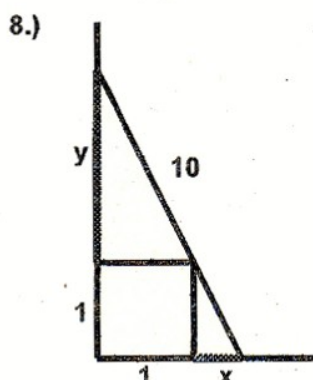




Übungen Mathematik
Analysis Blatt 1

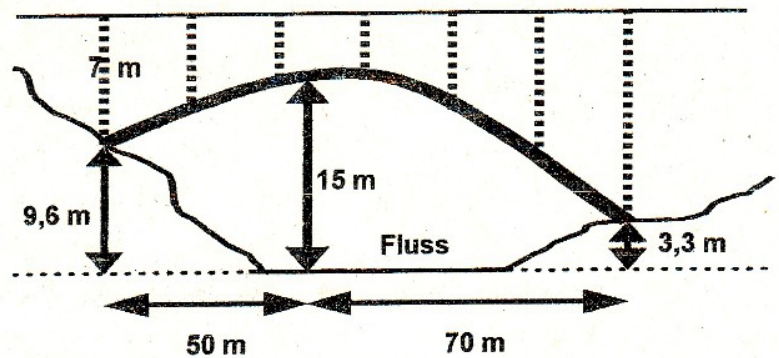
- 1.) Berechnen Sie zu den Funktionen $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$ und $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ die Kompositionen $f(h(x))$, $g(h(x))$, $h(g(x))$ und $f(h(g(x)))$.
- 2.) Zerlegen Sie die Funktion $f(x) = (3 \cdot \sin(x) + 1)^4$ derart, dass sie sich als Komposition einfacherer Funktionen darstellen lässt.
- 3.) Bestimmen Sie den Wertebereich, die Umkehrfunktion und den Definitionsbereich zur Funktion $f(x) = 3 + \frac{2}{x}$ und zeichnen Sie f und f^{-1} in ein Koordinatensystem.
- 4.) a.) Bestimmen Sie zur Funktion $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ den Definitions- und Wertebereich sowie die Umkehrfunktion mit Definitions- und Wertebereich.
b.) Sei $g(x) = f^{-1}(x)$ mit größtmöglichem Definitionsbereich der Rechenvorschrift. Ist g umkehrbar?
c.) Zeichnen Sie die Graphen von f , f^{-1} und g in ein Koordinatensystem.
- 5.) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich sowie eine Not-Umkehrfunktion zur Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ mit Definitions- und Wertebereich und zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem.
- 6.) Zerlegen Sie die folgenden Polynome vollständig in lineare und unzerlegbare quadratische Faktoren unter Benutzung des Horner-Schemas:
a) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ b) $f(x) = -x^4 + x^3 + x - 1$ c) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2$
d) $f(x) = x^4 - 191x^2 - 980$ e) $f(x) = x^4 - 10x^3 - 56x^2$ f) $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$
- 7.) Führen Sie für die folgenden Funktionen die Partialbruchzerlegung durch, bestimmen Sie ihre Nullstellen, Asymptoten und den jeweiligen Wertebereich und skizzieren Sie ohne Wertetabellen ihre Graphen:
a) $f(x) = \frac{-6x^2 + 59x - 83}{x^3 - 9x^2 + 15x - 7}$ b) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 6x - 9}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}$ c) $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4}{x^2 + 2x}$
d) $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{1 - x^2}$ e) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 2x + 2}$ f) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$



Eine 10 m lange Leiter soll wie in nebenstehender Zeichnung an eine Wand gelehnt werden, so dass sie zusätzlich auf einem würfelförmigen Block mit 1m Kantenlänge aufliegt. Bestimmen Sie den Abstand x zwischen dem Fußpunkt der Leiter und dem Block!

