Nazwisko:XXXXXXXXXXXXXXX Indeks:XXXXX

Nr testu: 37-000	**Kurs: Algebra Liniowa**
Kod testu	**Test: egzamin końcowy**
☐ ☐ ☐	**Termin: 2011.02.04**
☐ ☐ ☐	**Sala: 1094**
☐ ☐ ☐	**Seria: 115:2010.02.05:309**

******* Nim rozpoczniesz, przepisz numer testu**
******* i kod testu na formularz odpowiedzi**

—***—

1. Znak permutacji $\sigma \in S_n$ wynosi:
A) $(-1)^{\sum_{k=1}^{m}(l_k-1)}$, gdzie $l_1, \ldots, l_m$ to długości cykli, na które rozkłada się σ.
B) $(-1)^{\sum_{k=1}^{m} l_k}$, gdzie $l_1, \ldots, l_m$ to długości cykli, na które rozkłada się σ.
C) $(-1)^m$, gdzie m to liczba cykli, na które rozkłada się σ.
D) $\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.
E) $\prod_{1 \le i,j \le n, i \neq j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

2. Dla grup cyklicznych G, H rzędu odpowiednio m i n grupa $G \times H$
A) jest cykliczna wtw $NWD(m,n) = 1$.
B) jest zawsze cykliczna rzędu mn.
C) jest zawsze cykliczna rzędu $NWW(m,n)$.
D) jest zawsze cykliczna rzędu $NWD(m,n)$.
E) ma zbiór generatorów co najwyżej dwuelementowy.

3. Grupa wszystkich symetrii trójkąta równobocznego
A) ma 6 elementów.
B) ma 3 elementy.
C) jest cykliczna.
D) jest izomorficzna z grupą permutacji trzech elementów.
E) ma wyłącznie elementy rzędu 2.

4. Jeśli $\mathbb{Z}_n$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n jest ciałem, to:
A) n musi być liczbą pierwszą.
B) n musi być potęgą liczby pierwszej.
C) n może być dowolną potęgą liczby pierwszej.
D) n może być dowolną liczbą naturalną.
E) n może być iloczynem dwu różnych liczb pierwszych.

5. Ciałami są:
A) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ – zbiór liczb naturalnych
B) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – zbiór liczb całkowitych
C) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ – zbiór liczb wymiernych
D) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – zbiór liczb rzeczywistych
E) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – zbiór liczb zespolonych

6. Ciała tworzą następujące podzbiory ciała $\mathbb{R}$:
A) zbiór liczb rzeczywistych postaci $x + y\sqrt{2}$, gdzie $x, y \in \mathbb{Q}$.
B) zbiór liczb rzeczywistych postaci $x + y\sqrt{4}$, gdzie $x, y \in \mathbb{Q}$.
C) zbiór liczb rzeczywistych postaci $x + y\sqrt[3]{2}$, gdzie $x, y \in \mathbb{Q}$.
D) zbiór liczb rzeczywistych postaci $x + y\sqrt[3]{4}$, gdzie $x, y \in \mathbb{Q}$.
E) zbiór liczb rzeczywistych postaci $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, gdzie $x, y, z \in \mathbb{Q}$

7. Dla pierwiastka $c \in \mathbb{C}$ wielomianu $w(z) \in \mathbb{C}[z]$ zachodzi:
A) $w(c) = 0$.
B) $w(\overline{c}) = 0$.
C) wielomian $z - c$ dzieli $w(z)$.
D) wielomian $z - \overline{c}$ dzieli $w(z)$.
E) wielomian $(z-c)(z-\overline{c})$ dzieli $w(z)$.

8. Dla $a, b \in \mathbb{R}^n$ zachodzi:
A) $\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$.
B) $\|a+b\| = \|a\| + \|b\|$.
C) $|\langle a, b\rangle| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$.
D) $|\langle a, b\rangle| = \|a\| \cdot \|b\|$.
E) $|\langle a, b\rangle| = \|a\| \cdot \|b\|$, jeśli istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ taka że $a = \lambda \cdot b$.

9. Dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o wszystkich współczynnikach równych co najmniej 2 zachodzi:
A) $\det A \leqslant \operatorname{per} A$.
B) $\operatorname{per} A \leqslant \det A$.
C) $\operatorname{Tr} A \leqslant \det A$.
D) $\operatorname{Tr} A \leqslant \operatorname{per} A$.
E) $\operatorname{per} A \leqslant \operatorname{Tr} A$.

10. Macierz $P(\sigma) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutacji $\sigma \in S_n$ zadana przez:

$$P(\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } j = \sigma(i), \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

spełnia:
A) $\det P(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.
B) $\det P(\sigma) = 1$.
C) $\operatorname{per} P(\sigma) = 1$.
D) $|\det P(\sigma)| = |\operatorname{per} P(\sigma)|$.
E) $\operatorname{Tr} P(\sigma) = n$.

11. Objętość bryły rozpiętej na punktach $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,2)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,2,2) \in \mathbb{R}^3$ to:
A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 6.
E) $\frac{1}{2}$.

12. Podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nad $\mathbb{R}$ są:
A) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 0\}$.
B) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 1\}$.
C) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) \leqslant 1\}$.
D) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : |f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})| < \aleph_0\}$.
E) zbiór funkcji ciągłych.

