

**א. טבלת אינטגרלים , ב. טבלת נגזרות**  
**ג. טבלת משוואות טריגונומטריות , ד. טבלת זהויות טריגונומטריות**  
**אתר מלומד [www.melumad.co.il](http://www.melumad.co.il) בגרות במתמטיקה 5 יחידות קורס**

**א. טבלת אינטגרלים (עמוד הבא טבלת נגזרות)**

כללים בסיסיים	
$\int adx = ax + c$	
$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$	
$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	
$n \neq -1$ (כולל שורש ומנה)	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1) \cdot a} + c$
$n \neq -1$ (כולל שורש ומנה)	
	$\int f(x)^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1} f(x)^{n+1} + c$
פונקציות טריגונומטריות	
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{\tan(ax+b)}{a} + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot ax + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{\cot an(ax+b)}{a} + c$

נזכור שפעולת האינטגרל היא פעולה שמבטלת את פעולת הנגזרת כלומר מתקיים

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

$$\int f''(x) dx = f'(x) + C$$

**תוספת לשאלונים 807 ו-007 פונקציות מעריכיות ולוגרמיות**

$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{kx+b} dx = \frac{e^{kx+b}}{k} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{kx+b} dx = \frac{a^{kx+b}}{(\ln a)k} + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln ax+b }{a} + c$
	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)  + c$
	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$



1 חל איסור חוקי ההעתיקה, לשכפל, לשדר, ו/או לקלוט קבצים אלו בכל אמצעי אלקטרוני עמוד  
 ללא אישור בכתב מאתר melumad.co.il

**ב. טבלת נגזרות**

כללים בסיסיים	
$(a)' = 0$	
$(af(x))' = a(f(x))'$	
$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$	
$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	
$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	
נגזרות של פונקציות עם חזקה (כולל שורש)	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$[f^n(x)]' = nf^{n-1}(x)f'(x)$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{1}{[f(x)]^2} \cdot f'(x)$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[\sqrt{f(x)}]' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
נגזרות של פונקציות טריגונומטריות	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin f(x))' = \cos f(x) \cdot f'(x)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos f(x))' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan f(x))' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$(\cot ax)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot af(x))' = -\frac{1}{\sin^2 f(x)} \cdot f'(x)$

תוספת לשאלונים 807 ו-007 נגזרות של פונקציות מעריכיות ולוגרמיות	
$(e^x)' = e^x$	$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$[\log_a f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot f'(x)$



**ג. טבלת משוואות טריגונומטריות**

משוואות זזהויות טריגונומטריות- 5 יחידות  
(נוסחאות עם \* אלו הן נוסחאות שמופיעות בנוסחאון 4-5 יחידות המחולק בבגרות)

**1. משוואות פשוטות**

**1.1 משוואות פשוטות עם מספר:**

$\sin A = \sin B$	$\cos A = \cos B$	$\tan A = \tan B$
↓	↓	↓
$\begin{cases} A = B + 360^\circ k \\ A = 180^\circ - B + 360^\circ k \end{cases}$	$\begin{cases} A = B + 360^\circ k \\ A = -B + 360^\circ k \end{cases}$	$A = B + 180^\circ k$

**1.2 משוואות פשוטות עם מספר:**

$\cos A = N \quad \uparrow \quad \cos(\quad)$ <small>shift cos<sup>-1</sup> N</small>	$\sin A = N \quad \uparrow \quad \sin(\quad)$ <small>shift sin<sup>-1</sup> N</small>	$\tan A = N \quad \uparrow \quad \tan(\quad)$ <small>shift tan<sup>-1</sup> N</small>
$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1 \\ -1 &\leq \cos x \leq 1 \end{aligned}$		

**1.3 הכנסת מינוס 1.4 מעבר לאותה הפונקציה**

$\begin{aligned} -\sin A &= \sin(-A) \\ -\cos A &= \cos(180^\circ - A) \\ -\tan A &= \tan(-A) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sin A &= \cos(90^\circ - A) \\ \cos A &= \sin(90^\circ - A) \end{aligned}$
--	--

**1.5 בעיה 3: מקדם (משוואה אחידה)**

משוואה אחידה:

$$A \sin x = B \cos x$$

↓ // : cos x ≠ 0    נחלק

$$\frac{A \sin x}{\cos x} = \frac{B \cos x}{\cos x}$$

↓

$$A \tan x = B$$

ומפה נמשיך כמו משוואות פשוטות עם מספר

2. משוואות הנפתרות על ידי הוצאת גורם משותף או על ידי פירוק לגורמים

3. משוואות עם זווית כפולה

$$(1) \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$(2) \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$(3) \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$$

$$(4) \cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{זהות שירדה מתכנית הלימודים} \\ (5) \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \end{array} \right)$$

4. משוואות עם אותה זווית

$$(1) \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\rightarrow \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$(2) \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{שלוש זהויות שנשתמש בסעיפים} \\ \text{בהמשך} \\ (3) \cot aA = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\tan A} \\ (4) 1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} \\ (5) 1 + \cot^2 A = \frac{1}{\sin^2 A} \end{array} \right)$$

