

Chapitre 1 :

Équilibre général dans une économie d'échange

→ Modèle économique : contexte parfaitement statique.

→ Biens présents : $i = 1, \dots, l$.

→ Agents présents : $h = 1, \dots, n$.

→ Consommateurs : $h = 1, \dots, n$.

→ Chaque consommateur h : défini par une relation de préférence sur tous les plans de consommation qu'il peut réaliser.

→ Préférences de h : $\succeq_h \quad \forall h = 1, \dots, n$.

→ Caractérisation des consommateurs : fonctions d'utilité.

→ Possession initiale de quantités de biens susceptibles d'être consommés par les consommateurs.

→ Dotation initiale : $(e_h) = (e_{h_1}, \dots, e_{h_l}, \dots, e_{h_l}) \in \mathbb{R}_+^l$.

I _ Comportement des consommateurs.

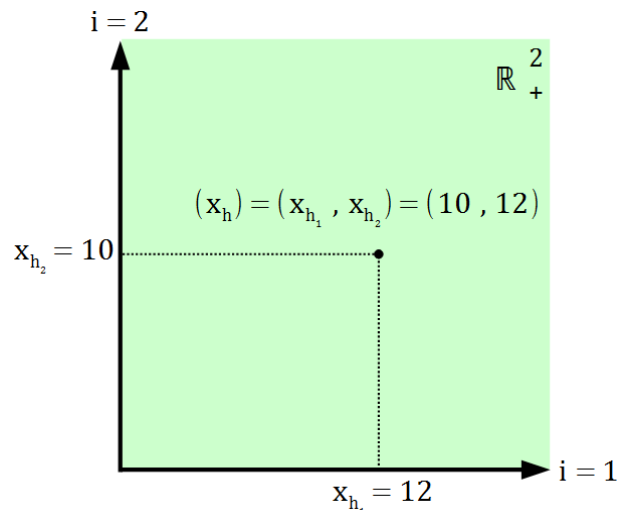
→ Nombre de consommateurs : n .

→ Nombre de biens : l .

→ Choix d'un plan de consommation : réalisation des actions de consommation des agents.

→ $(x_h) = (x_{h_1}, \dots, x_{h_l}, \dots, x_{h_l}) \in \mathbb{R}_+^l$ avec $x_{h_i} \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$.

→ Ensemble de consommation de h : $(x_h) \in X_h$.

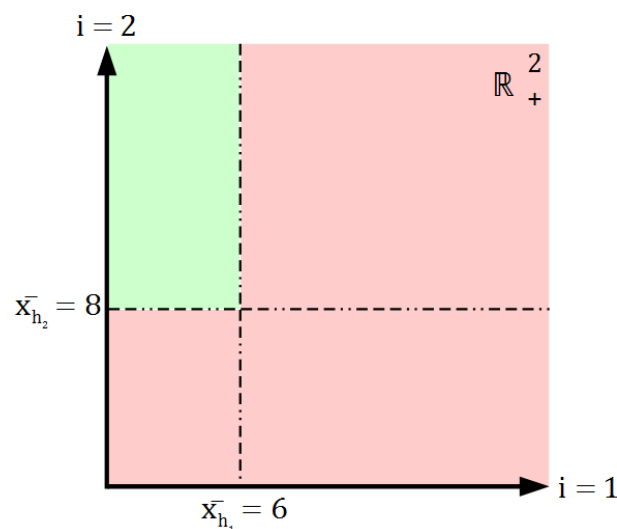


→ **Espace possiblement plus restreint que l'espace positif à l dimensions.**

→ Cas : survie du consommateur garantie uniquement par la consommation de certains biens.

→ Biens de nécessité.

→ Cas : santé du consommateur en danger par la consommation excessive de certains biens.



→ Choix du consommateur prioritaire en considération : dits physiquement réalisables pour ce consommateur.

→ $X_h = \{(x_{h_i}) \in \mathbb{R}_+^2 \ \forall x_{h_1} \leq 6 \text{ et } x_{h_2} \geq 8\}$: $X_h = \{x_{h_1} \leq 6 \text{ et } x_{h_2} \geq 8\}$.

→ **Représentation : préférences du consommateur.**

→ Permettre de comparer deux plans de consommations réalisables pour lui : (x_h) et $(x'_h) \in X_h$.

→ Préférence pour un plan ou un autre : $(x_h) \geq_h (x'_h)$.

→ Relation binaire sur $X_h \times X_h$.

→ **Relation de préférence du consommateur : trois propriétés.**

→ **Complétude.**

→ **Transitivité.**

→ **Réflexibilité.**

→ **Complétude.**

→ Consommateur : capable de porter un jugement sur toutes les possibilités de consommation.

→ Préférences complètes sur tous les couples (x_h, x'_h) .

→ Possible de former ainsi : l'ensemble de consommation X_h .

→ **Transitivité : toujours vérifiée.**

→ Trois plans de consommation : $(x'_h), (x''_h), (x'''_h) \in X_h$ avec $(x'_h) \geq_h (x''_h)$ et $(x''_h) \geq_h (x'''_h)$.

→ Alors : $(x'_h) \geq_h (x'''_h)$.

→ **Réflexibilité.**

→ $(x_h) \geq_h (x_h) \forall (x_h) \in X_h$.

→ **Consommateur capable de proposer des préférences : complètes, transitives et réflexibles.**

→ Alors : l'ensemble X_h est pré-ordonné par la relation $\geq_h$.

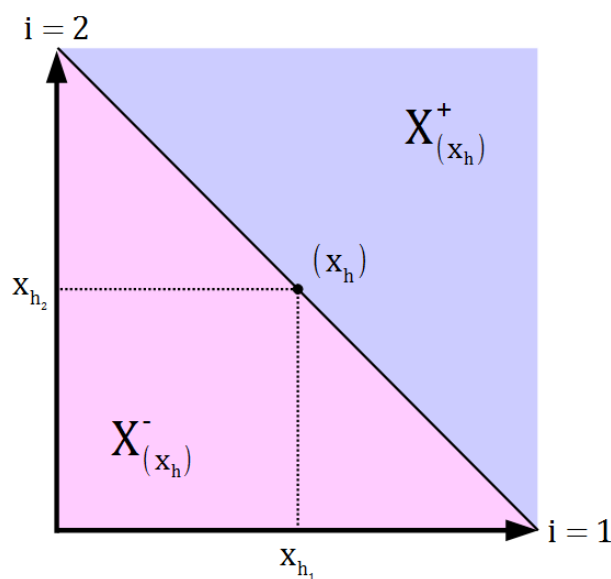
→ Consommateur : capable de classer tous les plans de consommation proposés.

→ **Représentation à l'aide de courbes : propriété supplémentaire.**

→ Relation de préférences du consommateur : continuité.

→ **Continuité.**

→ Si $\begin{cases} X_{x_h}^+ = \{(x'_h) \in X_h / (x'_h) \geq_h (x_h)\} \\ X_{x_h}^- = \{(x'_h) \in X_h / (x_h) \geq_h (x'_h)\} \end{cases}$: ensembles fermés dans X_h .



→ **Continuité.**

→ Par n'importe quel point x_h : possibilité de faire passer une courbe.

→ Ensemble $X_{(x_h)}^+$: au dessus de cette courbe.

→ Ensemble $X_{(x_h)}^-$: en dessous de cette courbe.

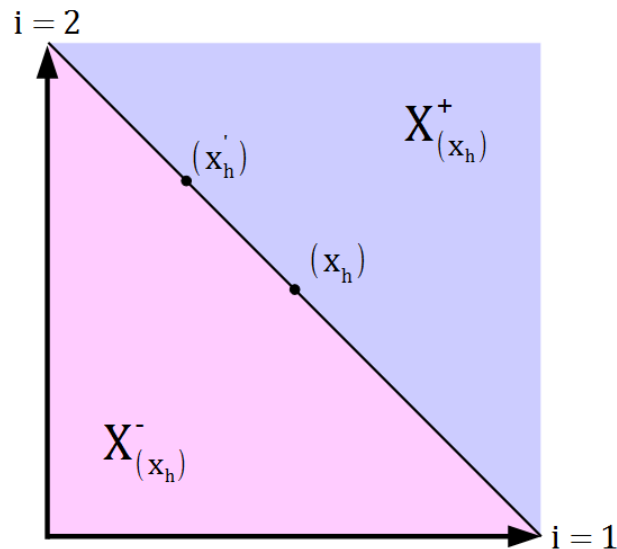
→ Passer de l'ensemble $X_{(x_h)}^+$ à l'ensemble $X_{(x_h)}^-$: obligé de traverser la frontière commune.

→ **Relation de préférences du consommateur : continuité.**

→ Représentation avec des courbes d'indifférence.

→ Points sur la courbe : $(x_h) \sim_h (x'_h)$.

→ Classe d'indifférence de (x_h) : $I_{(x_h)} = \{(x'_h) \in X_h / (x'_h) \geq_h (x_h) \text{ et } (x_h) \geq_h (x'_h)\}$.



→ **Relation de préférence non-continue : relation de de préférence lexicographique.**

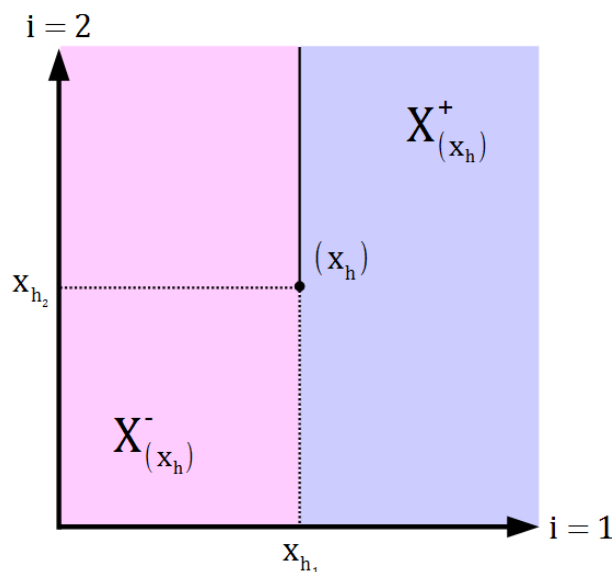
→ Consommateur : classe les paniers de biens en fonction de l'ordre préexistant.

→ « Je préfère le bien 1 au bien 2, que je préfère au bien 3, etc. ».

→ (x_h) LP (x'_h) : si

- (i) : $x_{h_1} > x'_{h_1}$.
- (ii) : $x_{h_1} = x'_{h_1}$ et $x_{h_2} > x'_{h_2}$.

