnik), które z innym wyrażeniem zwanym argumentem funktora tworzy zdanie logiczne bądź funkcję zdaniową.
Np. $\wedge$, $\sim$, $\iff$
4. Tautologią lub prawem rachunku zdań nazywamy schemat logiczny, który jest zawsze prawdziwy niezależnie od wartości logicznych zmiennych zdaniowych.
Np. $\vdash \sim (p \wedge \sim p)$, $\vdash\ (\alpha \Rightarrow \beta) \iff (\sim \beta \Rightarrow \sim \alpha)$, $\forall_{x\in\mathbb{X}}\ \theta(x) \Rightarrow \exists_{x\in\mathbb{X}}\ \theta(x)$
5. Patrz 4.
6. Reguła wnioskowania
Niech A_1, A_2, ... , A_n będzie skończonym ciągiem dowolnych schematów logicznych. Mówimy, że $B \not\equiv A_i, i \in 1, 2, \ldots, n$, jest logiczną konsekwencją tego ciągu schematów, jeżeli dla dowolnego układu wartości logicznych tych schematów tautologią jest zdanie (*) $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \Rightarrow B$. Wtedy schemat (*) nazywamy regułą wnioskowania i zapisujemy $\left[\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}\right]$.
Np. $\frac{\alpha, \alpha\Rightarrow\beta}{\beta}$, $\frac{\alpha\Rightarrow\beta,\ \beta\Rightarrow\gamma}{\alpha\Rightarrow\gamma}$, $\frac{\sim\alpha\Rightarrow\alpha}{\alpha}$
7. Dowód "a contrario" jest formą dowodzenia logicznego polegającą na dołożeniu do założeń zaprzeczenia teza i wykazania noeprawdziwości tak powstałego schematu logicznego, czyli wykazania prawdziwości tezy. Opiera się on na tautologii $((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p) \Rightarrow q$
Np. 1)Teza: istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych
Dowód nie wprost. Załóżmy, że istnieje skończenie wiele liczb pierwszych i oznaczmy je $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$. Rozważmy liczbę postaci $(p_1 p_2 \ldots p_n) + 1$. Łatwo zauważyć, że jest to liczba naturalna, więc istnieje jej rozkład na liczby pierwsze, jednak nie dzieli się ona przez żadną z liczb $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$, czyli jest liczbą pierwszą co jest spreczne z założeniem, że $p_1\ p_2, \ldots, p_n$ był zbiorem wszystkich liczb pierwszych. $\square$
2)Teza: nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów
Dowód nie wprost. Załóżmy, że Γ jest zbiorem wszystkich zbiorów. Rozważmy taki jej podzbiór Υ, że jest on zbiorem tych elementów Γ, że nie są one swoim elementem. Wtedy Υ jest swoim elementem wtt, gdy nim nie jest, co jest sprzecznością.$\square$
3)$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$
Dowód nie wprost. Załóżmy, że
$\exists_{x,y\in\mathbb{R}} \frac{x+y}{2} > \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \iff x^2 + 2xy + y^2 > 2x^2 + 2y^2 \iff 0 > (x - y)^2$ co jest sprzecznością. $\square$
8. Kwadrat logiczny
Oznaczmy (1) $\alpha \Rightarrow \beta$, (2) $\beta \Rightarrow \alpha$, (3) $\sim \alpha \Rightarrow \sim \beta$, (4) $\sim \beta \Rightarrow \sim \alpha$, wtedy kwadratem logicznym nazywamy układ równoważności $(1) \equiv (4)$ *i* $(2) \equiv (3)$
Np. $A \subset B \iff B' \subset A'$, $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \equiv x + 1 < 0 \Rightarrow x < 0$
9. Kwantyfikator ogólny to kwantyfikator mówiący, że dana funkcja zdaniowa jest zdaniem prawdziwym dla dowolnej zmiennej.
Np. $\forall$
10. Kwantyfikator szczegółowy (egzystencjalny) to kwantyfikator mówiący, że

