Cours de physique générale I

Systèmes de Communication

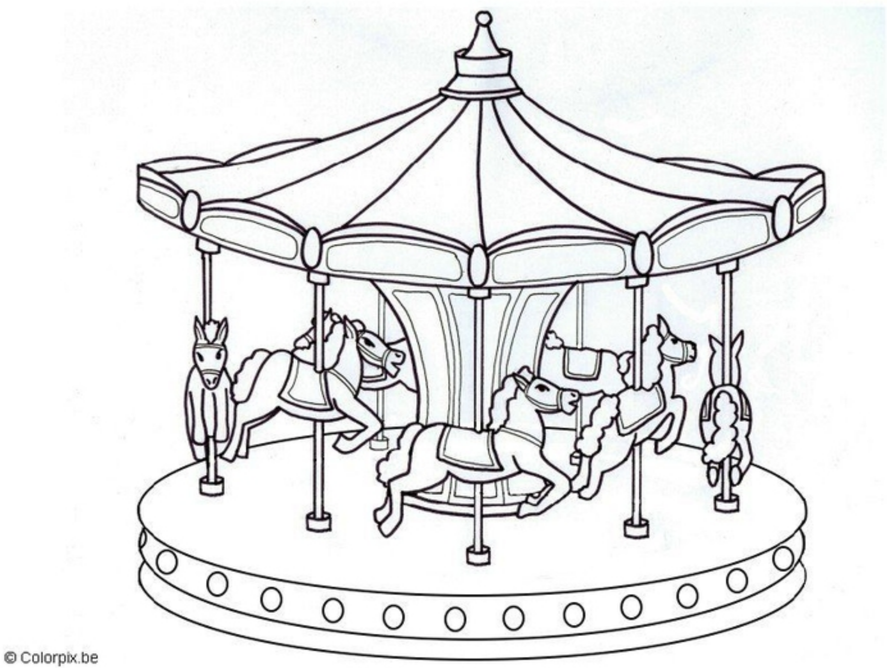
Dr Jean-Marie Fürbringer
Section de Physique

L'essentiel du cours a été préparé par Prof. Olivier Schneider

Leçon 4

Rotations

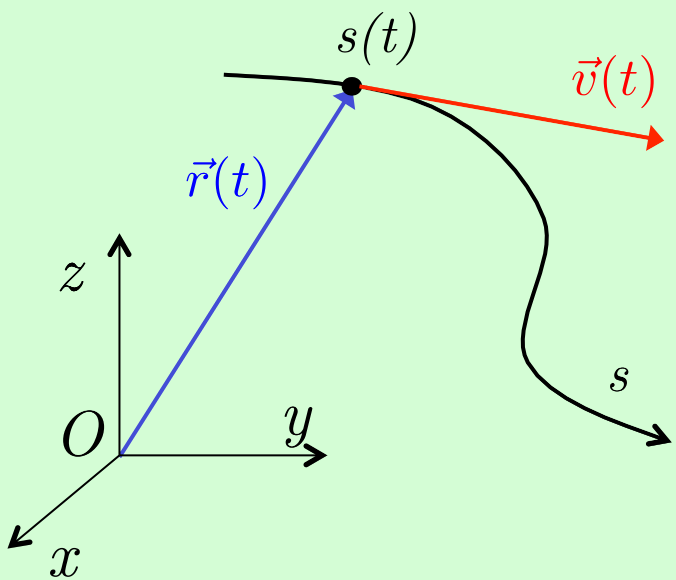
Coordonnées cylindriques



4.1 Objectifs d'apprentissage

- Maîtriser les mouvements circulaires
  - Se rappeler de leurs propriétés
  - Visualiser les différents vecteurs représentatifs
  - Appliquer ces propriétés à une situation pour faciliter la résolution
- Savoir décrire vectoriellement une rotation
  - Parallèle ou non à un axe du système
- Savoir dériver un vecteur tournant