→ Ensembles non-fermés : pas de courbes d'indifférence.



→ **Relation de préférence monotone.**

→ Si $\forall (x_h)$ et (x'_h) tel que $(x'_h) > (x_h) \forall i = 1, \dots, l$.
 $(x'_h) \gg (x_h)$

→ Alors $(x'_h) \geq_h (x_h)$.

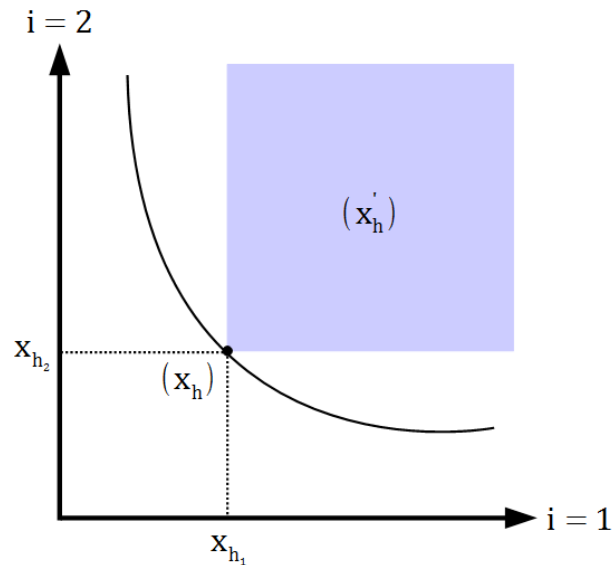
→ **Relation de préférence monotone.**

→ **Au plus le consommateur reçoit de bien, au plus il est satisfait.**

→ $X^+_{(x_h)}$: au-dessus de la courbe d'indifférence I passant par x_h .

→ $X^-_{(x_h)}$: en-dessous de la courbe d'indifférence I passant par x_h .

→ **Courbe d'indifférence : décroissante.**



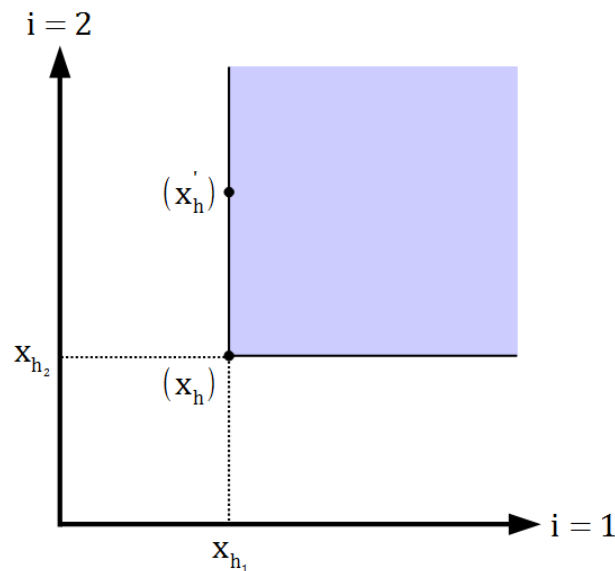
→ **Stricte monotonicité.**

→ Si $\forall (x_h)$ et (x'_h) tel que $(x'_h) > (x_h) \forall i = 1, \dots, l$.
 $(x_h) \neq (x'_h)$

→ Alors $(x'_h) >_h (x_h)$.

→ **Relation de préférence strictement monotone : propriété plus forte.**

→ Courbe d'indifférence passant par (x_h) : ne peut pas passer par un point du type (x'_h) .



→ **Non-saturation locale.**

→ Si $\forall (x_h) \exists (x'_h)$ tel que $\|(x_h) - (x'_h)\| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$
 $(x_h) >_h (x'_h)$.

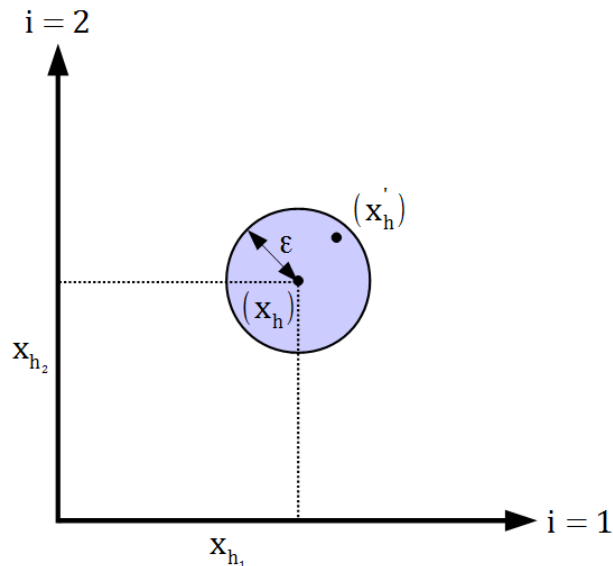
→ **Relation de préférence localement non-saturée : propriété la plus faible.**

→ Généralement : représentation des préférences d'un consommateur moyen.

→ Utilisation de la propriété de stricte monotonicité.

→ Vérifiant nécessairement : propriété de monotonicité.

→ strictement monotone $\Rightarrow$ monotone $\Rightarrow$ localement non saturé .



→ **Courbe d'indifférence : propriétés nécessaires.**

→ Complétude.

→ Réflexibilité.

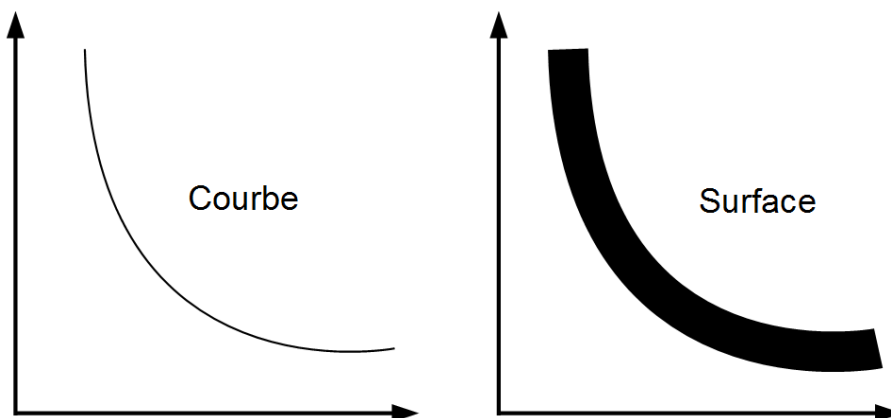
→ Transitivité.

→ Monotonicité.

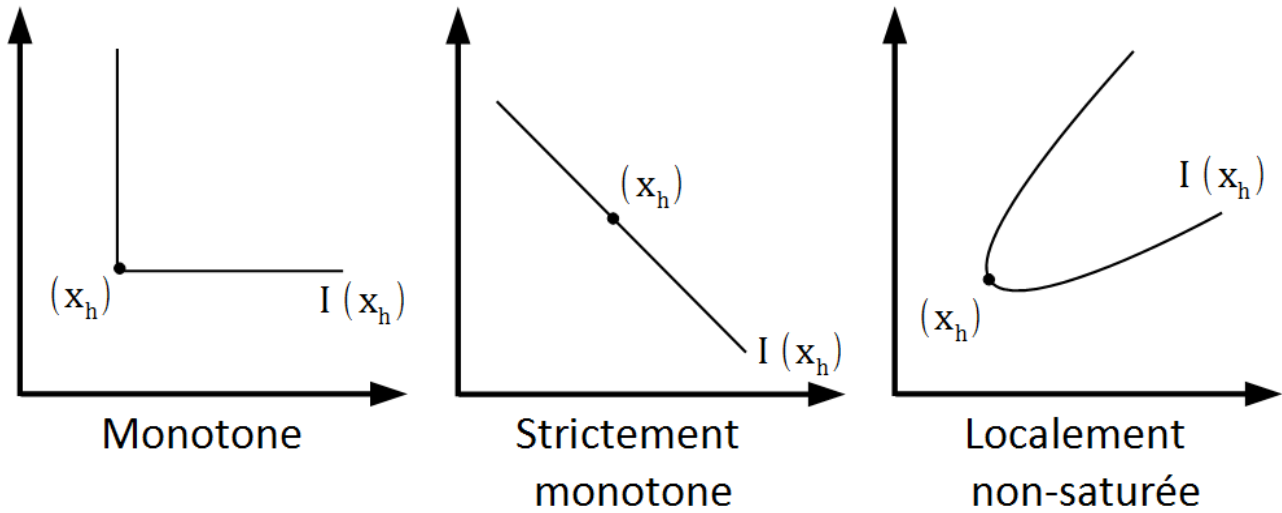
→ **Sans monotonicité : il faudrait parler de surface d'indifférence.**

→ **Différence : courbe et surface d'indifférence.**

→ Classe d'indifférence de (x_h) : pas d'épaisseur.

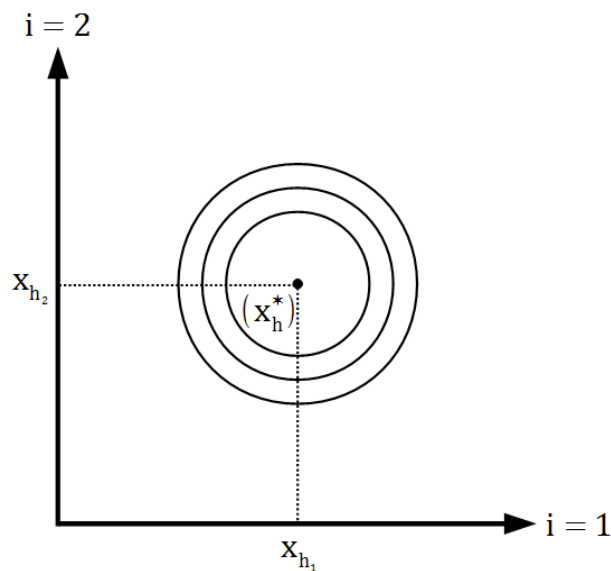


→ Monotonicité de la relation de préférence : comparaison.