istnieje takie podstawienie zmiennej by funkcja zdaniowa została zamieniona w zdanie prawdziwe.
Np. $\exists$
11. $A \cup B = \{x \in \Omega_{A,B} : x \in A \vee x \in B\}$
12. $A \cap B = \{x \in \Omega_{A,B} : x \in A \wedge x \in B\}$
13. $A \setminus B = \{x \in \Omega_{A,B} : x \in A \wedge x \notin B\}$
14. $A \div B = \{x \in \Omega_{A,B} : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \ \wedge x \notin A\} = \{x \in \Omega_{A,B} : x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$
15. $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \Leftrightarrow x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2$
16. Zbiorem potęgowym zbioru A nazywamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A, tzn. $\Xi \in \mathbb{P}(A) \iff \Xi \subset A$
Np. $\mathbb{P}\{0,1\} = \{\emptyset, \{1\}, \{0\}, \{0,1\}\}$, $\mathbb{P}\{1,\{1\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1,\{1\}\}\}$
17. Uniwersum nazywamy zbiór, do którego należą wszystkie rozpatrywane elementy, czyli w którym zawierają się wszystkie badane zbiory.
18. Continuum definiowane jest jako moc zbioru liczb rzeczywistych i oznaczane przez gotyckie $\mathfrak{c}$.
Np. $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \mathfrak{c}$, niech $\mathbb{B}$ oznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych niebędących pierwiastkiem niezerowego wielomianu o współczynnikach wymiernych, wtedy $|\mathbb{B}| = \mathfrak{c}$, $|\mathbb{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$
19. Parą uporządkowaną nazywamy element (x,y) taki, że (x,y)=$\{\{x\}, \{x,y\}\}$, gdzie x jest poprzednikiem, a y następnikiem pary.
20. Funkcją nazywamy relację $f \subset X \times Y$ taką, że dla każdego x$\in \mathbb{D}(f)$ zbiór f_x jest jednoelementowy, czyli
$f - funkcja \iff \forall_{x \in \mathbb{D}(f)} \forall_{y_1, y_2 \in Y} ((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$
21. Funkcja jest iniekcją, wtt gdy dowolnemu elementowi z dziedziny przyporządkowuje dokładnie jedną wartość, czyli
$f - iniekcja \iff \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{D}(f)}\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
22. Funkcja jest surjekcją, wtt gdy obrazem dziedziny przez funkcję jest cała przeciwdziedzina lub równoważnie gdy dowolny element przeciwdziedziny należy do zbioru wartości tej funkcji, czyli
$f - surjekcja \iff \mathcal{R}(f) = Y \iff \forall_{y \in Y} \exists_{x \in \mathbb{D}(f)} : f(x) = y$
23. Funkcja jest bijekcją, wtt gdy jest równocześnie surjekcją i iniekcją.
24. Izomorfizmem nazywamy bijektywne odwzorowanie zbioru na zbiór zachwujące relację i elementy wyróżnione.
25. Obraz zbioru przez funkcję
Niech $f : X \to Y$ i $A \subset X$, wtedy $f(A) = \{y \in Y : \exists_{x \in X}\ x \in A \wedge f(x) = y\}$
Np. Niech χ będzie funkcją charakterystyczną zbioru liczb wymiernych.
Wtedy $\chi(\mathbb{C}) = \{0,1\},\ \chi(\mathbb{N}) = \{1\},\ \chi(\mathbb{B}) = \{0\}$
26. Przeciwobraz zbioru przez funkcję
Niech $f : X \to Y$ i $B \subset Y$, wtedy $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$
Np. $\chi(\{0\}) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q},\ \chi(\{1\}) = \mathbb{Q}$
27-32. Relację $R \subset X^2$ nazywamy
27) zwrotną, gdy $\forall_{x \in X}\ xRx$
28) przeciwzwrotną, gdy $\forall_{x \in X}\ \sim xRx$
29) symetryczną, gdy $\forall_{x,y \in X}\ (xRy \Rightarrow yRx)$
30) przeciwsymetryczną, gdy $\forall_{x,y \in X}\ ((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$
31) antysymetryczną, gdy $\forall_{x,y \in X}\ (xRy \Rightarrow \sim yRx)$
32) przechodnią, gdy $\forall_{x,y,z \in X}\ ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$
Np. 27) relacja identycznościowa, relacja słabej mniejszości 28) relacja silnej mniejszości, relacja ojcostwa 29) relacja identycznościowa, relacja równoległości prostych 30) relacja silnej mniejszości, relacja $R \subset \mathbb{N}$: $x = 2y$ 31)relacja słabej mniejszości, relacja inkluzji 31)relacja podzielności , relacja inkluzji w danej rodzinie zbiorów
33. Relacją spójną nazywamy relację $R \subset X^2$ taką, że
$\forall_{x,y \in X}\ xRy \vee yRx \vee x = y$
Np. relacja słabej nierówności na zbiorze liczb rzeczywistych,
34. Relacją równoważności nazywamy relację $R \subset X^2$, która jest równocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia.
Np. relacja równości, relacja przystawania modulo