3.14 Cinématique du point matériel



$\vec{r}(t)$ = position par rapport à O

$s(t)$ = abscisse curviligne

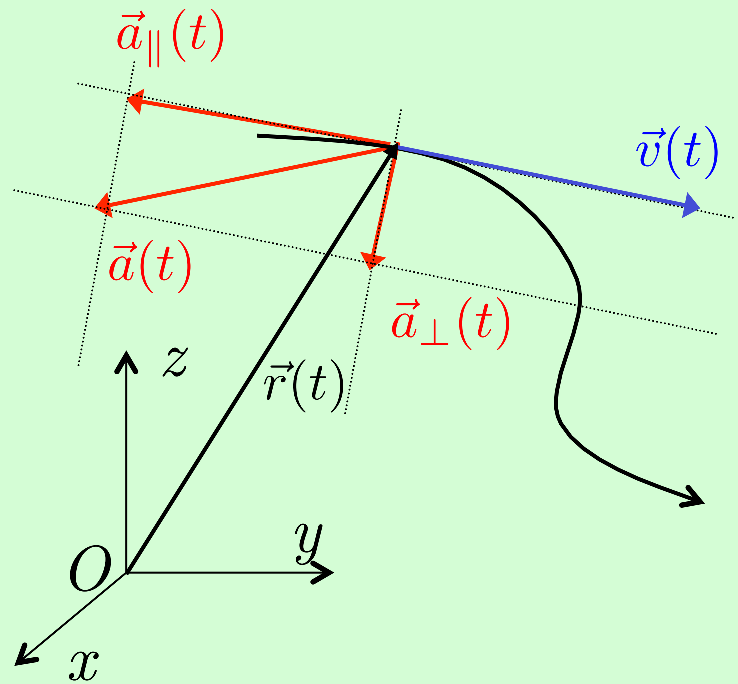
$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(s(t))$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \|\vec{v}\| = \text{vitesse scalaire}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{r}}{ds} = v\hat{\tau}$$

3.14 Cinématique du point matériel (suite)

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t))$$
$$= \frac{d}{dt}(v\ \hat{\tau})$$
$$= \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\hat{\tau}}{dt}$$
$$= \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$$



$$\hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\hat{\tau}^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\tau} \perp \frac{d\hat{\tau}}{dt}$$

4.2 Mouvement circulaire

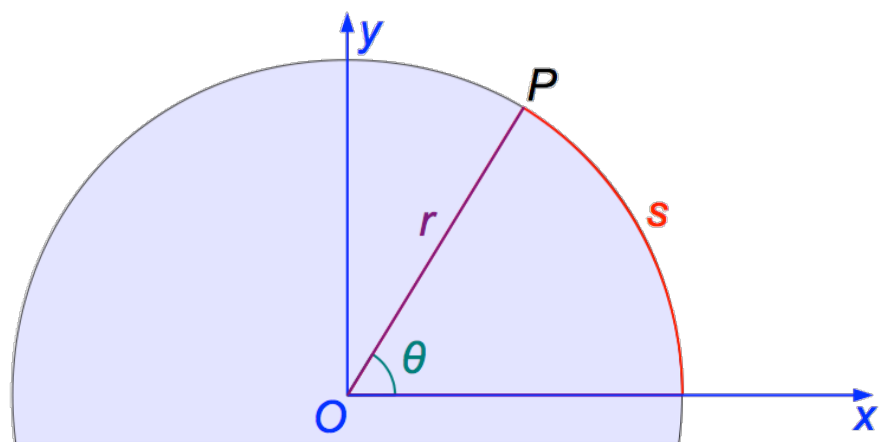
Un disque de rayon r, sur lequel se trouve un point P

- Repère Oxy
  - O au centre du disque
  - L'axe x passe par la position initiale du point P
- Si le disque tourne autour de son centre, le point P effectue un mouvement circulaire
- La distance s parcourue par le point

$$\boxed{s = r\ \theta}$$

– r *et* θ coordonnées polaires

– θ en radian



4.3 Vitesse angulaire (scalaire)

- La vitesse angulaire ω du point P correspond au nombre de radians que le point P parcourt en une seconde
- Dans le cas où la vitesse de rotation du disque est constante :

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

- Dans le cas général la vitesse angulaire instantanée ω du point P est la dérivée de θ par rapport au temps

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Dans le système d'unité SI, la vitesse angulaire se mesure en radians par seconde

4.4 Accélération angulaire (scalaire)

- Rapport entre la variation de la vitesse angulaire et l'intervalle de temps nécessaire à cette variation
- L' accélération angulaire moyenne est définie par

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

- L'accélération angulaire instantanée α est la dérivée de la vitesse angulaire instantanée par rapport au temps