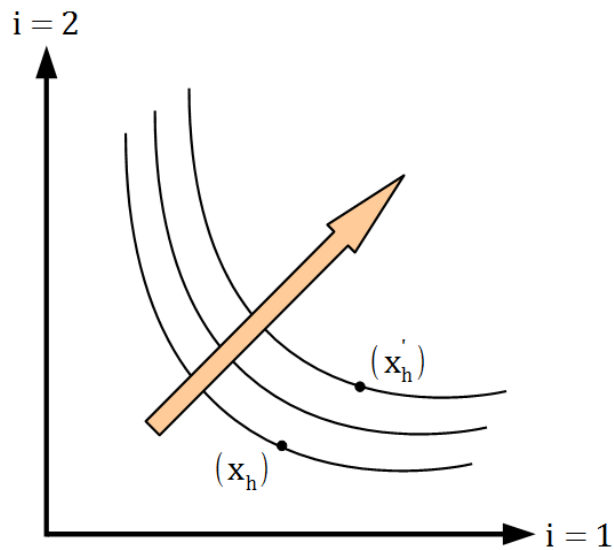
→ Relation de préférence : saturée.

$$\rightarrow (x_h^*) >_h (x_h')$$



→ Courbes d'indifférence : niveaux de satisfactions plus élevé au plus les courbes sont à droite.

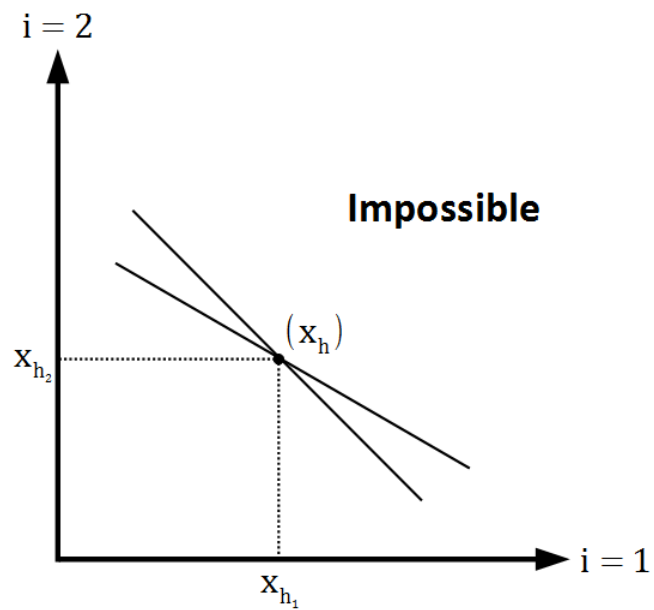
→ Entre deux courbes d'indifférence : infinité de courbes d'indifférence.



→ Relation de préférence : transitivité.

→ Courbes d'indifférence : ne peuvent jamais se toucher.

→ Un point : une seule courbe d'indifférence.

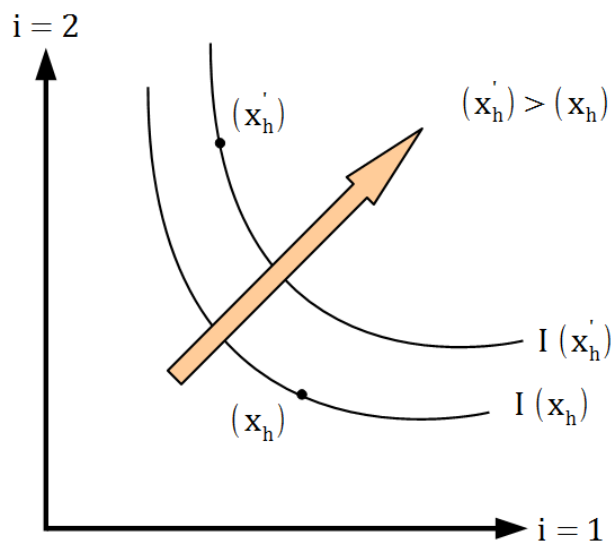


→ Relation des préférences : propriétés nécessaires.

→ Transitivité.

→ Continuité.

→ Stricte monotonicité.



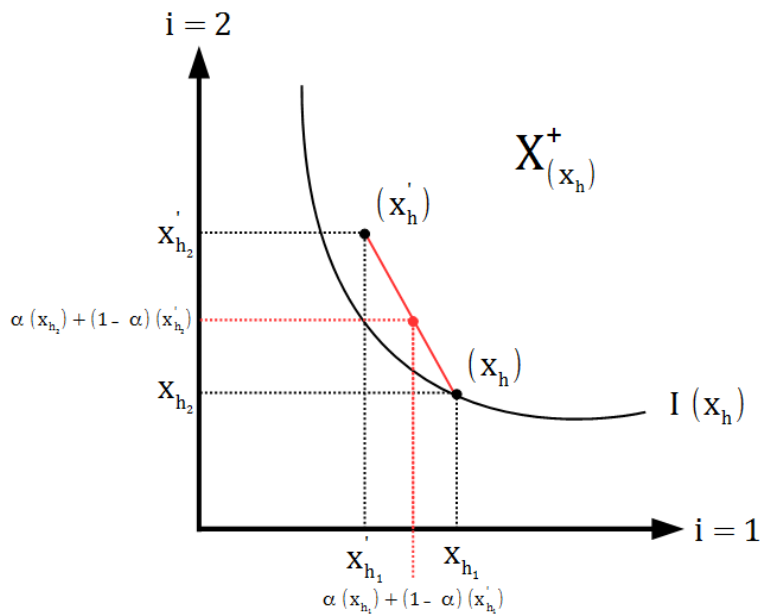
→ Relation de préférence convexe.

→ Si $\forall (x_h)$ et (x'_h) tel que $(x'_h) \geq_h (x_h)$.

→ Alors $\exists \alpha \in [0,1] \mid \alpha (x_h) + (1-\alpha) (x'_h) \geq_h (x_h)$.

→ Relation de préférence convexe.

→ Ensemble au-dessus de la courbe est convexe : $X^+_{(x_h)}$ convexe.



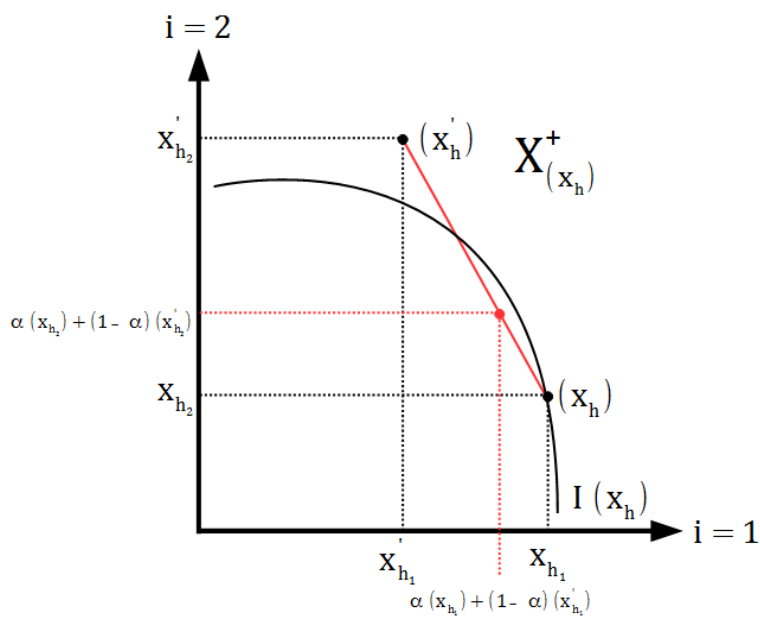
→ Relation de préférence non-convexe.

→ Démonstration : trouver un seul cas où la propriété de convexité n'est pas vérifiée.

→ Si $\forall (x_h)$ et (x'_h) tel que $(x'_h) \geq_h (x_h)$.

→ Alors $\exists \alpha \in [0,1] \mid \alpha (x_h) + (1-\alpha) (x'_h) \leq_h (x_h)$.

→ Ensemble au-dessus de la courbe n'est pas convexe : $X^+_{(x_h)}$ non-convexe.



→ **Courbe d'indifférence affine : convexe.**

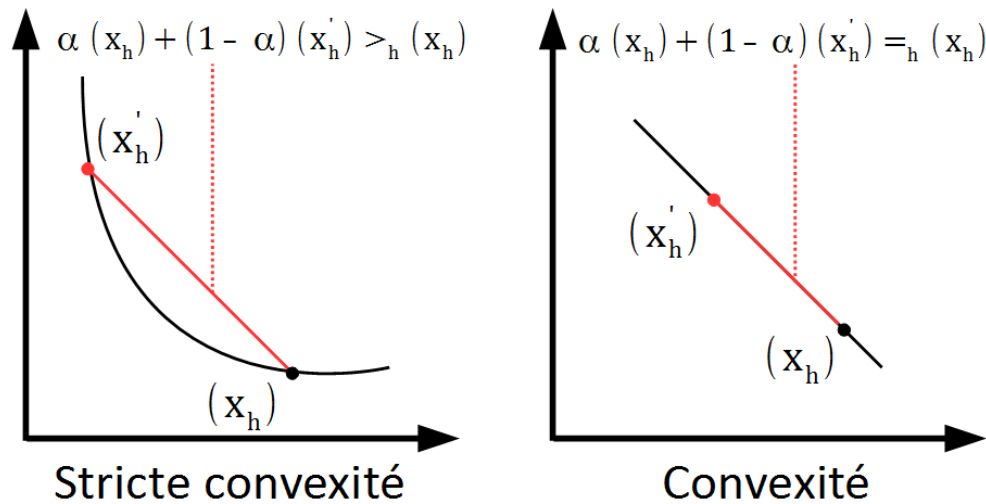
→ $\forall (x_h)$ et (x'_h) tel que $(x'_h) \geq_h (x_h)$: $\exists \alpha \in [0,1] \mid \alpha (x_h) + (1-\alpha) (x'_h) =_h (x_h)$.

→ **Relation de préférence strictement convexe.**

→ Si $\forall (x_h)$ et (x'_h) tel que $(x'_h) \geq_h (x_h)$.

→ Alors $\exists \alpha \in]0,1[\mid \alpha (x_h) + (1-\alpha) (x'_h) >_h (x_h)$.

→ **Différence : stricte convexité et convexité.**



→ **Relation de préférence convexe : préférence pour la diversité.**

→ Solutions moyennes préférées aux solutions extrêmes.

→ **Relation de préférence non-convexe : préférence pour l'extrême.**

→ Solutions extrêmes préférées aux solutions moyennes.

→ **Représentation paramétrique des préférences : fonction d'utilité ordinale.**

$$\rightarrow U_h(x_h) \\ (x_h) \in \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R} .$$

→ U_h : fonction représentant les préférences du consommateur h .

$$\rightarrow \text{Si } \forall (x_h) \text{ et } (x'_h) .$$

$$\rightarrow \text{Alors } (x_h) \geq_h (x'_h) \Leftrightarrow U_h(x_h) \geq U_h(x'_h) .$$

→ V_h : fonction croissante de U_h .