(es ergibt sich für x eine Gleichung vierten Grades, die mit unseren Methoden nicht lösbar ist. Man führt daher als neue Variable z den Abstand vom Mittelpunkt der Leiter zum Auflagepunkt auf dem Block ein. Für diese Variable erhält man ebenfalls eine Gleichung vierten Grades, die allerdings lösbar ist).

- 9.) Eine Brücke soll wie in der nebenstehenden Zeichnung gebaut werden. Der Bogen soll einer Parabelgleichung genügen, deren Maße der Skizze zu entnehmen sind. Geben Sie die Gleichung der Parabel in dem Koordinatensystem an, das den linken Auflagepunkt des Bogens als Nullpunkt hat, und bestimmen Sie die Länge der gepunkteten Stützen, die alle 20 m angebracht werden.



- 10.) Berechnen Sie (nur unter Benutzung der exp- und der ln-Taste):

a) $\log_5(3)$ b) $\log_3(5)$ c) $\log_{27}(125)$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^5$ e) 2^π

364: 564

- 11.) Lösen Sie die Gleichungen $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg(x)} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg(x)} = \frac{13}{6}$ und $\left(\frac{\pi}{e}\right)^{\lg(x)} + \left(\frac{e}{\pi}\right)^{\lg(x)} = 2,2$.

- 12.) Die barometrische Höhenformel beschreibt die Abnahme des Luftdrucks p in einer isothermen Atmosphäre bei wachsender Höhe h (g = Erdbeschleunigung, p_0 = Druck in Meereshöhe (= Höhe 0), ρ_0 = Luftdichte):

$$p(h) = p_0 \cdot \exp\left(\frac{-\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h\right) \quad \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} = 0,0001251 \text{ m}^{-1}$$

Lösen Sie diese Formel nach h auf; in welcher Höhe beträgt der Druck 30% des Drucks in Meereshöhe?

- 13.) Bestimmen Sie Umkehrfunktionen zu a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b) $f(x) = 1 + \ln(1+x^2)$ c) $f(x) = 5 + 3 \cdot e^{\frac{x}{2}}$
d) $f(x) = \sqrt{\cosh(x) - 2}$ e) Zeigen Sie: $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- 14.) Beweisen Sie folgende Aussagen mit den Definitionen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$:

a) $\cosh$ ist eine gerade, $\sinh$ eine ungerade Funktion b) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

c) $\cosh(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ d) $\tanh(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

- e) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$\sinh(x) = 0, \quad \sinh(x) = 1, \quad \cosh(x) = 2$$

- 15.) Entwickeln Sie mit Hilfe der Additionstheoreme Formeln für $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, $\sin(3x)$, $\cos(3x)$, $\sin(4x)$ und $\cos(4x)$.

- 16.) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme:

a) $\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

b) $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

- 17.) Zeigen Sie:

a) $\sin(x) = \operatorname{sign}(\sin(x)) \cdot \sqrt{\frac{\tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}}$

b) $\cos(x) = \operatorname{sign}(\cos(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$



18.) Vereinfachen Sie folgende Terme:

- a) $\cos(\arcsin(x))$ b) $\sin(\arccos(x))$ c) $\sin(\arctan(x))$ d) $\cos(\arctan(x))$ e) $\tan(\arcsin(x))$
f) $\tan(\arccos(x))$ g) $\arccos(\sin(x))$ h) $\arcsin(\cos(x))$

19.) Geben Sie (als Vielfache von π) alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen an:

- a) $2 \cdot \sin(x) = -\sqrt{3}$ b) $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$ c) $\sin(x) + \cos(x) = 1$ d) $\tan(x) + \tan(2x) = 0$
e) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(x) = 1$ f) $\cos(x) - \sin(x) = 2$ g) $\sin^2(x) + 2 \cos(x) = \frac{7}{4}$

20.) Eine harmonische Schwingung kann durch eine reine Sinusfunktion, eine reine Cosinusfunktion oder durch Überlagerung einer Sinus- und einer Cosinusfunktion ohne Phasenverschiebung beschrieben werden:

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_1) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_2) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t) + b \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

(A = Amplitude, ω = Kreisfrequenz, ϕ = Phasenverschiebung).