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

- Dans le système d'unité SI, l'accélération angulaire se mesure en radians par seconde au carré

4.5 Mouvement circulaire uniforme

- Mouvement circulaire ayant une vitesse angulaire ω constante

$$\dot{\theta} = \omega \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \omega t + \theta_o$$

  - où θ_0 correspond à l'angle θ au temps $t = 0$
- En coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x(t) = r \ \cos\theta(t) = r \ \cos(\omega t + \theta_o) \\ y(t) = r \ \sin\theta(t) = r \ \sin(\omega t + \theta_o) \end{cases}$$

4.6 Mouvement circulaire uniformément accéléré

- Mouvement circulaire ayant une accélération angulaire α constante

$$\dot{\omega} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \alpha t + \omega_o$$

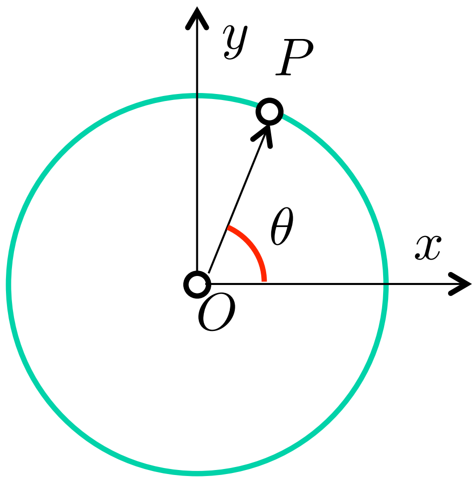
  - où ω_0 correspond à la vitesse angulaire au temps $t = 0$

- L'équation horaire devient

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_o t + \theta_o$$

  - où θ_0 correspond à l'angle θ au temps $t = 0$

- En coordonnée cartésienne

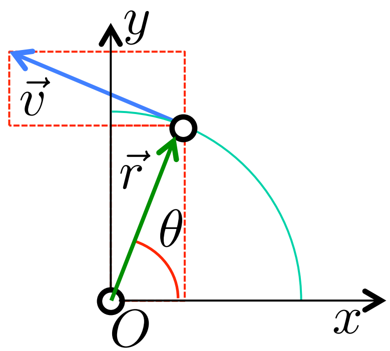


$$\begin{cases} x(t) = r\ \cos\theta = r\ \cos(\frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_o t + \theta_o) \\ y(t) = r\ \sin\theta = r\ \sin(\frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_o t + \theta_o) \end{cases}$$

4.7 Vecteur vitesse (mouvement circulaire)

$$\begin{cases} x(t) = r \ \cos\theta(t) \\ y(t) = r \ \sin\theta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{d}{dt}(r \ \cos\theta(t)) \\ v_y(t) = \dfrac{d}{dt}(r \ \sin\theta(t)) \end{cases}$$



$$si \ \frac{dr}{dt} = 0 \quad \begin{cases} v_x(t) = -r \ \sin\theta(t)\dot{\theta} \\ v_y(t) = \ r \ \cos\theta(t)\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = r\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}\cdot r\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} = r^2\dot{\theta}(-\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta) = 0$$

$$\boxed{si \ \frac{dr}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\perp\vec{r}}$$

4.8 Accélération centripète et tangentielle

- Comme la distance parcourue par le point P vaut $s = r\,\theta$, la vitesse v du point P vaut

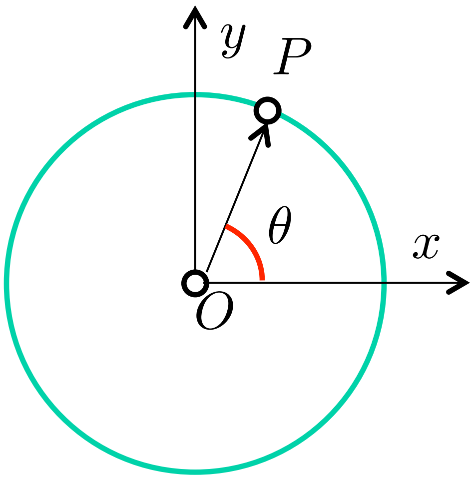
$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

- Comme cette vitesse est tangente à la trajectoire, on obtient la composante de l'accélération du point P tangente à la trajectoire

$$a_\theta = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

- un point effectuant un mouvement circulaire subit une accélération centripète qui est dirigée vers le centre du cercle