→ **Préférences du consommateur représentées de la même manière.**

$$\rightarrow \text{Si } V_h(x_h) = F(U_h(x_h)) \\ F' > 0 .$$

$$\rightarrow \text{Alors } (x_h) \geq_h (x'_h) \Leftrightarrow V_h(x_h) \geq V_h(x'_h) .$$

→ **Fonction d'utilité U_h : propriétés identiques à la relation des préférences.**

→ **Modifications de propriété : monotonicité et convexité.**

→ **Propriété de monotonicité.**

$$\rightarrow (x'_h) \gg (x_h) \Rightarrow (x'_h) \geq_h (x_h) \Leftrightarrow U_h(x'_h) > U_h(x_h) .$$

$$\rightarrow (x'_h) \gg (x_h) \Leftrightarrow U_h(x'_h) > U_h(x_h) .$$

→ Stricte monotonicité : U_h admet uniquement des dérivées positives.

→ Monotonicité : U_h admet au moins une dérivée positive.

→ Localement non-saturée : $\vec{\text{grad}} \neq 0$.

→ $\vec{\text{grad}} = 0$: existence d'un point de saturation.

→ **Propriété de convexité.**

$$\forall (x_h) \text{ et } (x'_h) \text{ avec } (x_h) \geq_h (x'_h) \forall \alpha \in [0,1]$$

$$\rightarrow \text{Si } \alpha (x_h) + (1 - \alpha) (x'_h) \geq_h (x'_h) \Leftrightarrow U_h(\alpha (x_h) + (1 - \alpha) (x'_h)) \geq U_h(x'_h) . \\ \Leftrightarrow U_h(x_h) \geq U_h(x'_h)$$

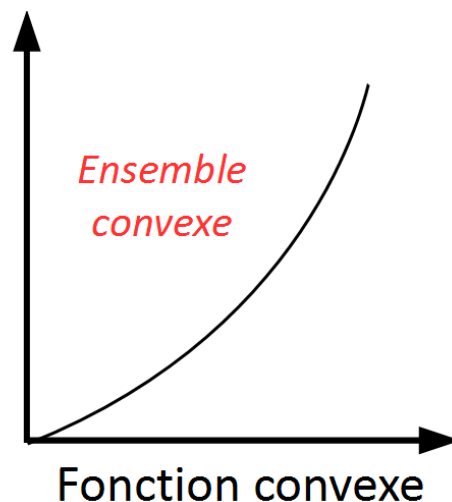
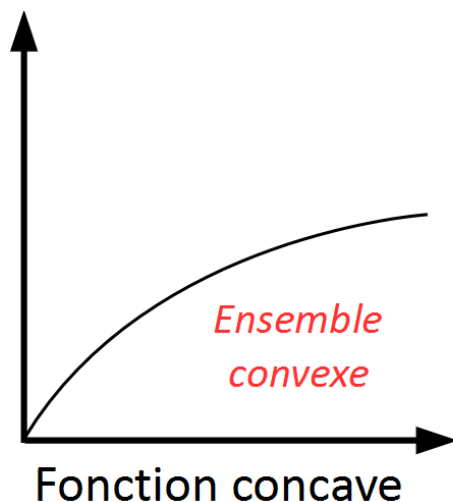
→ Alors U_h est une fonction quasi-concave.

→ **Préférences convexes : fonction d'utilité quasi-concave.**

→ **Différence : fonction concave et convexe.**

→ **Concave** : tous les points au-dessous de la courbe forment un ensemble convexe.

→ **Convexe** : tous les points au-dessus de la courbe forment un ensemble convexe.



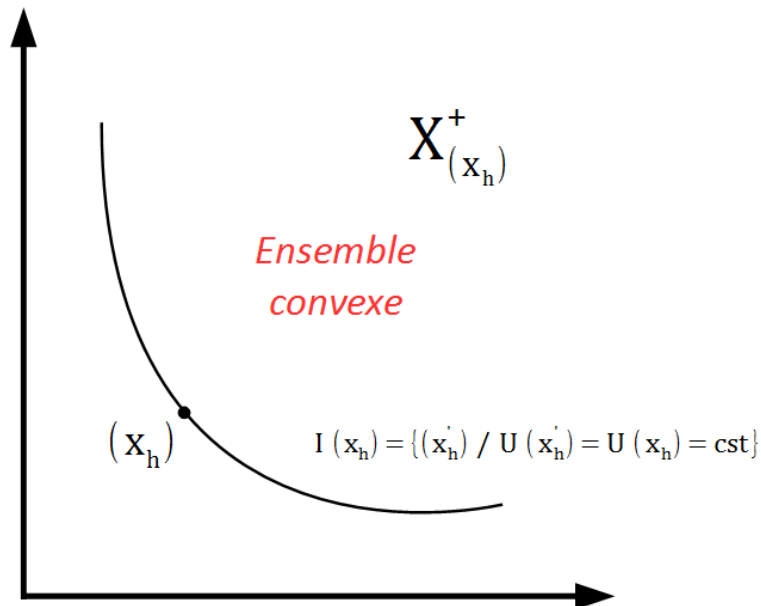
→ Fonctions d'utilité : représentent des préférences convexes.

→ Parfois non-concave.

→ Critère de reconnaissance : ensemble des points se trouvant au-dessus d'une courbe de niveau de la fonction est convexe.

→ U_h quasi concave.

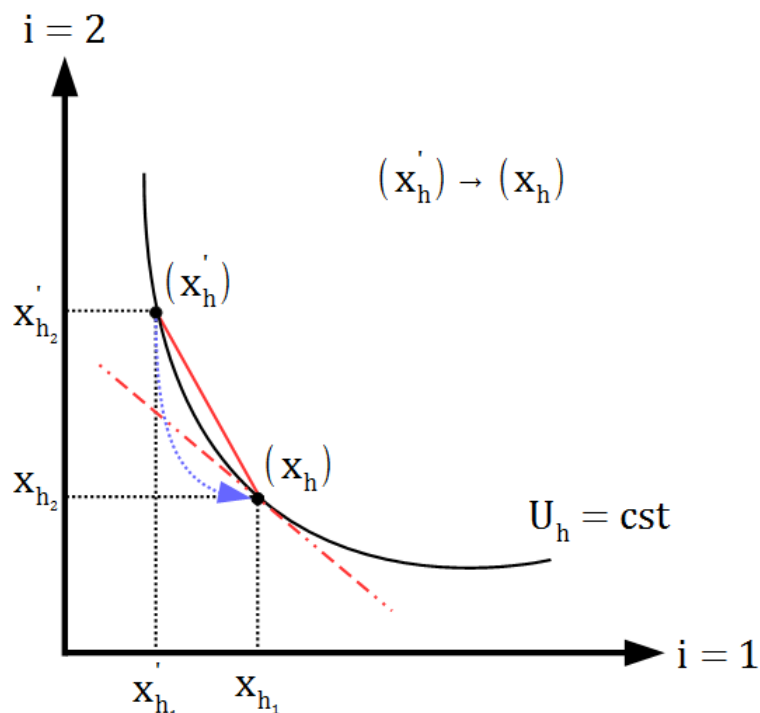
→ Si $U_h(x_h) = \bar{U}_h = \text{cst}$
 $\{U(x'_h) \geq U(x_h)\}$ convexe .



→ (x'_h) tend vers (x_h) : $(x'_h) \rightarrow (x_h)$.

→ Tangente en (x_h) : déplacement le long de U_h jusqu'à (x_h) .

$$\rightarrow dU_h = \frac{dU_h}{dx_{h_1}} * dx_{h_1} + \frac{dU_h}{dx_{h_2}} * dx_{h_2} = 0 \quad .$$



→ **Taux Marginal de Substitution (TMS) :**
$$\text{TMS} = -\frac{dx_{h_2}}{dx_{h_1}} \mid \bar{U}_h = \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}} .$$

→ Proportion dans laquelle le consommateur est d'accord d'échanger un des deux bien pour garder un niveau de consommation constant.

→ **Définition de la propriété de convexité :** utilisation du calcul du TMS.

→ **Fonction d'utilité :** condition que sa dérivée soit continue.

→ **TMS :** exprimé en fonction des quantités consommées.

→ **Préférences convexes :** si.

→ TMS une fonction décroissante en x_{h_1} .

→ TMS une fonction croissante en x_{h_2} .

→ **Utilité marginale (Um) :**
$$Um_{h_1} = \frac{dU_h}{dx_{h_1}} .$$

→ **Fonction d'utilité ordinale :** aucune interprétation précise pour l'utilité marginale.

→
$$\text{TMS} = \frac{Um_{h_1}}{Um_{h_2}} .$$

→ **Applications.**

→
$$U_h = x_{h_1} * x_{h_2} .$$

→ Monotonie des préférences : car x_{h_1} et x_{h_2} croissants.

→ Convexité des préférences ?

→ Calculer la valeur du TMS en n'importe quel point d'une courbe d'indifférence.

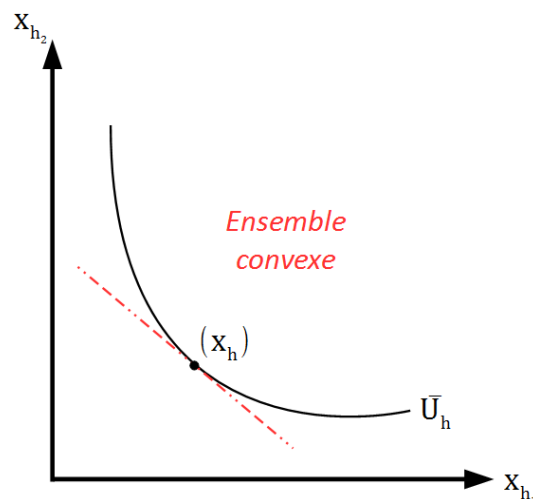
→ Mesurer la pente de la tangente en n'importe quel point.

→ TMS en fonction des quantités consommées :
$$\text{TMS} = -\frac{dx_{h_2}}{dx_{h_1}} \mid \bar{U}_h = \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}} = \frac{x_{h_2}}{x_{h_1}} .$$

→ Préférences convexes : car
$$\text{TMS} = \frac{x_{h_2}}{x_{h_1}} .$$

→ Fonction décroissante en x_{h_1} .