35. Relacją częściowego porządku nazywamy relację $R \subset X^2$, która jest równocześnie zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.
Np. relacja inkluzji na zbiorze potęgowym, dowolny porządek liniowy
36-43. Niech $(\mathfrak{X}, \prec)$ będzie zbiorem z porządkiem częściowym oraz niech $A \subset \mathfrak{X}$. Wtedy element $a \in A$ nazywamy:
36) największym, gdy $a \in A \wedge \forall_{x \in A}\ x \prec a$
37) najmniejszym, gdy $a \in A \wedge \forall_{x \in A}\ a \prec x$
38) maksymalnym, gdy $a \in A \wedge \forall_{x \in A}\ a \prec x \Rightarrow x = a$
39) minimalnym, gdy $a \in A \wedge \forall_{x \in A}\ x \prec a \Rightarrow a = x$
40) ograniczeniem górnym, gdy $\forall_{x \in A}\ x \prec a$
41) ograniczeniem dolnym, gdy $\forall_{x \in A}\ a \prec x$
42) kresem górnym, gdy $(\forall_{x \in A}\ x \prec a) \wedge (\forall_{y \in \mathfrak{X}}(\forall_{z \in A}\ z \prec y) \Rightarrow a \prec y)$
43) kresem dolnym, gdy $(\forall_{x \in A}\ a \prec x) \wedge (\forall_{y \in \mathfrak{X}}(\forall_{z \in A}\ y \prec z) \Rightarrow y \prec a)$
44. Łańcuch
Niech $(\mathfrak{X}, \prec)$ będzie zbiorem z częściowym porządkiem. Wtedy zbiór $A \subset \mathfrak{X}$ nazywamy łańcuchem, jeśli $(A, \prec|_A)$ jest porządkiem liniowym.
Np. Zbiór $(\mathbb{N}, \leqslant)$ jest łańcuchem, dowolny zbiór jednoelementowy jest łańcuchem.
45. Antyłańcuch
Niech $(\mathfrak{X}, \prec)$ będzie zbiorem z częściowym porządkiem. Wtedy zbiór $A \subset \mathfrak{X}$ nazywamy antyłańcuchem, jeśli $\forall_{x,y \in A}\ (x \neq y \Rightarrow \sim (x \prec y) \wedge \sim (y \prec x))$
Np. 1) dowolny zbiór jednoelementowy jest antyłańcuchem
2) niech $\mathfrak{X} = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$. Określmy relację $f \prec g \iff \forall_{x \in \mathbb{R}}\ f(x) \leqslant g(x)$. Wtedy antyłańcuchem jest zbiór $\{\chi_{\{n\}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ z tak określonym porządkiem.
46. Porządek izomorficzny
Niech (X,$\prec$) i (Y,$\preceq$) będą zbiorami z częściowym porządkiem. Wtedy bijekcję $\varsigma : X \to Y$ taką, że $\forall_{x,y \in X} x \prec y \Rightarrow \varsigma(x) \preceq \varsigma(y)$ nazywamy izomorfizmem, a zbiory te izomorficznymi.