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2}$$



4.9 Accélération scalaire

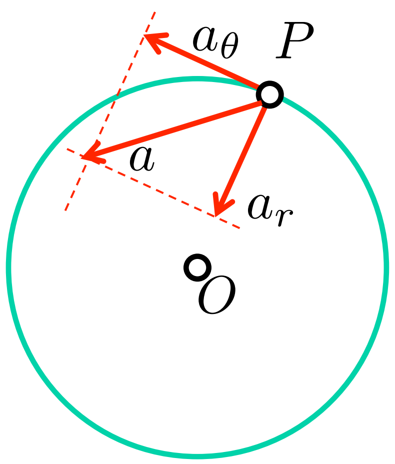
Accélération tangentielle

$$a_\theta = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

Accélération centripète

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_\theta^2 + a_r^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



4.10 Evolution des vecteurs unités

soit $\left(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\right)$ avec O fixe

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = E_{21}\hat{e}_2 + E_{31}\hat{e}_3 \qquad \left(\text{normal à } \hat{e}_1 \text{ puisque } \hat{e}_i \cdot \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\hat{e}_i^2\right) = 0\right)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \qquad (\text{avec } E_{ii} = 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E^T_{ij}\,\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k = \delta_{ik} \implies \frac{d}{dt}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k\right) = 0$$

Anti-symétrique: $$0 = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k + \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} E_{jk}\hat{\boldsymbol{e}}_j = E_{ki} + E_{ik}$$

$$E^T = \begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} \\ -E_{12} & 0 & E_{23} \\ -E_{13} & -E_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad E^T = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$ Convention!

4.11 Dérivée d'un vecteur tournant

Pour tout $\vec{r}$ fixé dans le repère :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + r_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) = \sum_i r_i \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}$$

$$= \sum_i r_i \sum_j E_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_j \left(\sum_i E_{ji}\, r_i\right)\hat{\mathbf{e}}_j \; = E^T\vec{r}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

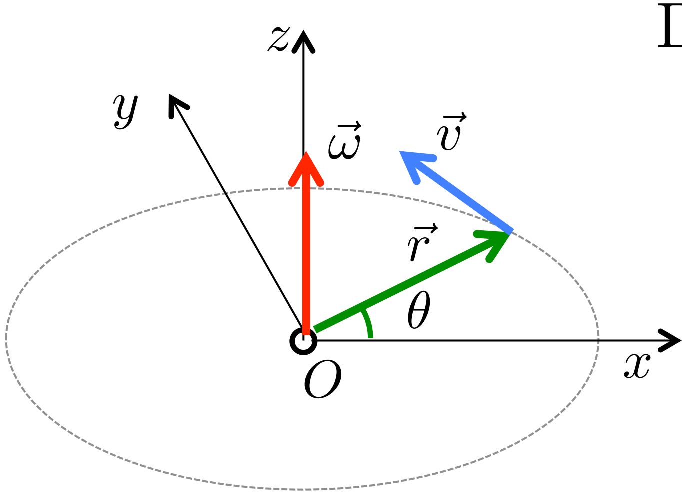
$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$$

4.11 Dérivée d'un vecteur tournant

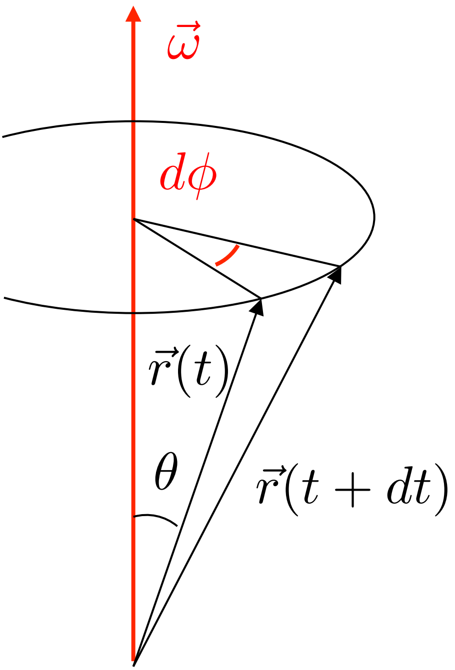
$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Dérivée d'un vecteur tournant



$$\vec{\omega} \begin{cases} \text{Perpendiculaire au plan de rotation} \\ \text{Parallèle à l'axe de rotation} \end{cases}$$