→ Fonction croissante en x_{h_2} .



$$\rightarrow U_h = x_{h_1}^2 + x_{h_2}^2 .$$

$$\rightarrow U_h = x_{h_1}^2 + x_{h_2}^2 = \bar{U}_h$$

→ Monotonicité des préférences.

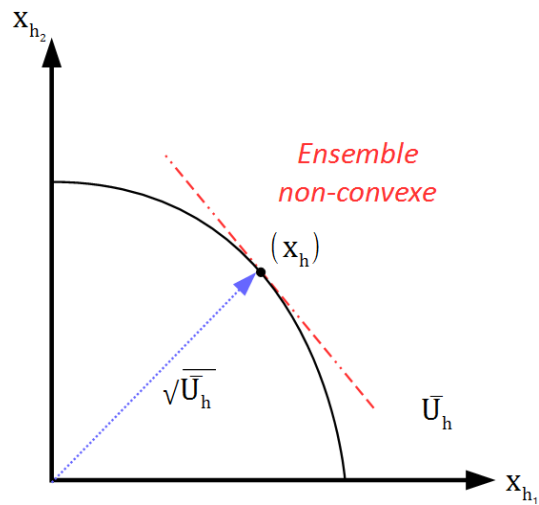
→ Convexité des préférences ?

$$\rightarrow TMS = -\frac{dx_{h_2}}{dx_{h_1}} \mid \bar{U}_h = \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}} = \frac{x_{h_1}}{x_{h_2}} .$$

→ Préférences non-convexes : car $TMS = 1$.

→ Fonction croissante en x_{h_1} .

→ Fonction décroissante en x_{h_2} .



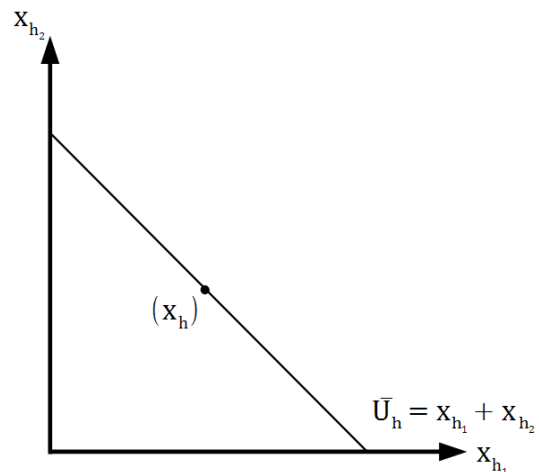
$$\rightarrow U_h = x_{h_1} + x_{h_2} .$$

→ Monotonicité des préférences.

→ Convexité des préférences ?

$$\rightarrow TMS = -\frac{dx_{h_2}}{dx_{h_1}} \mid \bar{U}_h = \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}} = 1 .$$

→ Préférences convexes (pas strictement) : car $TMS = 1$ constant.



→ **Concavifier une fonction** U_h : utiliser une V_h .

→ V_h **doit être positive et concave.**

→ $V_h = \sqrt{U_h}$ ou $V_h = \ln (U_h)$.

→ **Écrire** U_h **sous forme concave** : U_h **quasi-concave.**

→ **Alors : préférences convexes.**

→ **Application : concavifier** $U_h = x_{h_1} * x_{h_2}$.

→ $V_h = \sqrt{U_h} = x_{h_1}^{1/2} * x_{h_2}^{1/2}$ ou $V_h = \ln (U_h) = \ln (x_{h_1}) + \ln (x_{h_2})$.

II _ Équilibre du consommateur.

→ Prix.

→ $(p) = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_l)$.

→ p_i : prix du bien $i = 1, \dots, l$.

→ $p_i \geq 0$: deux cas.

→ $p_i > 0$: bien rare.

→ $p_i = 0$: bien libre.

→ **Consommateur : agent parfaitement concurrentiel.**

→ Actions : aucune influence sur les prix des marchés.

→ **Consommateur : information pure et parfaite.**

→ Connaissance de tous les prix de tous les biens.

→ **Consommateur : possédant un revenu R_h .**

→ Origine de ce revenu : deux raisonnements.

→ Donnée.

→ Détaillée.

→ **Chaque consommateur h : possède des dotations positives ou nulles des différents biens**

$(e) = (e_{h_1}, \dots, e_{h_i}, \dots, e_{h_l}) \quad \forall e_{h_i} \geq 0$.

→ Consommateur ne possédant aucun bien : possède un temps disponible et une aptitude à travailler.

→ Toujours source de revenu.

→ **Consommateur : origine du revenu.**

→ $R_h = \sum_{i=1}^l p_i \cdot e_{h_i}$.

→ **Revenu potentiel** : revenu maximum pouvant être obtenu en.

→ Vendant tout ses biens.

→ Travaillant tout son temps disponible.

→ **Revenu ajusté : ajout ou retrait d'un certain nombre de transferts.**

→ Exemple : impôt.

→ $R_h = \sum_{i=1}^l p_i \cdot e_{h_i} + T_h$.

→ **Revenu : valeur de la dotation initiale d'un consommateur.**

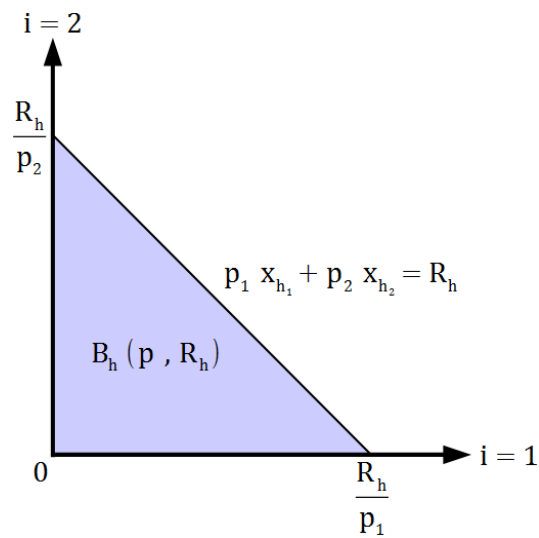
→ Valeur de tout ce qu'il pourrait vendre sur le marché (au prix courant).

→ **Ensemble des choix budgétairement réalisables** : $B_h(p, R_h) = \{(x_h) / \sum_{i=1}^l p_i \cdot x_{h_i} \leq R_h\}$.

→ Contrainte de budget du consommateur : $\sum_{i=1}^l p_i \cdot x_{h_i} \leq R_h$.

→ Ensemble des choix budgétairement réalisables : deux dimensions.

$$\rightarrow B_h((p_1, p_2), R_h) = \{(x_{h_1}, x_{h_2}) / p_1 \cdot x_{h_1} + p_2 \cdot x_{h_2} \leq R_h\}.$$



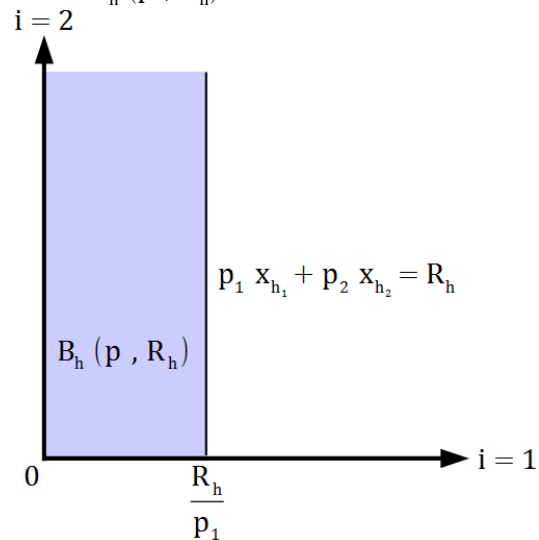
→ Valeur absolue de la pente de la contrainte : rapport des prix des deux biens.

$$\rightarrow x_{h_2} = -\frac{p_1}{p_2} \cdot x_{h_1} + \frac{R_h}{p_2}.$$

→ Si le bien 2 est libre : $p_2 \rightarrow 0$.

→ Alors $x_{h_2} \rightarrow +\infty$.

→ Ensemble $B_h(p, R_h)$ non fermé.



→ Ensemble de budget : propriétés.

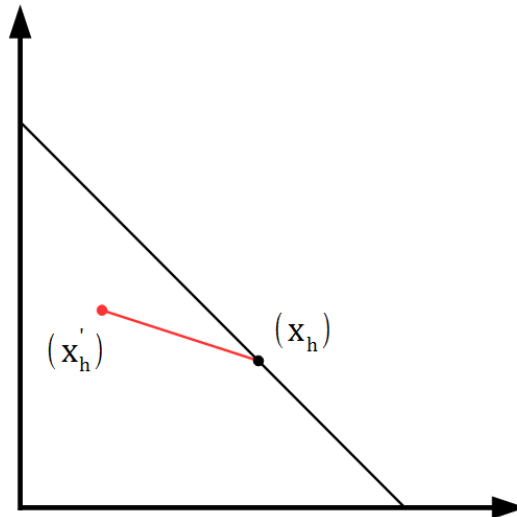
→ Si exclusion des biens libres : $p_i > 0$.

→ Alors : ensemble $B_h(p, R_h)$ borné, fermé et convexe.

→ **Convexité** : induit par la linéarité de la contrainte de budget (prix données).

→ **Hypothèse de concurrence parfaite** : garantie la convexité.

$$\begin{aligned} (x_h) \in B_h(p, R_h) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^I p_i x_{h_i} \leq R_h \quad \text{et} \quad (x'_h) \in B_h(p, R_h) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^I p_i x'_{h_i} \leq R_h \\ \rightarrow \quad \alpha (x_h) + (1-\alpha) (x'_h) &\in B_h(p, R_h) \quad \forall \alpha \in [0,1] \\ \sum_{i=1}^I p_i \alpha x_{h_i} + \sum_{i=1}^I p_i (1-\alpha) x'_{h_i} &\leq R_h \end{aligned}$$



→ Situation d'équilibre : aucun intérêt à s'écarter tant que prix et revenu du consommateur sont inchangés.

→ Préférences du consommateur ou fonction d'utilité.

→ Goûts : reflétés par la forme des courbes d'indifférence.

→ Courbes d'indifférence : représentation à l'aide d'une fonction d'utilité.

→ **Définition générale** : (x_h^*) **équilibre du consommateur** h .