Np. 1)Niech $\mathbb{P}$ będzie zbiorem liczb pierwszych Wtedy zbiory $(\mathbb{N}, \leqslant), (\mathbb{P}, \leqslant)$ są izomorficzne. Izomorfizmem jest funkcja $\varsigma : n \mapsto p_n$, gdzie p_n jest n-tą liczbą pierwszą.
2) Niech $\mathbb{H}_n$ będzie zbiorem n pierwszych liczb naturalnych. Wtedy zbiory $(\mathbb{N}, \leqslant), (\{\mathbb{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \subset)$ są izomorficzne. Izomorfizmem jest funkcja $\varsigma : n \mapsto \mathbb{H}_n$.
47. Porządek częściowy $(\mathfrak{X}, \prec)$ nazywamy liniowym, jeśli jest spójny, tj.
$\forall_{x,y \in \mathfrak{X}}\ x \prec y \vee y \prec x \vee x = y$
Np. $(\mathbb{Z}, \leqslant)$
48. Porządek częściowy $(\mathfrak{X}, \prec)$ nazywamy gęstym, jeśli
$\forall_{x,y \in \mathfrak{X}}\ x \prec y \Rightarrow \exists_{z \in \mathfrak{X}}\ x \neq z \neq y \wedge x \prec z \prec y$
Np. $(\mathbb{Q}, \leqslant)$
49. Porządek częściowy $(\mathfrak{X}, \prec)$ nazywamy ciągłym, jeśli jest gęsty i każdy podzbiór ograniczony z góry (dołu) ma również kres górny (dolny)
Np. $(\mathbb{R}, \leqslant)$
50. Porządek częściowy $(\mathfrak{X}, \prec)$ nazywamy dobrym, jeśli jest liniowy i każdy niepusty podzbiór $\mathfrak{X}$ ma element najmniejszy
Np. $(\mathbb{N}, \leqslant)$
51. Selektor
Niech $\mathfrak{A}$ będzie rodziną zbiorów. Wtedy zbiór S taki, że $S \subset \bigcup \mathfrak{A}$ i $\forall_{A \in \mathfrak{A}}\ |A \cap S| = 1$ nazywamy selektorem rodziny $\mathfrak{A}$.
Np. 1) Selektorem rodziny zbiorów $\{\mathbb{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbiór $\{0\}$, przy założeniu że $0 \in \mathbb{N}$ 2) Selektorem rodziny $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbiór $\mathbb{N}$.
52. Podział zbioru
Patrz: 53. Partycja zbioru
53. Partycja zbioru
Zbiór $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, gdzie $x_1 \subset X,\ x_2 \subset X, \ldots$ nazywamy partycją zbioru X, jeśli (1) $\forall_{i,j \in \{1,2,\ldots\} \wedge i \neq j\}}\ x_i \cap x_j = \emptyset$ oraz (2) $\bigcup \mathfrak{X} = X$
Np. Niech $X = \{1, 2, 3\}$, wtedy partcją zbioru X jest na przykład zbiór $\mathfrak{X} = \{\{1, 2, 3\}\}$ albo zbiór $\mathfrak{X}' = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.
54. Klasą abstrakcji elementu x względem relacji równoważności $R \subset X^2$ nazywamy zbiór $[x]_R = \{y \in X :\ yRx\}$