4.12 Interprétation du vecteur $\vec{\omega}$



Si $\vec{r}$ est colinéaire à $\vec{\omega}$, alors $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 0$, donc $\vec{r}$ ne bouge pas

$\Rightarrow$ la direction de $\vec{\omega}$ définit l'axe de rotation au temps t

$\Rightarrow$ sens de $\vec{\omega} =$ sens de rotation (règle main droite)

$$\|d\vec{r}\| = \|\vec{\omega} \wedge \vec{r}\| \; dt = |\omega| \; dt \; \|\vec{r}\| \sin\theta$$

Mais $\|d\vec{r}\| = \|\vec{r}\| \; \sin\theta \; d\phi$, donc $\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$

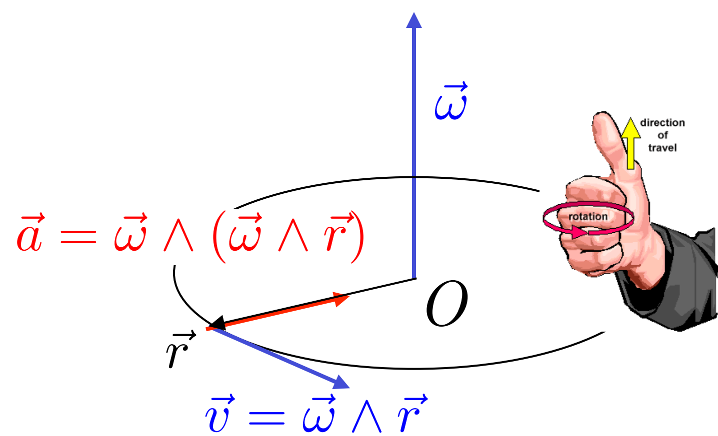
$\Rightarrow$ la norme de $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire de rotation

Cas particulier $\vec{\omega} = const$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

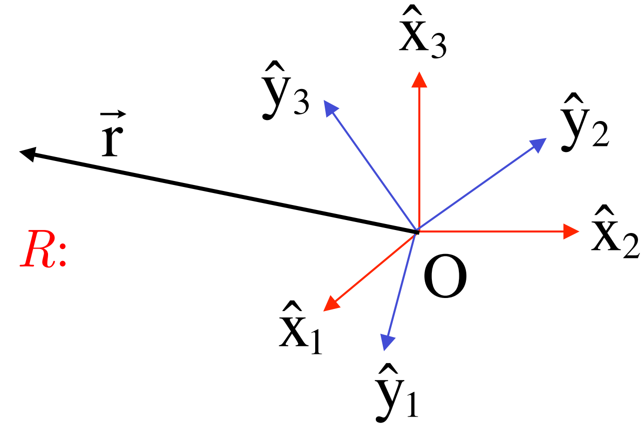
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

mouvement circulaire uniforme



$$\begin{cases} v = \omega \; r \\ \vec{a} = -\omega^2 \vec{r} \end{cases}$$

4.12 Rotation passive



Changement de repère par une rotation passive R:

$$\begin{cases} O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 \;\rightarrow\; O\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3 \\ \vec{r} \text{ fixe} \end{cases}$$

dans $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$: $\vec{r} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3$

dans $O\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3$: $\vec{r} = y_1\hat{y}_1 + y_2\hat{y}_2 + y_3\hat{y}_3$