Geben Sie Formeln an zur Berechnung von ϕ_1 aus ϕ_2 (und umgekehrt) bzw. von a und b aus A und ϕ_1 (und umgekehrt).

21.) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Polarkoordinatenfunktionen $r(\phi) = \tan(\phi)$ und $\phi(r) = \tan(r)$

22.) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Parameterkurven und bestimmen Sie (wenn möglich) die jeweiligen expliziten Darstellungen:

- a) $x(t) = \sin(3t)$, $y(t) = \cos(2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ b) $x(t) = \sin^2(t)$, $y(t) = \cos^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$
c) $r(t) = t + \sin(t)$, $\phi(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$ d) $r(t) = 1 - t$, $\phi(t) = \arcsin(t)$, $-1 \leq t \leq 1$

23.) Drücken Sie die Gleichung der Geraden $y = 0,4 \cdot x - 2$ in Polarkoordinaten (aufgelöst nach r) aus. Erstellen Sie eine Wertetabelle für diese Polarkoordinatengleichung und skizzieren Sie den zugehörigen Graph.

24.) Bestimmen Sie die Graphen der folgenden impliziten "Funktionen":

- a) $x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} = x$ b) $r + r \cdot \cos(\phi) = 2 \cdot a$ ($a \geq 0$) c) $\sin(x \cdot y) + x + y = 2$
d) $x^2 + y^2 - 4 \cdot x = 0$ e) $2 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 - 4 \cdot x - 8 \cdot y = 1$ f) $3 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot y = 0$

25.) Berechnen Sie $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 100.000 \\ 99.999 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0,5 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1,5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

26.) Sei a_n die Folge mit dem Startwert $a_0 = 2$ und der Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$.

- a) Berechnen Sie die ersten 5 Folgenglieder auf 6 Dezimalen genau.
b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+$: $(a_n)^2 \geq 2$
c) Zeigen Sie, dass a_n nach unten beschränkt und monoton fallend ist.
d) Folgern Sie, dass a_n in $\mathbb{R}$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert dieser Folge unter Benutzung von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \quad (\text{Dies gilt nur für konvergente Folgen!}).$$

27.) Berechnen Sie für alle positiven reellen Zahlen a den Grenzwert der Folge $a_n = \frac{a^n}{n!}$. Definieren Sie a_n dazu rekursiv und argumentieren Sie wie in Aufgabe 26.

28.) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot (1+n)}{3n^3 - n}$

b.) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{0,8}$

c.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{n+1}{2n-3}}$

d.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (2n+1)^3 - 8n^3}{n \cdot (2n+3)^2 - 4n^2}$

e.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)} - n}$

29.) Geben Sie mit Hilfe einer geometrischen Reihe die Zahl $0,1\overline{8}$ als Bruch an.

30.) Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

c.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

d.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0,9)^n}{n}$

e.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (0,9)^n}{n}$

31.) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Reihen

a.) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1!}$

b.) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{2k!}$

c.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1!}$

d.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}$

e.) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$

f.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot n!}{n^n}$

32.) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Reihen

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$

und

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(Hinweis: Zerlegen Sie die Summanden zunächst mit Hilfe der Partialbruchzerlegung, bestimmen Sie so eine explizite Darstellung der Partialsummenfolgen und berechnen Sie damit die Grenzwerte.)

33.) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a.) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

b.) $\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1}$

c.) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - 3x + 10}{2x^2 + x - 10}$

d.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$

e.) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

f.) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$

g.) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^2 - 2}$

h.) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

i.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

j.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$

k.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

l.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

m.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$

n.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

o.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x}$

p.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)}$

q.) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)}$

r.) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$

s.) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(c(\sin(x) - \sin(a)))}{\sin(x) - \sin(a)}$

34.) Beweisen Sie nur mit der Definition (also ohne Benutzung von Satz 3 aus Abschnitt 5.2 der Vorlesung), dass die Funktion $f(x) = x^3 - 5x + 7$ stetig ist.