$Np.$1) Niech $xRy \iff x = y$, wtedy $\left[\frac{1}{2}\right]_R = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\}$ 2) Niech $xRy \iff x + y = 5$ i $R \subset \mathbb{N}^2$, wtedy $[2]_R = \{3\}$
55. Zbiorem ilorazowym danej relacji $R \subset X^2$ nazywamy zbiór wszystkich klas abstrakcji (warstw) i oznaczamy $X_{/R}$, czyli $X_{/R} = \{[x]_R\}_{x \in X}$
$Np.$ 1) Niech R będzie relacją zdefiniowaną w 54.1 oraz utożsamijmy klasę abstrakcji elementu z nim samym, tzn $x := \{[x]_R\}$, wtedy $X_{/R} = \mathbb{R}$(*) 2) Niech R będzie relacją zdefiniowaną w 54.2, wtedy $X_{/R} = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.

(*)zbiór ten nie jest całkowicie bezsensowny z uwagi na fakt, że pozwala nam na zapis $\frac{1}{2}$ zamiast $\frac{2}{4}$ bez utraty znaczenia

56. Działania uogólnione na zbiorach
Niech T, X będą dowolnymi niepustymi zbiorami oraz niech $\mathfrak{A} = \mathbb{P}(X)$. Wtedy funkcję $f\colon T \to \mathfrak{A}$ nazywamy indeksowaną rodziną zbiorów i zapisujemy $(A_\tau)_{\tau \in T}$
(1) $x \in \bigcup_{\tau \in T} A_\tau \iff \exists_{\tau \in T}\ x \in A_\tau$
(2) $x \in \bigcap_{\tau \in T} A_\tau \iff \forall_{\tau \in T}\ x \in A_\tau$
(3) Produktem kartezjańskim indeksowanej rodziny zbiorów nazywamy zbiór wszystkich funkcji $f\colon T \to \bigcup_{\tau \in T} A_\tau$ takich, że $\forall_{\tau \in T}\ f(\tau) \in A_\tau$

2. Podaj treść i przykład zastosowania

(1) Hipoteza continuum

$$\aleph_1 = \mathfrak{c}$$

(2) Reguła symplifikacji

$$\frac{\alpha}{\beta \Rightarrow \alpha}$$

(3) Reguła tożsamości

$$\frac{\alpha}{\alpha}$$

(4) Reguła Dunsa Scotusa

$$\frac{\sim \alpha}{\alpha \Rightarrow \beta}$$

(5) Reguła Claviusa

$$\frac{\sim \alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha}$$

(6) Reguła odrywania

$$\frac{\alpha,\ \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$

(7) Reguła sylogizmu warunkowego

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta,\ \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}$$

(8) Lemat Kuratowskiego- Zorna
Niech $(\mathfrak{X}, \prec)$ będzie takim zniorem z porządkiem częściowym, że każdy łańcuch ma górne ograniczenie. Wtedy w $((X), \prec)$ istnieje element maksymalny.
(9) Twierdzenie Zermelo
Dla dowolnego zbioru A istnieje taki porządek $\prec$, że zbiór $(A, \prec)$ jest dobrze uporządkowany
(10) Aksjomat wyboru
Każda rodzina niepustych i parami rozłącznych zbiorów ma selektor

3. Podaj treść, przykład zastosowania i schemat dowodu

(1) Zasada abstrakcji

— jeśli $R \subset X^2$ jest relacją równoważności to zbiór ilorazowy $X_{/R}$ jest partycją zbioru X
— dla każdej partycji $\mathfrak{X}$ zbioru X relacja zdeginiowana $xRy \iff \exists_{A \in \mathfrak{X}}\ x \in A \wedge y \in A$ jest relacją równoważności

(2) Twierdzenie o rozszerzaniu funkcji
Niech T będzie zbiorem indeksów, $A = \{A_t\}_{t \in T}$ taką rodzną zbiorów, że $\bigcup_{t \in T} A_t = X$, natomiast niech $F = \{f_t \colon A_t \to Y\}$ taką rodziną funkcji, że $\forall_{t,k \in T}\ f_t|A_t \cap A_k = f_k|A_t \cap A_k$. Wted y istnieje dokładnie jedna funkcja $\mathfrak{f} \colon X \to Y$ taka, że $\forall_{t \in T}\ \mathfrak{f}|A_t = f_t$
(3) Twierdzenie o izomorfiźmie kanonicznym
Niech $(\mathfrak{X}, \prec)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Wtedy istnieje rodzina $A \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X})$ taka, że porządki $(\mathfrak{X}, \prec)$ i $(A, \subset)$ są izomorficzne.
(4) Lemat Banacha o punkcie stałym
Niech $\psi \colon \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ będzie funkcją montoniczną, tzn. $\forall_{A,B \in \mathbb{P}(X)}\ A \subset B \Rightarrow \psi(A) \subset \psi(B)$. Wtedy istnieje punkt stały tego odwzorowana, tzn. $\exists_{C \in \mathbb{P}(X)}\ \psi(C) = C$
(5) Twierdzenie Cantora
Dla dowolnego zbioru A zachodzi $|A| < |\mathbb{P}(A)|$
(6) Twierdzenie Cantora- Bernsteina
Dla dowolnych zbiorów A, B jeśli $|A| \leqslant |B|$ i $|B| \leqslant |A|$ to $|A| = |B|$