→ **Si : deux conditions vérifiées.**

$$\rightarrow (x_h^*) \in B_h(p, R_h) \Leftrightarrow \sum_i p_i x_{h_i}^* \leq R_h \quad .$$

$$\rightarrow (x_h^*) \geq_h (x_h), \forall (x_h) \in B_h(p, R_h) \quad .$$

→ Équivalence de la fonction d'utilité : $(x_h^*) \geq_h (x_h) \Leftrightarrow U_h(x_h^*) \geq U_h(x_h) \quad .$

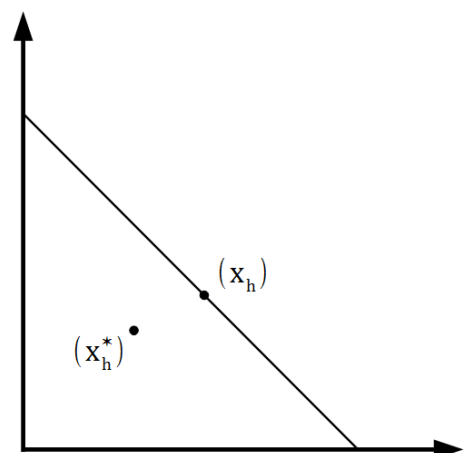
→ **Hypothèse minimum nécessaire** : **préférences non-saturées.**

→ **Équilibre du consommateur** : sur la droite de la contrainte budgétaire.

$$\rightarrow \text{Équilibre vérifiant : } \sum_i p_i x_{h_i} = R_h \quad .$$

→ **Cas de saturation des préférences.**

→ **Seconde condition de l'équilibre du consommateur** : non-vérifiée.



→ **Équilibre du consommateur : existence et unicité.**

→ **Si et seulement si : préférences strictement convexes.**

→ **Alors : (x_h^*) existe et est unique.**

$$\rightarrow \forall (x_h^*) \in B_h(p, R_h) \text{ et } \forall (x_h) \in B_h(p, R_h) \\ (x_h^*) \geq_h (x_h)$$

→ Existence et unicité : démonstration.

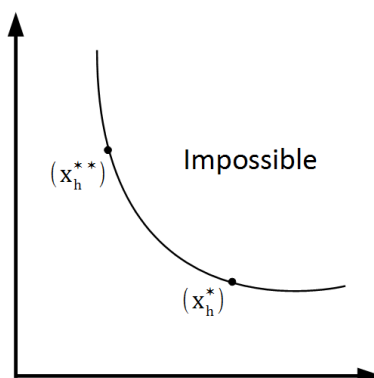
→ Supposition : existence d'un autre équilibre (x_h^{**}) .

$$(x_h^{**}) \in B_h(p, R_h)$$

→ $(x_h^{**}) \geq_h (x_h^*) \in B_h(p, R_h)$

$$\alpha (x_h^{**}) + (1 - \alpha) (x_h^*) >_h (x_h^*) \quad \forall \alpha \in]0, 1[$$

→ Si x_h^* est un équilibre : il ne peut y en avoir un autre.



→ **Propriété d'optimalité du point x_h^* .**

→ **Courbe d'indifférence passant par le point x_h^* : toujours, en dehors de ce point, au-dessus de l'ensemble de choix budgétairement réalisable $B_h(p, R_h)$.**

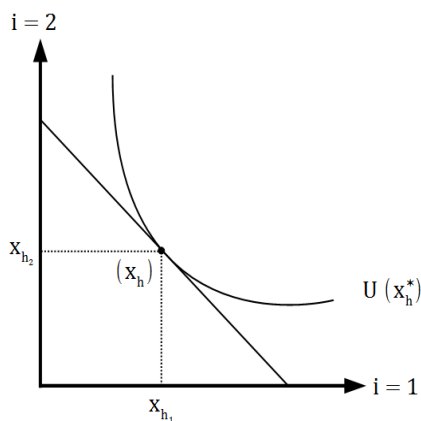
→ **Équilibre unique sur la droite de budget : méthode particulière** permettant de calculer l'équilibre d'un consommateur lorsque les préférences sont convexes.

$$p_1 x_{h_1} + p_2 x_{h_2} = R_h$$

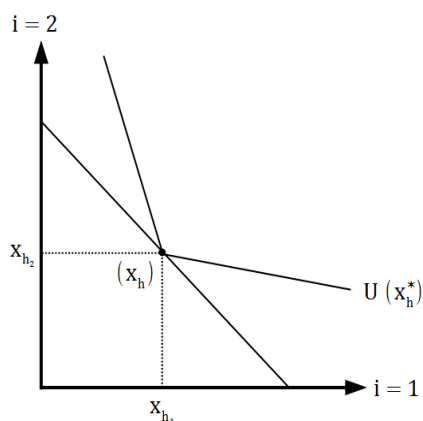
$$\rightarrow TMS = \frac{p_1}{p_2}$$

→ **Solution intérieure : car composantes $x_{h_i}^* > 0$.**

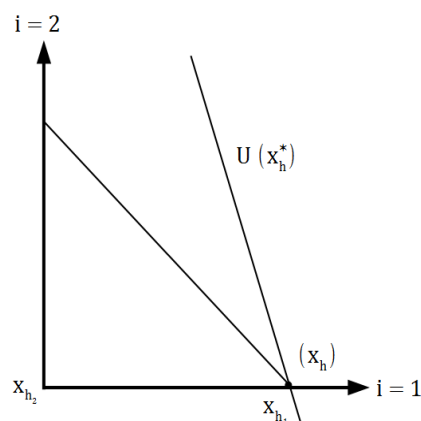
→ **Solution en coin : $x_{h_1}^* = \frac{R_h}{p_1}$ et $x_{h_2}^* = 0$.**



Solution intérieure



Solution intérieure



Solution en coin

→ **Application :** $U_h = x_{h_1} * x_{h_2}$.

→ U_h croissante : monotonie des préférences.

→ Quantités consommées strictement positives : stricte monotonie des préférences.

→ Préférences strictement convexes.

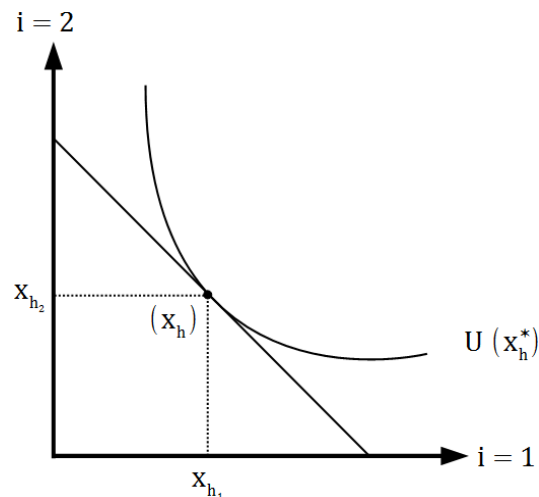
→ CPO : $\frac{dU_h}{dx_{h_1}} = x_{h_2} \geq 0 \quad \forall x_{h_2} > 0$.

$\frac{dU_h}{dx_{h_2}} = x_{h_1} \geq 0 \quad \forall x_{h_1} > 0$

→ Égalité du TMS, par définition : $TMS = -\frac{dx_{h_2}}{dx_{h_1}} \mid \bar{U}_h = \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}} = \frac{x_{h_2}}{x_{h_1}}$.

→ Égalité du TMS, dans cette situation : $TMS = \frac{x_{h_2}}{x_{h_1}} = \frac{p_1}{p_2}$.

→ Prix que le consommateur est prêt à payer pour avoir une unité de bien 1 en concédant une certaine quantité de bien 2 : correspond au prix relatif de ces biens pratiqués sur le marché.



Max $U_h(x_{h_1}, x_{h_2})$

→ Problème à résoudre : sc $p_1 x_{h_1} + p_2 x_{h_2} \leq R_h$.
 x_{h_1} et $x_{h_2} \geq 0$

→ Résolution par substitution (système).

$$\rightarrow \begin{cases} p_1 x_{h_1} + p_2 x_{h_2} = R_h \\ \frac{x_{h_2}}{x_{h_1}} = \frac{p_1}{p_2} \end{cases} : \begin{cases} x_{h_1}^* = \frac{R_h}{2p_1} \\ x_{h_2}^* = \frac{R_h}{2p_2} \end{cases} .$$

→ Résolution par lagrangien : $\text{Max } L(x_{h_1}, x_{h_2}, \lambda) = U_h(x_{h_1}, x_{h_2}) + \lambda [R_h - p_1 x_{h_1} - p_2 x_{h_2}]$.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx_{h_1}} &= \frac{dU_h}{dx_{h_1}} + \lambda x_{h_1} = 0 & \frac{dU_h}{dx_{h_1}} &= -\lambda x_{h_1} \quad (1) \\ \rightarrow \text{CPO : } \frac{dL}{dx_{h_2}} &= \frac{dU_h}{dx_{h_2}} + \lambda x_{h_2} = 0 & \Leftrightarrow & \frac{dU_h}{dx_{h_2}} = -\lambda x_{h_2} \quad (2) \\ \frac{dL}{d\lambda} &= R_h - p_1 x_{h_1} - p_2 x_{h_2} = 0 & R_h - p_1 x_{h_1} - p_2 x_{h_2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Si } \lambda \text{ non-demandé : } \frac{\frac{dU_h}{dx_{h_1}}}{\frac{dU_h}{dx_{h_2}}} = \frac{p_1}{p_2} \quad \frac{(1)}{(2)} .$$

$$R_h - p_1 x_{h_1} - p_2 x_{h_2} = 0$$

→ Préférences du consommateur : monotones et convexes.

→ $U_h(x_{h_1}, x_{h_2})$ concave : la solution est un maximum.

$$\rightarrow \text{CSO : } H(x_{h_1}, x_{h_2}) = \begin{pmatrix} \frac{d^2 U_h}{dx_{h_1}^2} & \frac{d^2 U_h}{dx_{h_1} dx_{h_2}} & -p_1 \\ \frac{d^2 U_h}{dx_{h_1} dx_{h_2}} & \frac{d^2 U_h}{dx_{h_2}^2} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{pmatrix} .$$

→ $H(x_{h_1}, x_{h_2})$ semi-définie négative.

→ **Application :** $U_h = x_{h_1} + x_{h_2}$.

→ Solution en coin.

→ U_h croissante : monotonicté des préférences.

→ Préférences convexes.

→ CPO : $\frac{dU_h}{dx_{h_1}} = 1 \geq 0 \quad \forall x_{h_2} > 0$.

$\frac{dU_h}{dx_{h_2}} = 1 \geq 0 \quad \forall x_{h_1} > 0$

$$\text{Max } U_h(x_{h_1}, x_{h_2}) = x_{h_1} + x_{h_2}$$

→ Problème à résoudre : $\text{sc } p_1 x_{h_1} + p_2 x_{h_2} \leq R_h$.