13. Dla $X, Y \subseteq \mathbb{V}$ zachodzi:
A) jeśli $X \subseteq Y$, to $\operatorname{Lin}(X) \leqslant \operatorname{Lin}(Y)$.
B) $\operatorname{Lin}(X \cap Y) = \operatorname{Lin}(X) \cap \operatorname{Lin}(Y)$.
C) $\operatorname{Lin}(X \cup Y) = \operatorname{Lin}(X) + \operatorname{Lin}(Y)$.
D) $\operatorname{Lin}(X \cup Y) \leqslant \operatorname{Lin}(X) + \operatorname{Lin}(Y)$.
E) $\operatorname{Lin}(X \cup Y) = \operatorname{Lin}(X) \oplus \operatorname{Lin}(Y)$.

14. Wymiar przestrzeni wektorowej $(\mathbb{K}^{m\times n} : +, \cdot)$ nad $\mathbb{K}$ to:
A) mn.
B) $m^2 + n^2$.
C) $(m+n)^2$.
D) $m+n$.
E) $|m-n|$.

15. Zaznacz przekształcenia liniowe.
A) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takie, że $f(x) = Ax$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
B) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takie, że $f(x) = Ax + b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ oraz $b \in \mathbb{R}^m$.
C) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ takie, że $f(\alpha) = \alpha(0)$.
D) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ takie, że $f(\alpha) = \alpha(1)$.
E) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ takie, że $f(\alpha) = \alpha(0) + \alpha(1)$.

16. Dla przekształcenia liniowego $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ zachodzi:
A) $\operatorname{im} f \leqslant \mathbb{W}$.
B) $\ker f \leqslant \mathbb{V}$.
C) $\ker f \leqslant \operatorname{im} f$.
D) $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{V}$.
E) $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{W}$.

17. Dla rodziny $\{\mathbb{V}_t\}_{t\in T}$ przestrzeni wektorowych zachodzi:
A) $\bigoplus_{t\in T} \mathbb{V}_t \leqslant \prod_{t\in T} \mathbb{V}_t$.
B) $\bigoplus_{t\in T} \mathbb{V}_t \simeq \prod_{t\in T} \mathbb{V}_t$, o ile T jest skończony.
C) $\bigoplus_{t\in T} \mathbb{V}_t \simeq \prod_{t\in T} \mathbb{V}_t$.
D) $\bigoplus_{t\in T} \mathbb{V}_t \simeq \bigcup_{t\in T} \mathbb{V}_t$.
E) $\bigoplus_{t\in T} \mathbb{V}_t \leqslant \bigcup_{t\in T} \mathbb{V}_t$.

18. Dla $\mathbb{V} \leqslant \mathbb{W}$ zachodzi:
A) $\dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{V}/\mathbb{W} = \dim \mathbb{V}$.
B) $\dim \mathbb{V} + \dim \mathbb{V}/\mathbb{W} = \dim \mathbb{W}$.
C) $\dim \mathbb{V} \leqslant \dim \mathbb{W}$.
D) $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}$.
E) $\dim \mathbb{V} + \dim \mathbb{V}/\mathbb{W} = \dim \mathbb{W}$.

19. W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}_n[x]$ stopnia co najwyżej n, wielomian x^n w bazie $(1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+ \ldots + x^n)$ ma postać:
A) $[0, 0, \ldots, 0, 0, -1, 1]$.
B) $[1, 1, \ldots, 1, 1]$.
C) $[1, 0, 0, \ldots, 0, 0]$.
D) $[1, 1, 0, 0, \ldots, 0, 0]$.
E) $[-1, 1, 0, 0, \ldots, 0, 0]$.

20. Dla przestrzeni wektorowej $\mathbb{V}$ zachodzi:
A) $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}^*$ jeśli $\dim \mathbb{V} < \infty$.
B) $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}^{**}$ jeśli $\dim \mathbb{V} < \infty$.
C) $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}^*$.
D) $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}^{**}$.
E) $\mathbb{V}$ jest izomorficzna z podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{V}^*$.

21. Macierz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ma rząd k wtedy i tylko wtedy gdy:
A) A ma dokładnie k liniowo niezależnych kolumn.
B) A ma dokładnie k liniowo niezależnych wierszy.
C) wymiar obrazu odwzorowania $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ wyznaczonego przez A wynosi k.
D) wymiar jądra odwzorowania $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ wyznaczonego przez A wynosi k.
E) wymiar jądra odwzorowania $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ wyznaczonego przez A wynosi $n-k$.

22. Przy $\alpha \in \mathbb{R}$ wartości własne macierzy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zadanej wzorem

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

A) 1, dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$.
B) 1, dla $\alpha = 2\pi$.
C) -1, dla $\alpha = \pi$.
D) $\cos\alpha - i\sin\alpha$, dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$.
E) $\cos\alpha + i\sin\alpha$, dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$.

23. Liczba liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jest równa
A) liczbie klatek Jordana w macierzy Jordana $J = U^{-1}AU$ macierzy A.
B) liczbie różnych wartości własnych macierzy A.
C) n^2.
D) n.
E) rzędowi macierzy A.

24. Gdy $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest izometrią liniową, to f ma macierz postaci (w pewnej bazie ortonormalnej):
A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$.
B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$.
C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$.
D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

25. Jeśli $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą ortogonalną, to:
A) $A^T = A^{-1}$.
B) $A^T = A$.
C) $|\det A| = 1$.
D) $\det A = 1$.
E) A jest macierzą pewnej izometrii liniowej.