35.) Prüfen Sie, ob die Definitionslücken der folgenden Funktionen stetig behebbar sind, und erweitern Sie ggf. den Definitionsbereich:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-5}$

b) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{(x-3)^2}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{|x|-1}$

d) $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$

e) $f(x) = e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

f) $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$

36.) Sei $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ e^{\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

Prüfen Sie, an welchen Stellen diese Funktion stetig ist, und zeichnen Sie den Graph von f.

37.) Berechnen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ zur Funktion $f(x) = \cos(x)$ die Ableitung $f'(x_0)$ gemäß der Definition des Differentialquotienten (analog zum Vorlesungsbeispiel für $f(x) = \sin(x)$).

38.) Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $\cos^4(x)$

b) $\left(\frac{2+3x}{1-2x}\right)^3$

c) $\ln[\lg[1 + \sin^2(x)]]$

d) $\sinh(x)$

e) $\cosh(x)$

f) $\frac{1-2x}{1+2x}$

g) $5\log_7(3x^2)$

h) $3\sin(x) - 5\cos(x)$

i) $4x^5 - 7\sqrt[4]{x} + \frac{4}{\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x^3}$

j) $\frac{x+7}{(x^2+3)^2}$

k) $e^{\sin(x)}$

l) $\frac{x}{\sin(x) - x \cdot \cos(x)}$

m) $e^x \cdot (x-1)$

n) $e^{-\left(\frac{1}{x}\right)}$

o) $x^2 \cdot \cosh(x)$

p) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

q) $\frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))$

r) $\sin(x) \cdot \sinh(x) - \cos(x) \cdot \cosh(x)$

39.) Bestimmen Sie die Ableitung für die Funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ und $g(x) = \ln(\sqrt{\tan(x)})$

a) direkt b) als Ableitung einer Umkehrfunktion

40.) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = u(x)^{v(x)}$, wenn $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbare Funktionen sind.

41.) Differenzieren Sie die Funktionen

a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

b) $(2x)^{\sqrt{x}}$

c) $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

e) $x \cdot \sqrt{1 - \cos(x)}$

f) $f(x)$ aus Aufgabe 36.

42.) a) Berechnen Sie die Steigung für die Graphen aus den Aufgaben 21, 22 und 24; wo liegen senkrechte bzw. waagerechte Tangenten?

b) Berechnen Sie die Krümmung für die Graphen aus den Aufgaben 21 und 22 sowie für die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \arctan(x)$; wo ist die Krümmung von $f(x)$ am größten?

43.) a) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x + \sin(x)$ streng monoton auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Für welche reellen Zahlen t ist $f(x) = x^3 - 2x^2 + tx - 1$ streng monoton auf $\mathbb{R}$?

44.) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \cdot \ln(3x) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan(x) \cdot \tan(2x)) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad (n \in \mathbb{N}) & \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\left(\frac{1}{n}\right)} & \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\left(\frac{1}{n}\right)} \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin(x)}}{x - \frac{\pi}{2}} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + \sin(x)}{5x} & \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - n^2} - \sqrt{n^2 - n} \right) & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \\
 \text{m) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x & & &
 \end{array}$$

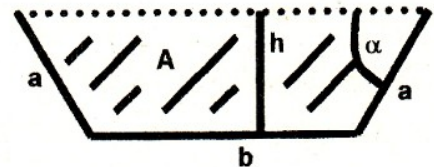
45.) Diskutieren Sie die Funktionen

$$\text{a) } f(x) = x \cdot \ln(x^2) \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{1 - \sin(x)} \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{x^6 + 2x^5 + x^4} \quad \text{d) } f(x) = e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$$

46.) Ein unterirdischer Abwasserkanal hat als Querschnitt ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis; für welche Abmessungen wird bei einem Querschnittsumfang von 5 Metern die Querschnittsfläche möglichst groß?