5. משוואות יחס זוויות מעורב (סכום או הפרש שתי זוויות)

$$(1) \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad *$$

$$(2) \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad *$$

$$(3) \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad *$$

$$(4) \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad *$$

x	30°	45°	60°
sinx	1/2	√2/2	√3/2
cosx	√3/2	√2/2	1/2
tanx	√3/3	1	√3

$$\left( \begin{array}{l} \text{זהות שירדה מתכנית הלימודים} \\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \end{array} \right)$$

\* מופיע בדף נוסחאות

6. משוואות הנפתרות בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר

$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} = \frac{\cos 2\alpha}{1} = \cos 2\alpha$$

7. משוואות עם ירידת חזקה

רמזים לזיהוי:

משוואות עם ביטויים של חזקה מהצורה  $\sin^2 \frac{A}{2}$  או  $\cos^2 \frac{A}{2}$   
יחס זוויות 1:4

שלבי עבודה לרוב יהיו

1. נפעיל את הזהות המתאימה

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}, \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$$

2. נפתור משוואה מסוג קודם יותר

הערות

1. אם נטיל שורש על הזהויות שלמעלה נקבל שתי זהויות נוספות שקולות אך פחות שימושיות:

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

8. משוואות עם מעבר מסכום למכפלה

רמז לזיהוי: יחס זווית לא 1:2 ולא 1:1, אלא יחס זוויות מעורבב.  
למשל, הזוויות יהיו  $x, 4x, 5x$

שלבי עבודה:

1. נפעיל את הזהות המתאימה (בדרך כלל ניקח זווית min עם max)

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} & * \\ (2) \quad \sin A - \sin B &= 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} & * \\ (3) \quad \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} & * \\ (4) \quad \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} & * \end{aligned}$$

2. נפתור משוואה מסוג קודם יותר

פעולה נפוצה: הוצאת גורם משותף ומעבר לצורה  $A \cdot B = 0$   
וכן נזכור שניתן להיפטר ממינוס בזווית בעזרת הזהויות

$$\begin{aligned} \sin(-A) &= -\sin A \\ \cos(-A) &= \cos A \end{aligned}$$

9. משוואות עם מעבר ממכפלה לסכום

שלבי עבודה:

1. נפעיל את הזהות המתאימה

1.  $\sin A \cos B = 0.5[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$   
 (מכפלה של אותה פונקציה)

---

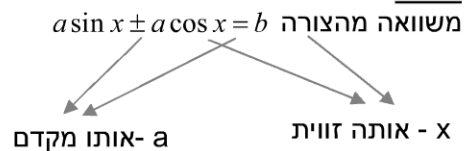
2.  $\cos A \cos B = 0.5[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$   
 (מכפלה של פונקציות שונות)

3.  $\sin A \sin B = 0.5[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

2. נפתור משוואה מסוג קודם יותר

10. משוואות מהצורה  $a \sin x \pm a \cos x = b$

זיהוי:



באגף שמאל המקדם  $a$  חייב להיות זהה בשני האברים.  
 הזווית  $x$  צריכה להיות זהה בשני האיברים.  
 אגף ימין  $b$  יכול להיות מספר כלשהו או פונקציה כלשהי.

שלבי עבודה

1. נחלק במקדם  $a$

2. נפעיל את הזהות:

$$\cos A = \sin(90^\circ - A)$$

3. נפעיל את הזהות המתאימה מבין הזויות:

(1)  $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  \*

(2)  $\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$  \*

(3)  $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  \*

(4)  $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$  \*

11. משוואות מהצורה  $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x = d$

זיהוי: משוואה מהצורה  $a \sin^2(x) + b \sin(x) \cos(x) + c \cdot \cos^2(x) = d$

הזווית x חייבת להיות זהה

שלבי עבודה

**שלב א'-** נפתור את המשוואה עבור מקרה 1:  $\cos x \neq 0$

1. נחלק ב-  $\cos^2 x \neq 0$

2. נפעיל את הזהויות

$$\frac{1}{\cos^2 A} = \tan^2 A + 1, \quad \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

**שלב ב'-** נפתור את המשוואה עבור מקרה 2:  $\cos x = 0$

1. נציב במשוואה  $\cos x = 0$

2. ונבדוק שמתקיים הכלל הבא:  $\sin x = \pm 1$  אם  $\cos x = 0$

**שלב ג'-** נאחד בין שני המקרים

12. משוואות עם  $\cotan A$

משוואות עם  $\cot A$  או משוואות עם  $\tan A$

שלבי עבודה

**שלב 1-** נפתור

תחילה נמיר את  $\cot A$  ל-  $\tan A$ :

$$\cot A = \tan(90 - A)$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

**שלב 2-** נמצא תחום הגדרה

1. נפעיל את הזהות

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}, \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

2. נפעיל את ההגבלה:  $\neq 0$  מכנה

**שלב 3-** נוודא שהפתרונות נמצאים בתחום ההגדרה

משוואות עם  $\cot A$  משולבות עם "משפחת"  $\sin A$  ו-  $\cos A$

שלבי עבודה:

**שלב 1-** נפתור

תחילה נמיר את  $\cot$  ואת  $\tan$  ל-  $\sin$  ו-  $\cos$ :

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}, \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

**שלב 2-** נמצא תחום הגדרה

1. נפעיל את הזהות

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}, \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

2. נפעיל את ההגבלה:  $\neq 0$  מכנה

**שלב 3-** נוודא שהפתרונות נמצאים בתחום ההגדרה

13. זהויות נוספות שכן בתכנית הלימודים

זהויות של זווית שלילית

- (1)  $\sin(-A) = -\sin A$   
 (2)  $\cos(-A) = \cos A$   
 -----  
 (3)  $\tan(-A) = -\tan A$   
 (4)  $\cot an(-A) = -\cot an A$

זהויות של מעגל

- (1)  $\sin(180^\circ - A) = \sin A$   
 (2)  $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$   
 -----  
 (3)  $\sin(90^\circ - A) = \cos A$   
 (4)  $\cos(90^\circ - A) = \sin A$   
 -----  
 (5)  $\tan(90^\circ - A) = \cot an A$   
 (6)  $\cot an(90^\circ - A) = \tan A$

↑ הערות לגבי "זהויות של מעגל"  
 1. אנו ציינו את העיקריות אך יש עשרות זהויות מהסוג הנ"ל.  
 2. אין טעם לנסות לזכור את כולן בעל פה. מאחר ויש שיטה לפתח אותן. את השיטה נלמד בשיעור טריגונומטריה במישור  
 3. זהויות אלו ישמשו אותנו בעיקר בשיעור טריגונומטריה במישור



**ד. טבלת זהויות טריגונומטריות לפי ריכוז הזהויות- מלומד**

**(כמו טבלת משוואות טריגו, רק בסדר אחר)**

משוואות זהויות טריגונומטריות- 5 יחידות

(נוסחאות עם \* אלו הן נוסחאות שמופיעות בנוסחאון 5 יחידות לימוד המחולק בבגרות)

**1.1 שוויונים בסיסיים**

$\sin A = \sin B$	$\cos A = \cos B$	$\tan A = \tan B$
↓	↓	↓
$A = B + 360^\circ k$	$A = B + 360^\circ k$	$A = B + 180^\circ k$
$A = 180^\circ - B + 360^\circ k$	$A = -B + 360^\circ k$	

**1.3 זהויות של שינוי פונקציה**

$$\sin A = \cos(90^\circ - A)$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A)$$

**1.2 זהויות של הכנסת מינוס**

$$-\sin A = \sin(-A)$$

$$-\cos A = \cos(180^\circ - A)$$

$$-\tan A = \tan(-A)$$

**4. זהויות של מחצית הזווית (ירידת חזקה)**

$$(1) \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos(A)}{2}$$

$$(2) \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + \cos(A)}{2}$$

$$\left( \begin{array}{l} (1) \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ (2) \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \end{array} \right)$$

**3. זהויות של אותה הזווית**

$$(1) \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\rightarrow \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$(1) \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$(2) \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\tan A}$$

$$(4) 1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$(5) 1 + \cot^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$$

**2. זהויות של זווית כפולה**

$$(1) \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$(2) \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$(3) \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$$

$$(4) \cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$$

**6. מעבר מסכום למכפלה  
(זהויות של סכום/הפרש פונקציות)**

$$(1) \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} *$$

$$(2) \sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} *$$

$$(3) \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} *$$

$$(4) \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} *$$

**5. מעבר לסכום מכפלות  
(זהויות של סכום/הפרש של שתי זוויות)**

$$(1) \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B *$$

$$(2) \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B *$$

-----

$$(3) \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B *$$

$$(4) \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B *$$

**7. מעבר ממכפלה לסכום  
(זהויות של מכפלת פונקציות)**

$$(1) \sin A \cos B = 0.5 [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$[(2) \cos A \sin B = 0.5 [\sin(A+B) - \sin(A-B)]]$$

$$(3) \cos A \cos B = 0.5 [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$(4) \sin A \sin B = 0.5 [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

**9. זהויות של זווית שלילית**

$$(1) \sin(-A) = -\sin A$$

$$(2) \cos(-A) = \cos A$$

-----

$$(3) \tan(-A) = -\tan A$$

$$(4) \cot an(-A) = -\cot an A$$

**8. זהויות של מעגל**

$$(1) \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$(2) \cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

-----

$$(3) \sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$(3) \cos(90^\circ - A) = \sin A$$

-----

$$(3) \tan(90^\circ - A) = \cot an A$$

$$(3) \cot an(90^\circ - A) = \tan A$$

↑ הערות לגבי "זהויות של מעגל"  
**1.** אנו ציינו את העיקריות אך יש עשרות זהויות מהסוג הנ"ל.  
**2.** אין טעם לנסות לזכור את כולן בעל פה. מאחר ויש שיטה לפתח אותן. את השיטה נלמד בשיעור טריגונומטריה במישור  
**3.** זהויות אלו יישמשו אותנו בעיקר בשיעור טריגונומטריה במישור

Melumad