$x_{h_1} \text{ et } x_{h_2} \geq 0$

→ Égalité du TMS, dans cette situation : $\text{TMS} = 1$ et $\frac{p_1}{p_2}$.

→ Résolution.

→ Si $p_1 \leq p_2$: $\begin{cases} \text{Max } x_{h_1} = \frac{R_h - p_2 x_{h_2}}{p_1} \\ 0 \leq x_{h_1} \leq \frac{R_h}{p_1} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_{h_1} = \frac{R_h}{p_1} \\ x_{h_2} = 0 \end{cases}$.

→ Si $p_1 \geq p_2$: $\begin{cases} \text{Max } x_{h_2} = \frac{R_h - p_1 x_{h_1}}{p_2} \\ 0 \leq x_{h_2} \leq \frac{R_h}{p_2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_{h_1} = 0 \\ x_{h_2} = \frac{R_h}{p_2} \end{cases}$.

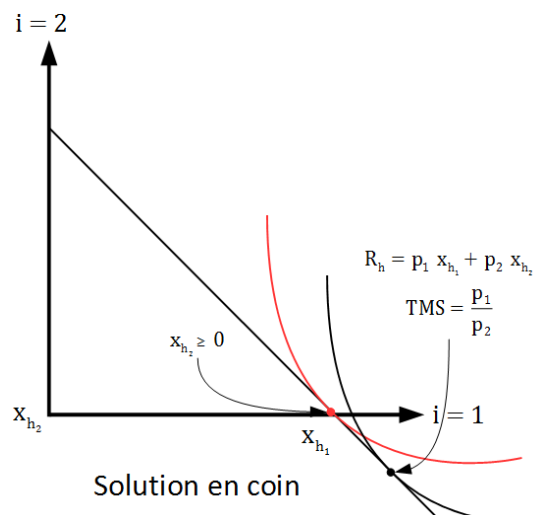
→ Si $p_1 = p_2$: un des deux optimums.

→ **Application :** $U_h = x_{h_1} (x_{h_1} + x_{h_2})$.

→ Solution en coin avec $x_{h_2} < 0$.

→ $x_{h_1} = \frac{R_h}{p_1}$.

$x_{h_2} = 0$



→ **Application** : $U_h = x_{h_1}^2 + x_{h_2}^2$.

→ U_h croissante : monotonie des préférences.

→ Préférences non-convexes.

→ CPO : $\frac{dU_h}{dx_{h_1}} = 2x_{h_1} \geq 0 \quad \forall x_{h_2} > 0$.

$\frac{dU_h}{dx_{h_2}} = 2x_{h_2} \geq 0 \quad \forall x_{h_1} > 0$

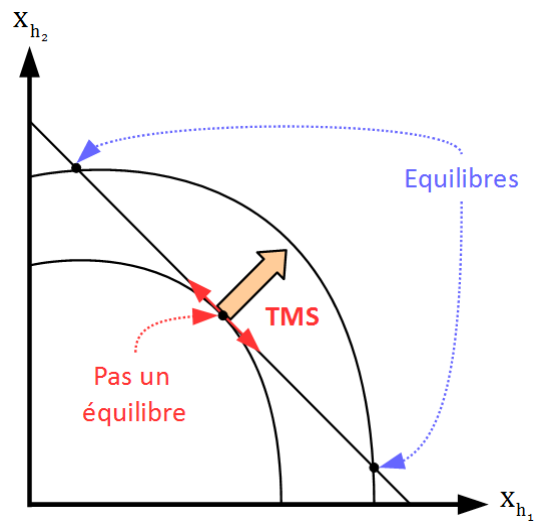
→ Contrainte budgétaire : $p_1 x_{h_1} + p_2 x_{h_2} = R_h$.

→ Égalité du TMS, dans cette situation : $TMS = \frac{x_{h_1}}{x_{h_2}} = \frac{p_1}{p_2}$.

→ Résolution.

→ $\frac{p_1^2 x_{h_2}}{p_2} + p_2 x_{h_2} = R_h : x_{h_2} \left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_2} \right) = R_h$.

→ $\begin{cases} x_{h_1} = \frac{R p_1}{p_1^2 + p_2^2} > 0 \\ x_{h_2} = \frac{R p_2}{p_1^2 + p_2^2} > 0 \end{cases}$.



→ Solution en $\text{Max } U_h$: minimisation de l'utilité du consommateur.

→ Préférences non-convexes.

→ Maximisation : en utilisant une fonction $V(x_{h_1}, \frac{R_h - p_1 x_{h_1}}{p_2})$ et en isolant x_{h_2} .

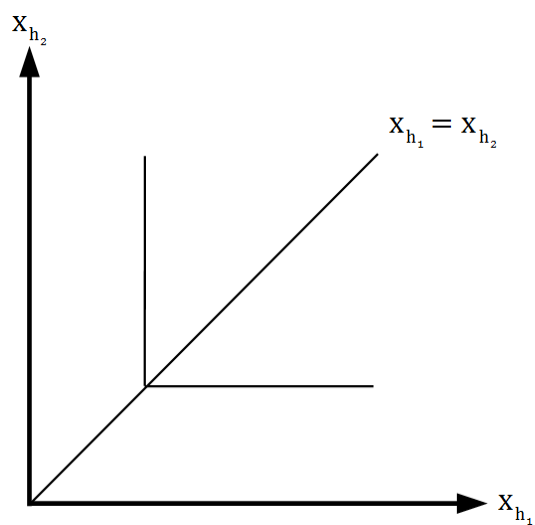
→ $V(x_{h_1}) = x_{h_1}^2 + \left(\frac{R_h - p_1 x_{h_1}}{p_2} \right)^2$: fonction d'utilité non-concave.

→ CPO : $\frac{dV(x_{h_1})}{dx_{h_1}} = 0 \Leftrightarrow TMS = \frac{p_1}{p_2}$.

→ CSO : $V''(x_{h_1}) \geq 0$.

→ **Application :** $U_h = \text{Min} \{x_{h_1}, x_{h_2}\}$.

→ Complémentarité stricte dans la consommation des deux biens.



→ TMS : non-défini point de croisement.

→ $\text{TMS} = \frac{p_1}{p_2}$: aucune signification.

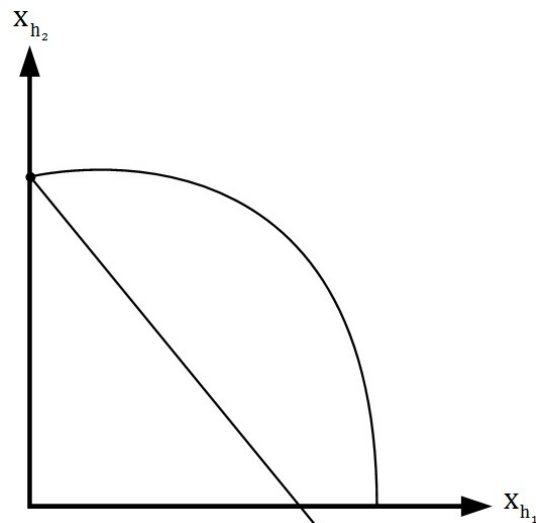
→ Équilibre du consommateur : point où le TMS n'est pas défini.

→ Si préférences strictement convexes : $x_{h_i}^* = X_{h_i}(p_1, p_i, p_e, R_h)$.

→ Si préférences non-convexes : une infinité de solution.

→ Correspondances : propriété de semi continuité supérieure.

→ **Application** : $U_h = x_{h_1}^2 * x_{h_2}^2$.

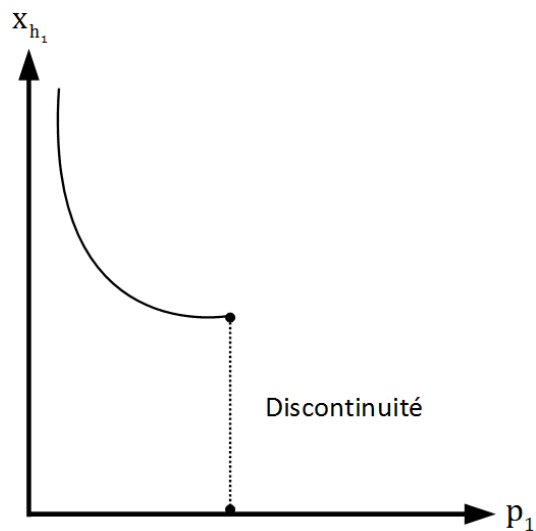


→ **Solution.**

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Si } p_1 \leq p_2 & : \begin{cases} x_{h_1} = \frac{R_h}{p_1} \\ x_{h_2} = 0 \end{cases} . \\ \rightarrow \text{Si } p_1 \geq p_2 & : \begin{cases} x_{h_1} = 0 \\ x_{h_2} = \frac{R_h}{p_2} \end{cases} . \end{aligned}$$

→ **Fonction discontinue de demande de bien** $x_{h_1} = X_{h_2}(p_1, p_2, R_h)$.

→ **Pour** $p_1 = p_2$: **deux choix possibles.**



→ **Préférences : non-convexes.**

→ **Plusieurs équilibres possibles : propriété d'unicité de l'équilibre non-vérifiée.**

→ **Consommateur** : capable de changer brutalement de comportement pour une toute petite variation de prix.

→ **Convexité** : permettant d'éviter ce genre de situation.

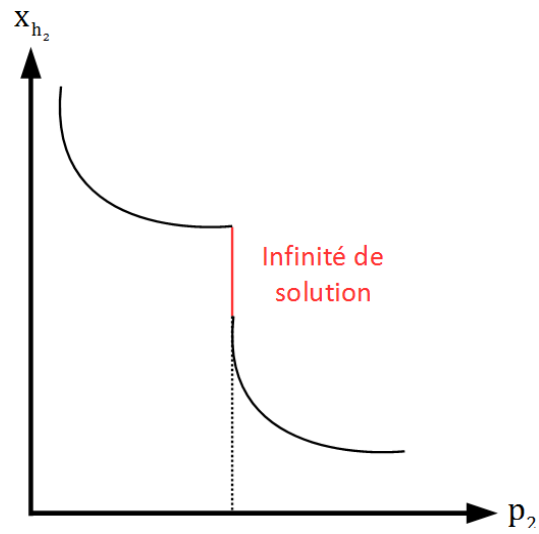
→ **Convexité** : donne une correspondance de la demande de bien.

→ **Stricte convexité** : donne une fonction de demande de bien.