47.) Ein Speicherbehälter besteht aus einem Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel als Überdachung; bei welchen Abmessungen ist bei gegebenem Zylindervolumen V die Oberfläche des Behälters minimal?
(Kugeloberfläche = $4\pi r^2$)

48.) Der Querschnitt eines nach oben offenen Entwässerungskanals ist ein gleichschenkliges Trapez mit Fläche A und Höhe h . Bei welchem Böschungswinkel α ist der benetzte Teil und damit der Reibungswiderstand am geringsten?



49.) Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^2 x^2 dx$ als Grenzwert einer Unter-, Ober- bzw. Zwischensumme.

$$\text{(Hinweis: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \text{)}$$

50.) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \int x^2 \cdot \sin(2x) dx & \text{b) } \int \frac{5x+7}{3x^2+1} dx & \text{c) } \int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx & \text{d) } \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx \\
 & & & \text{(auf 3 verschiedene Arten)} \\
 \text{e) } \int \frac{x}{a^2 + b^2 \cdot x^2} dx & \text{f) } \int \sqrt{1-x^2} dx & \text{g) } \int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \arctan(x)} dx & \\
 \text{h) } \int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx & \text{i) } \int \frac{4x^2+3x+17}{x^3+x^2+3x-5} dx & \text{j) } \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx & \text{k) } \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx
 \end{array}$$

51.) Geben Sie eine Formel an, die $I_n = \int \sin^n(x) dx$ auf entsprechende Integrale mit niedrigerem

Exponent zurückführt, und bestimmen Sie mit dieser Formel I_5 und I_6 .

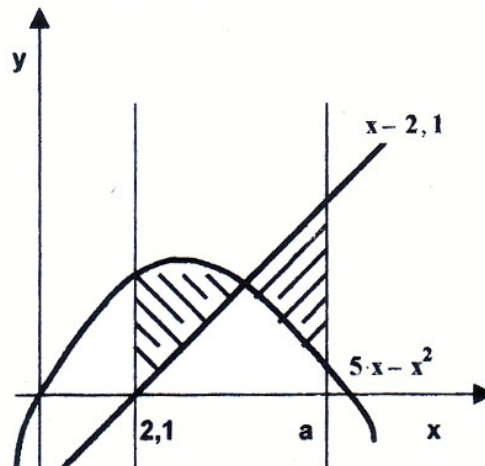
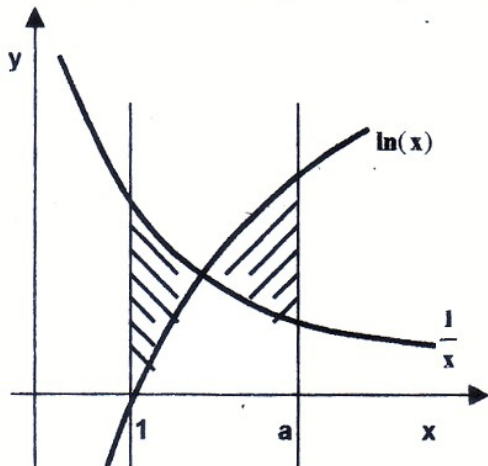
52.) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale ($a > 0$):

$$\begin{array}{lllll}
 \text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx & \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{1-x}} dx & \text{c) } \int_0^1 \ln(x) dx & \text{d) } \int_0^1 \frac{1}{x^a} dx & \text{e) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx
 \end{array}$$



- 53.) a) Berechnen Sie die Größe der Flächen, die von den Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ eingeschlossen werden.
b) Berechnen Sie die Fläche einer Ellipse mit den Halbmessern a und b .
c) Welche Fläche schließen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ für positive x ein?

- 54.) Bestimmen Sie in den 2 Skizzen die Zahl a jeweils so, dass die beiden schraffierten Flächen gleich groß sind.



