MAT1120 - Linear Algebra

Teodor Spæren

September 2015

1 Oppgave 1

Er gitt matrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Skal beregne P^k for $k \in \{2, 3, 4, 40, 80\}$ og angi hva sannsynligheten er for at systemet går fra tilstand s_4 til s_2 i løpet av henholdsvis 2, 3, 4, 40 og 80 tidsskritt. Bruker følgende matlab script for å gjøre dette:

```
P = [1 0.7 0 0 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0.3 0 0.65 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0 0 0.35 1];

for k = [2 3 4 40 80]
    % P^k
    pk = P^k
    % This is the probability
    round(pk(2,4),5)
end
```

P^k blir da

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.7 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0.325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.475 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0.325 & 0 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0.35 & 1.0 \end{pmatrix}, \qquad P^3 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.805 & 0.35 & 0.2275 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2375 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1425 & 0 & 0.3088 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2375 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0525 & 0.175 & 0.4637 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.805 & 0.5163 & 0.2275 & 0 \\ 0 & 0.07125 & 0 & 0.1544 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2256 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07125 & 0 & 0.1544 & 0 \\ 0 & 0.0525 & 0.2581 & 0.4637 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad P^{40} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.9 & 0.6667 & 0.4333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.3333 & 0.5667 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$P^{80} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.9 & 0.6667 & 0.4333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.3333 & 0.5667 & 1.0 \end{pmatrix}$$

og p_{24}^k

$$p_{24}^2 = 0.3250, \quad p_{24}^3 = 0, \quad p_{24}^4 = 0.1544, \quad p_{24}^{40} = 0, \quad p_{24}^{80} = 0$$

2 Oppgave 2

For å finne basisen for $\mathrm{Nul}(P - I_5)$, ved å omgjøre matrisen $[(P - I_5)\ \mathbf{0}]$ til redusert trappeform. Dette gjøres med matlab med kommandoen **rref([(P-eye(5)) zeros(5,1)])**, noe som gir:

$$[(P - I_5)\ \mathbf{0}] \sim \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1.0 & 0.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gjør vi om dette til parameter form, får vi:

$$\begin{cases} x_1 & & \text{is free} \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \\ x_5 & & \text{is free} \end{cases}$$

Fra dette kan vi se at enhver basis for $\mathrm{Nul}(P - I_5)$ kan skrives som

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_1 + x_5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{x_5}{x_1 + x_5} \end{bmatrix}$$

Nå er det enkelt å se at P ikke er regulær da det ikke finnes en entydig likevektsvektor. Det at P ikke er regulær kunne vi ha misstenkt fra kalkulasjonene våre i Oppgave en, da selv for høye verdier av k var ikke P^k strengt positiv. Dette er derimot ikke nokk for å konkludere med at P ikke er regulær, da vi måtte ha sjekket for alle $k \in \mathbb{N}$.