→ **Correspondance de demande de bien** $x_{h_2} = X_{h_2}(p_1, p_2, R_h)$.

→ **Infinité de solution sur la droite verticale.**

→ Solutions existantes : contrairement à la discontinuité.



→ **Propriété de convexité.**

→ Pour de petites variations de prix : variation de la consommation dans de mêmes proportions.

→ **Demande de bien : trois propriétés.**

→ $x_{h_i}^* = X_{h_i}(p_1, p_i, p_e, R_h)$ sont continues.

→ **Loi de Walras :**
$$\sum_{i=1}^n p_i x_{h_i} = R_h$$

$$\sum_{i=1}^n p_i X_{h_i}((p), R_h) = R_h$$

→ **Homogénéité de degré 0 par rapport aux prix.**

→ Prix et revenu multipliés par la même constante : non-modification des quantités consommées.

→ $X_{h_i}((\lambda p), \lambda R_h) = X_{h_i}((p), R_h) \quad \forall \lambda > 0$.

→ **Pouvoir d'achat inchangé : aucune raison de modifier ses choix.**

→ Situation d'inflation parfaite : aucune modification réelle de la consommation.

→ **Propriétés particulières des biens :** $x_{h_i}^* = X_{h_i}(p_1, p_i, p_e, R_h)$ dérivable et continue.

→ **Élasticité revenu.**

→ **Bien normal ou non-inférieur :** $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} \geq 0$.

→ **Bien inférieur :** $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} < 0$.

→ **Élasticité prix.**

→ **Bien ordinaire :** $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_i} \leq 0$.

→ **Loi de la demande vérifiée.**

→ **Bien Giffen :** $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_i} > 0$.

→ **Loi de la demande non-vérifiée.**

→ **Nécessairement : bien inférieur.**

→ **Élasticité prix croisé.**

→ **Propriété de substituabilité vérifiée :** $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} \geq 0 \quad \forall i \neq j$.

→ **Propriété de substituabilité non-vérifiée :** $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} < 0 \quad \forall i \neq j$.

→ **Équation de Slutsky :** $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} = \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u} - x_{h_i}^*} \cdot \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} \quad \forall i \neq j$.

→ $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u} - x_{h_i}^*} \quad \forall i \neq j$: **effet de substitution.**

→ $x_{h_i}^* \cdot \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} \quad \forall i \neq j$: **effet de revenu.**

→ **Pour $i = j$:** $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_i} = \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_i} \Big|_{\bar{u} - x_{h_i}^*} \cdot \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} \quad \forall i = j$.

→ **Loi de la demande vérifiée** : $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} \mid \bar{u} > 0 \quad \forall i \neq j$.

→ Si $p_i \uparrow$ alors $x_{h_i} \downarrow$: **pour rester sur la même courbe d'indifférence.**

→ Si $p_i \downarrow$ alors $x_{h_i} \uparrow$: **pour rester sur la même courbe d'indifférence.**

→ **Bien Giffen** : $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} = \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} \mid \bar{u} - x_{h_i}^* \cdot \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} < 0 \quad \forall i \forall j$.

→ $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} \mid \bar{u} < 0$ et $x_{h_i}^* \cdot \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} < 0$.

→ **Bien Giffen** : **uniquement si ce bien est inférieur.**

→ **Bien normal** : $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} = \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} \mid \bar{u} - x_{h_i}^* \cdot \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} > 0 \quad \forall i \forall j$.

→ $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} \mid \bar{u} > 0$ et $x_{h_i}^* \cdot \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} > 0$.

→ **Effet de substitution et de revenu** : **même sens.**

→ **Bien normal** : **avec.**

→ **Effet de revenu** : $x_{h_i}^* \cdot \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} > 0$.

→ **Effet de substitution** : $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} \mid \bar{u} < 0$.

→ **Impossible de conclure** : **dépendant de l'importance relative de l'effet de revenu et de substitution.**

$$\begin{aligned} \rightarrow x_{h_1}^* &= X_{h_1} (p_1, p_2, R_h) \\ x_{h_2}^* &= X_{h_2} (p_1, p_2, R_h) \end{aligned}$$

→ **Application** : $U_h = x_{h_1}^a \cdot x_{h_2}^{1-a}$.

→ **Conditions.**

→ $x_{h_i}^* = X_{h_i} (p_1, p_2, R_h)$ sont continues.

→ **Loi de Walras** : $\sum_{i=1}^I p_i x_{h_i} = R_h$.

$$\sum_{i=1}^I p_i X_{h_i} ((p), R_h) = R_h$$

→ **Homogénéité de degré 0 par rapport aux prix.**

$$\begin{aligned} \rightarrow x_{h_1}^* &= a \frac{R_h}{p_1} = a \frac{\lambda R_h}{\lambda p_1} \quad \forall \lambda > 0 \\ x_{h_2}^* &= a \frac{R_h}{p_2} = a \frac{\lambda R_h}{\lambda p_2} \quad \forall \lambda > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x_{h_1}^* &= X_{h_1} (p_1, p_2, R_h) \\ x_{h_2}^* &= X_{h_2} (p_1, p_2, R_h) \end{aligned}$$

→ **Fonction CES** $U_h = [a x_{h_1}^{\frac{e-1}{e}} + (1-a) x_{h_2}^{\frac{e-1}{e}}]^{\frac{e}{e-1}} \quad \forall e > 0 \text{ et } e \neq 1 \quad \forall a \in]0,1[$.

→ $\forall e > 1$: **propriété de substituableté vérifiée.**

→ Valeur de l'élasticité forte par rapport à un nombre de référence 1.

→ $\forall e > 1$: **propriété de substituableté non-vérifiée.**

→ $\forall e = 1$: **fonction devenant une fonction Cobb-Douglas.**

→ $U_h \xrightarrow{e \rightarrow 1} a \ln x_{h_1} + (1-a) \ln x_{h_2}$.

→ **Application : fonction CES de paramètres** $a = \frac{1}{2}$ **et** $e = 2$; $U_h = \sqrt{x_{h_1}} + \sqrt{x_{h_2}}$.

$$\rightarrow \begin{cases} \text{TMS} = \sqrt{\frac{x_{h_2}}{x_{h_1}}} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_{h_1} + p_2 x_{h_2} = R_h \end{cases} : \text{résolution du système.}$$

$$\rightarrow \text{Solution : } \begin{cases} x_{h_1} = \frac{p_2}{p_1 + p_2} * \frac{R_h}{p_1} \\ x_{h_2} = \frac{p_1}{p_1 + p_2} * \frac{R_h}{p_2} \end{cases}$$

$$\rightarrow x_{h_1}^* = X_{h_1}(p_1, p_2, R_h)$$

$$x_{h_2}^* = X_{h_2}(p_1, p_2, R_h)$$

$$\rightarrow \frac{\partial x_{h_1}}{\partial R_h} > 0 : \text{bien normal.}$$

$$\rightarrow \frac{\partial x_{h_1}^*}{\partial p_1} \leq 0 : \text{loi de la demande vérifiée.}$$

$$\rightarrow \frac{\partial x_{h_1}^*}{\partial p_j} \geq 0 \quad \forall i \neq j : \text{propriété de substituableté vérifiée.}$$

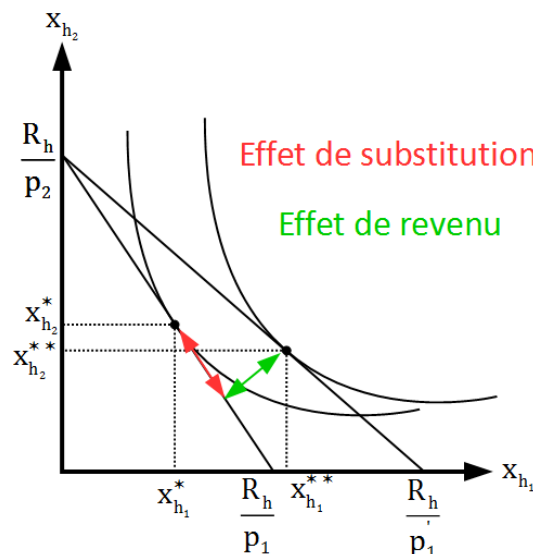
→ Effet d'une diminution du prix du bien 1 : $p_1 > p_1'$.

→ Bien 1 : effet de substitution et de revenu positifs.

→ Bien 2 : effet de substitution plus fort que l'effet de revenu.

→ Effet de substitution : diminution de la consommation du bien.

→ Effet de revenu : augmentation de la consommation du bien.



→ **Application : fonction CES de paramètres** $e = 0$; $U_h = \text{Min} \{x_{h_1}, x_{h_2}\}$.

→ Consommation : autant de bien 1 que de bien 2 .

→ $\begin{cases} x_{h_1} = x_{h_2} \\ p_1 x_{h_1} + p_2 x_{h_2} = R_h \end{cases}$: résolution du système.

→ Solution : $x_{h_1} = x_{h_2} = \frac{R_h}{p_1 + p_2}$.

→ Conditions : vérifiées.

→ $x_{h_i}^* = X_{h_i}(p_1, p_2, R_h)$ sont continues.

→ Loi de Walras : $\sum_{i=1}^I p_i x_{h_i} = R_h$.

$$\sum_{i=1}^I p_i X_{h_i}((p), R_h) = R_h$$

→ Homogénéité de degré 0 par rapport aux prix.

$$\rightarrow x_{h_1} = x_{h_2} = \frac{R_h}{p_1 + p_2} = \frac{\lambda R_h}{\lambda (p_1 + p_2)} \quad \forall \lambda > 0 .$$

→ $x_{h_1}^* = X_{h_1}(p_1, p_2, R_h)$.

$x_{h_2}^* = X_{h_2}(p_1, p_2, R_h)$.

→ $\frac{\partial x_{h_i}}{\partial R_h} > 0$: bien normal.

→ $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_i} < 0$: loi de la demande vérifiée.

→ $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} < 0 \quad \forall i \neq j$: propriété de substituabilité non-vérifiée.

→ Équation de Slutsky : $\frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial p_j} = \frac{\partial x_{h_i}}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u} - x_{h_i}^*} \cdot \frac{\partial x_{h_i}^*}{\partial R_h} \quad \forall i \forall j$.

→ $\frac{\partial x_{h_i}}{\partial p_j} \Big|_{\bar{u}} = 0 \quad \forall i \forall j$: aucun effet de substitution.

→ $x_{h_i}^* \cdot \frac{\partial x_{h_i}}{\partial R_h} > 0 \quad \forall i \forall j$: pure effet de revenu.