- 55.) a) Wie groß sind die Flächen, in die die Kurve $r = 2\phi$ und die positive x -Achse die (x,y) -Ebene unterteilen?
b) Welche Fläche schließen die Graphen $r(\phi) = \tan(\phi)$ und $f(x) = x$ ein?
c) Welche Fläche schließt der Graph der Parameterfunktion $x(t) = \sin(3t)$, $y(t) = \cos(2t)$ ein?

- 56.) a) Bestimmen Sie die Länge des unterhalb der x -Achse gelegenen Teils des Graphen von $f(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x^3 - 1})$.
b) Wie lang sind die Kurvenstücke, in die die positive x -Achse die Kurve $r = 2\phi$ zerlegt?
c) Bestimmen Sie die Länge des im 3. Quadranten gelegenen Teils des Graphen der Parameterfunktion $x(t) = t^2 + t$, $y(t) = t^2 - t - 1$.
d) Berechnen Sie den Umfang eines Kreises mit Radius R .

- 57.) a) Bestimmen Sie das Volumen einer Pyramide mit Höhe h und rechteckiger Grundfläche (Kanten a und b).
b) Bestimmen Sie zur Funktion $f(x) = 2 - \cosh(x)$ das Volumen und die Oberfläche des Rotationskörpers, den man bei Rotation des oberhalb der x -Achse gelegenen Teils des Graphen um die x -Achse erhält.

- 58.) a) Geben Sie die Euler'sche Darstellung von $z_1 = 3 + 4j$, $z_2 = -3 + \sqrt{3}j$ und $z_3 = z_1 z_2$ an.
b) Bestimmen Sie die kartesische Darstellung für die komplexen Zahlen $z_1 = 6e^{(\frac{\pi}{3}j)}$, $z_2 = 4e^{(\frac{5}{4}\pi j)}$,

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2}, \quad z_4 = e^j, \quad z_5 = 6e^{(\frac{j+1}{j-1})}, \quad z_6 = 6e^{(\frac{2j}{j+1})} \quad \text{und} \quad z_7 = \frac{(1+j)^2}{1-j}.$$

- 59.) Zeigen Sie: a) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ b) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ d) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2j}$

- 60.) Zerlegen Sie den Term $a^2 + b^2$ in $\mathbb{C}$ in Faktoren (3. Binom!).

61.) Welchen Vektor erhält man, wenn man den Vektor $\begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$ um 45° dreht und auf das Doppelte streckt?

62.) Berechnen Sie $(1 + \sqrt{3}j)^6$ a) nach Definition der komplexen Multiplikation b) mit Satz von Moivre

63.) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen z mit a) $z^5 = 8 - 6j$ b) $z^3 = -1$ c) $z^4 = e^{\frac{\pi}{3}j}$

64.) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f(z) = z^5 + z^3 - z^2 - 1$ (Hinweis: j ist eine dieser Nullstellen).
Geben Sie die komplexe Linearfaktorisierung sowie die reelle Faktorisierung gemäß § 2, Satz 3 an.

65.) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die komplexe Partialbruchzerlegung von $f(z) = \frac{4jz + 8}{z^3 - z^2 + z - 1}$

66.) a) Geben Sie die Mac-Laurin-Entwicklungen für $\cos(x)$ und $\sinh(x)$ an und zeigen Sie durch Untersuchung des Restgliedes, daß sich die beiden Funktionen für alle reellen Zahlen x als unendliche Reihen darstellen lassen.
b) Für welche reellen Zahlen x läßt sich $\ln(1+x)$ durch seine Mac-Laurin-Reihe darstellen? Bestimmen Sie diese Reihe und berechnen Sie mit ihren ersten 2 (3) Summanden den Wert von $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

67.) Verifizieren Sie den Mittelwertsatz für folgende Funktionen:

a) $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$, $b = e$ b) $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$
c) $f(x) = x^2$, a und b beliebig (allgemein!).

68.)* Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}^+$ ist.