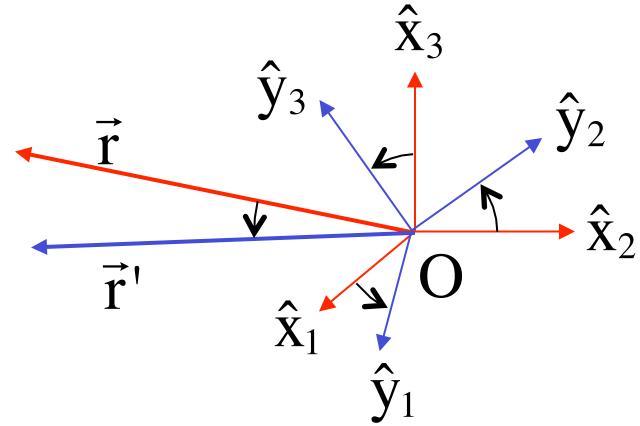
$$\begin{aligned} y_1 &= \vec{r} \cdot \hat{y}_1 \\ &= (x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3) \cdot \hat{y}_1 \\ &= (\hat{y}_1 \cdot \hat{x}_1)x_1 + (\hat{y}_1 \cdot \hat{x}_2)x_2 + (\hat{y}_1 \cdot \hat{x}_3)x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_1 & \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_2 & \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_3 \\ \hat{y}_2 \cdot \hat{x}_1 & \hat{y}_2 \cdot \hat{x}_2 & \hat{y}_2 \cdot \hat{x}_3 \\ \hat{y}_3 \cdot \hat{x}_1 & \hat{y}_3 \cdot \hat{x}_2 & \hat{y}_3 \cdot \hat{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (R_P)_{ij} = \hat{y}_i \cdot \hat{x}_j$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_1 & \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_2 & \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_3 \\ \hat{x}_2 \cdot \hat{y}_1 & \hat{x}_2 \cdot \hat{y}_2 & \hat{x}_2 \cdot \hat{y}_3 \\ \hat{x}_3 \cdot \hat{y}_1 & \hat{x}_3 \cdot \hat{y}_2 & \hat{x}_3 \cdot \hat{y}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \left(R_P^{-1}\right)_{ij} &= \hat{x}_i \cdot \hat{y}_j \\ &= (R_P)_{ji} = \left(R_P^T\right)_{ij} \end{aligned}$$

$\boxed{R^{-1} = R^T}$ Matrice orthogonale ($|R| = \pm 1$)

4.13 Rotation active



Rotation active des vecteurs:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 & \to & O\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3 \\ \vec{r} & \to & \vec{r}\,' \end{array} \right.$$

avant la rotation : $\vec{r} = x_1\ \hat{x}_1 + x_2\ \hat{x}_2 + x_3\ \hat{x}_3$

après la rotation : $\vec{r} = x_1'\ \hat{x}_1 + x_2'\ \hat{x}_2 + x_3'\ \hat{x}_3 = x_1\ \hat{y}_1 + x_2\ \hat{y}_2 + x_3\ \hat{y}_3$

$$\begin{aligned} x_1' &= \hat{x}_1 \cdot \vec{r}\,' \\ &= \hat{x}_1 \cdot (x_1\ \hat{y}_1 + x_2\ \hat{y}_2 + x_3\ \hat{y}_3) \\ &= (\hat{x}_1 \cdot \hat{y}_1)\, x_1\ + (\hat{x}_1 \cdot \hat{y}_2)\, x_2\ + (\hat{x}_1 \cdot \hat{y}_3)\, x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_1 & \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_2 & \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_3 \\ \hat{x}_2 \cdot \hat{y}_1 & \hat{x}_2 \cdot \hat{y}_2 & \hat{x}_2 \cdot \hat{y}_3 \\ \hat{x}_3 \cdot \hat{y}_1 & \hat{x}_3 \cdot \hat{y}_2 & \hat{x}_3 \cdot \hat{y}_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

matrice de rotation R_a amenant $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$ sur $O\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3$ (et $\vec{r}$ sur $\vec{r}\,'$)

$=$ inverse de la matrice R_p permettant de passer des coordonnées dans $O\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$ aux coordonnées dans $O\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3$