69.) Entwickeln Sie das Polynom $f(x) = 5x^2 - 6x + 3$ in Potenzen von $(x+2)$, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a , b und c mit $f(x) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c$

70.) Ein Körper bewege sich längs einer Messskala mit unbekanntem Weg-Zeit-Gesetz. Nach einer Sekunde werden folgende Werte für Strecke, Geschwindigkeit und Beschleunigung gemessen:

$s(1) = 4,08$, $v(1) = 1,32$ und $a(1) = -1,08$

Berechnen Sie für $t = 0,7/0,8/0,9/1,0/1,1/1,2/1,3$ $s(t)$ in zweiter Näherung (d.h. zweites Taylor-Polynom) und vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit dem Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = 3t + 2\cos(t)$

71.) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich und -wenn möglich- die explizite Darstellung zu folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-3)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} (x-1)^{2n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} (x-2)^n$
e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$

72.) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen und zeichnen Sie sie in der Gauß'schen Zahlenebene: a) $\sin(z) = 2$ b) $\sin(z) = 2 + 3j$ c) $e^z = -1$ d) $e^z = -1 + j$

73.) Skizzieren Sie die Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\sin(z) = \cos(z)$ b) $\sin(z) = \sin(|z|)$ c) $\sin(z) = \sin(\bar{z})$ d) $e^z = e^{(\bar{z})^2}$

74.) Zeigen Sie: a) $W_{\sin} = \mathbb{C}$ b) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$



75.) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

- a) $y'y + x = 0$ b) $2xy' - y = 0$ c) $y' + 2y^2 = 0$ d) $y' + \sin^2(x+y) = 0$ e) $xy' - y = \cot\left(\frac{y}{x}\right)$
f) $xy' + 3y = 4x$ g) $x^2y' = y^2$ h) $y'(y^2+1) = x^2+1$ i) $y'' - 8y' + 16y = 0$ j) $y' = x + y$
k) $xy' + y = x \sin(x)$ l) $xy' - y = x^2$ m) $y'' + 4y' + 13y = 0$ n) $y''' - y'' - y' + 1 = 0$ o) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

76.) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- a) $y' - y^2 = 1$, $y(0) = 1$ b) $y' - y \cos(x) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ c) $y' \sin(x) + 2y \cos(x) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$
d) $y' \cos(y) = 2x$, $y(0) = \pi$ e) $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x) - \cos(2x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$

77.) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

- a) $(y')^2 - 4xy' + 4y = 0$ (Tip: Substitution $u = x^2 - y$) b) $((y' - 1)(x - y))^2 = 1 - (y - x)^2$
c) Welche Lösungen erhält man in a) bzw b) für die Anfangswerte $\alpha) y(0) = 2$ $\beta) y(0) = 0$ $\gamma) y(0) = -1$?

78.) Erstellen Sie für die folgenden Funktionen Wertetabellen und skizzieren Sie ihre Höhenlinien:

- a) $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3y$ c) $f(r, \phi) = r \cdot \sin(2 \cdot \phi)$

79.) Berechnen Sie das 3. Taylor-Polynom zur Funktion $f(x) = e^x \cdot \sin(y)$ im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

80.) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen und die aus Aufgabe 78 auf Extrema:

- a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ b) $f(x, y) = 2x^2 + \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$ c) $f(r, \phi) = r^2 + \phi^2 - 2 \cdot \phi$

81.) a) Eine Strecke der Länge s ist so in drei Teile zu teilen, dass deren Produkt möglichst groß ist; wie ist die Teilung vorzunehmen?

b) In welchem Verhältnis müssen die Kanten eines Quaders mit gegebenem Volumen zueinander stehen, damit seine Oberfläche minimal ist ?

82.) Bestimmen Sie das vollständige Differential und verifizieren Sie seine Approximationseigenschaft für

- a) $f(x, y) = 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot y^3$ mit $dx = 0,1$, $dy = 0,1$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$
b) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ mit $dx = 0,05$, $dy = -0,05$, $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}\right)$
c) $f(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$ mit $dx = 0,1$, $dy = 0,5$, $(x_0, y_0) = \left(1, \frac{3}{2} \cdot \pi\right)$
d) $f(x, y) = \arctan(xy)$ mit $dx = -0,2$, $dy = 0,2$, $(x_0, y_0) = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$

83.) In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basis $b = 12,4$ m und ein Schenkel $a = 9,8$ m gemessen wurden, jeweils mit einer Genauigkeit von $0,1$ m. Mit welchem relativen bzw. absoluten Fehler kann die Dreiecksfläche bestimmt werden ?

84.) Drei Widerstände R_1 , R_2 und R_3 betragen mit einprozentiger Genauigkeit 100Ω , 50Ω bzw. 250Ω ; die Spannung bei einer Parallelschaltung dieser drei Widerstände wurde mit zweiprozentiger Genauigkeit als 210 V gemessen. Bestimmen Sie die Stromstärke und ihren relativen bzw. absoluten Fehler.

85.) Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale und interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch:

a) $\int_0^1 \int_1^e \frac{x^2}{y} dy dx$

b) $\int_0^3 \int_0^{1-x} (2xy - x^2 - y^2) dy dx$

c) $\int_0^\pi \int_0^{\sin(\phi)} r \cdot \sin(\phi) dr d\phi$

86.) a) Welches Volumen schließt der Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 - y$ über dem Einheitskreis mit der (x, y) -Ebene ein? Wie groß ist die Fläche dieses Teils des Graphen?

b) Welches Volumen schließt der oberhalb der (x, y) -Ebene gelegene Teil der Graphen zu den Funktionen $f(r, \phi) = 1 + \cos(\phi) - r$ und $f(x, y) = 1 + \cos(y) - x$ mit der (x, y) -Ebene ein?

c) Bestimmen Sie die Volumen und Oberfläche eines Torus mit Radius R_1 und Querschnittsradius R_2 .

d) Bestimmen Sie das Volumen, das der Graph der Funktion $f(r, \phi) = r^2 \cdot \sin(2\sqrt{\phi})$ über dem Einheitskreis mit der (x, y) -Ebene einschließt; wie groß ist die Fläche dieses Teils des Graphen?

87.) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x+y} dx dy$

b) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x \cdot y} dx dy$

c) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$

88.) Bestimmen Sie zur Wertetabelle

x	-2	0	3	5
y	-0,2	-0,3	0,7	5,3

a) das Interpolationspolynom b) die interpolierende SPLINE-Funktion c) die Ausgleichsparabel

89.) a) Bestimmen Sie $\sqrt{10}$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf 5 Dezimale genau.

b) Berechnen Sie jede der beiden Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^2 - x - 1$ mit einer geeigneten Iteration auf 4 Dezimale genau.

c) Wieviele Lösungen haben die Gleichungen $\cos(x) = 0,3 \cdot x$, $\cos(x) = 0,33 \cdot x$ und $10^6 \cdot x^2 = \ln(x) + 8$? Bestimmen Sie diese Lösungen mit geeigneten Iterationsverfahren.

90.) a) Bestimmen Sie die Länge eines Sinusbogens mit Hilfe der Trapezformel und der Simpsonformel.

b) Berechnen Sie $\int_0^1 \sin(\pi x^2) dx$ mit Hilfe der Trapezformel, der Simpsonformel und einer

c) Berechnen Sie das Doppelintegral $\int_0^1 \int_x^{3-x^2} \ln(1+x+y) dx dy$ mit Hilfe der Simpsonformel.

91.) Lösen Sie die folgenden AWP'e mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens:

a) $y' + y = x - y^2$, $y(0) = 2$

b) $y'' + y' = x - y^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

92.) Lösen Sie die DGL'en aus den Aufgaben 75 und 76 mit Hilfe der Laplace-Transformation, soweit dies möglich ist.