4.14 Propriétés des rotations

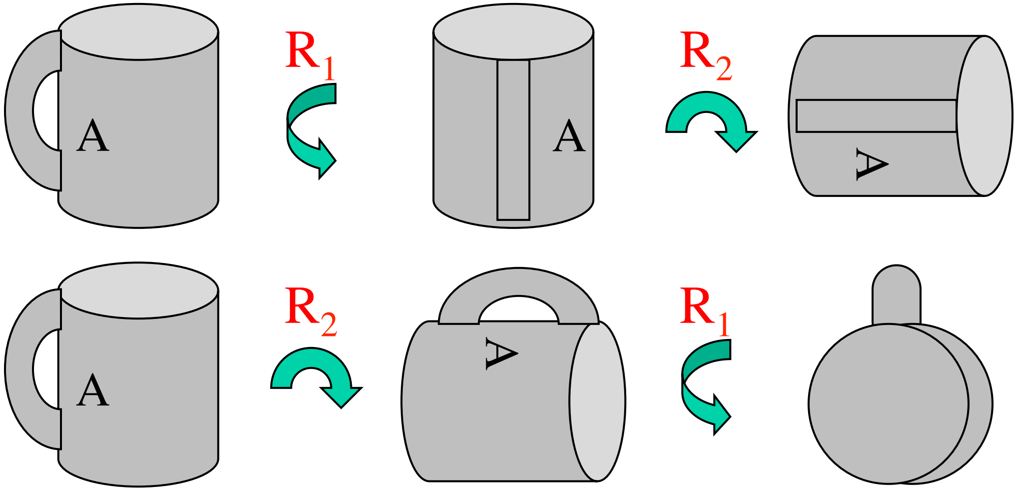
- Toute rotation conserve le produit scalaire (donc la norme):

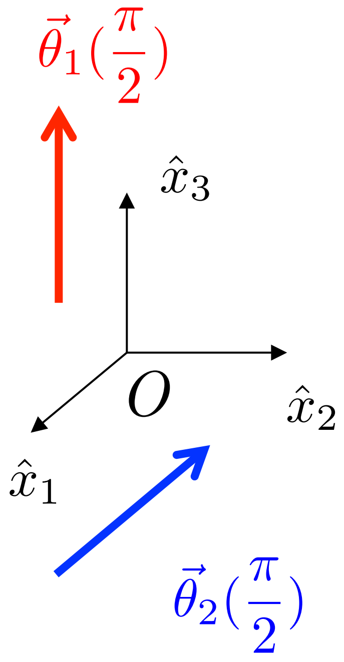
  $$(R\vec{a}) \cdot (R\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

- Composition de deux rotations -> produit des matrices de rotation
- Les rotations forment un groupe:
  - le composition de deux rotations est une rotation
  - l'identité est une rotation (d'angle 0 autour de n'importe quel axe):
  - chaque rotation R a un inverse R^{-1} tel que $R\ R^{-1} = R^{-1}\ R = I$

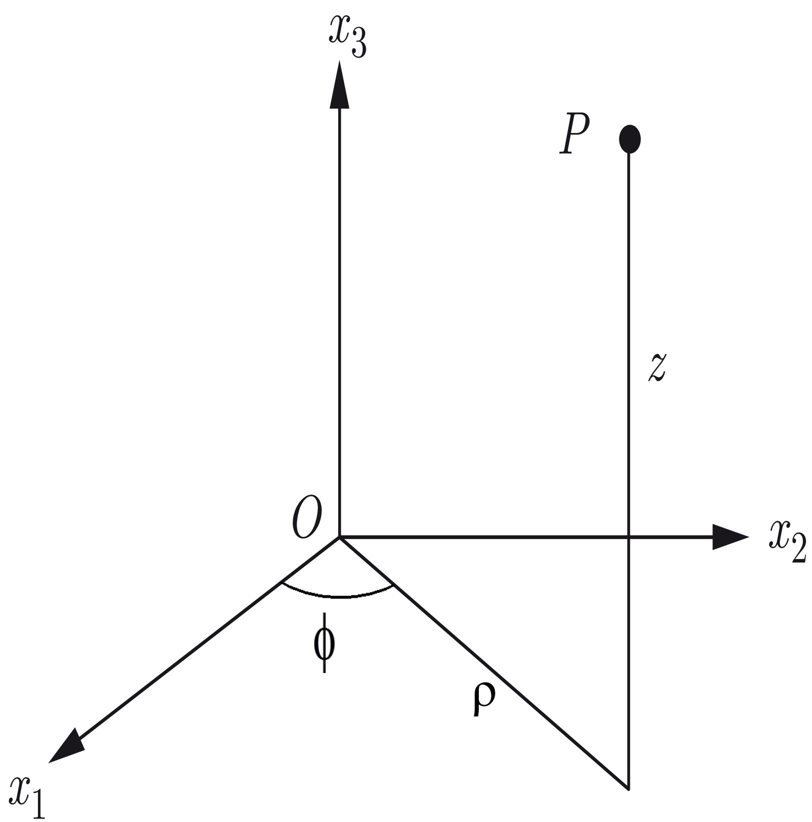
4.15 Propriétés des rotations

- Attention:
  - En général, la composition des rotations n'est pas commutative:
    $R_1\ R_2 \neq\ R_2\ R_1$
  - Exemple:





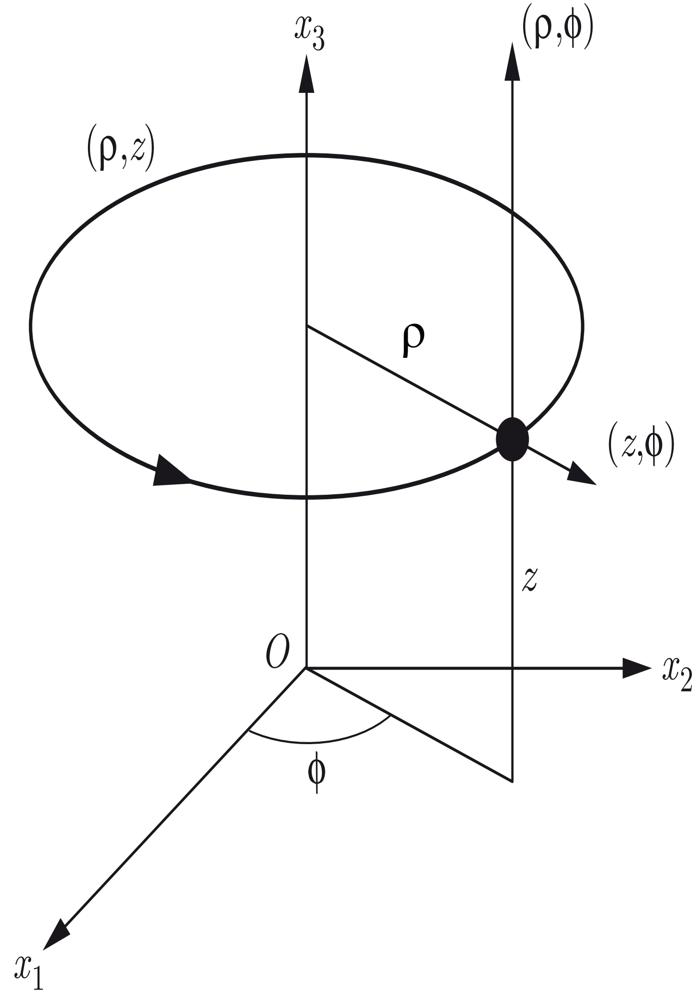
4.16 Coordonnées cylindriques



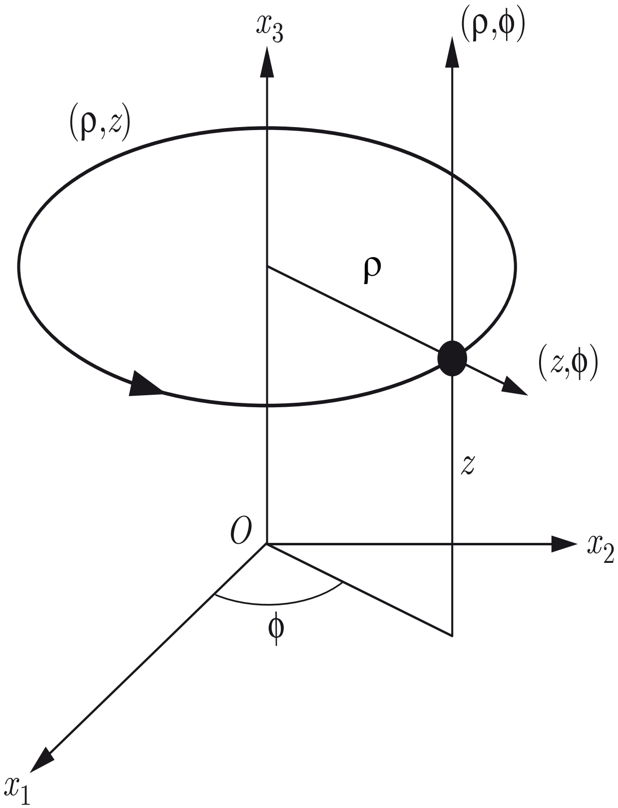
$$P\,(\rho, \phi, z)$$

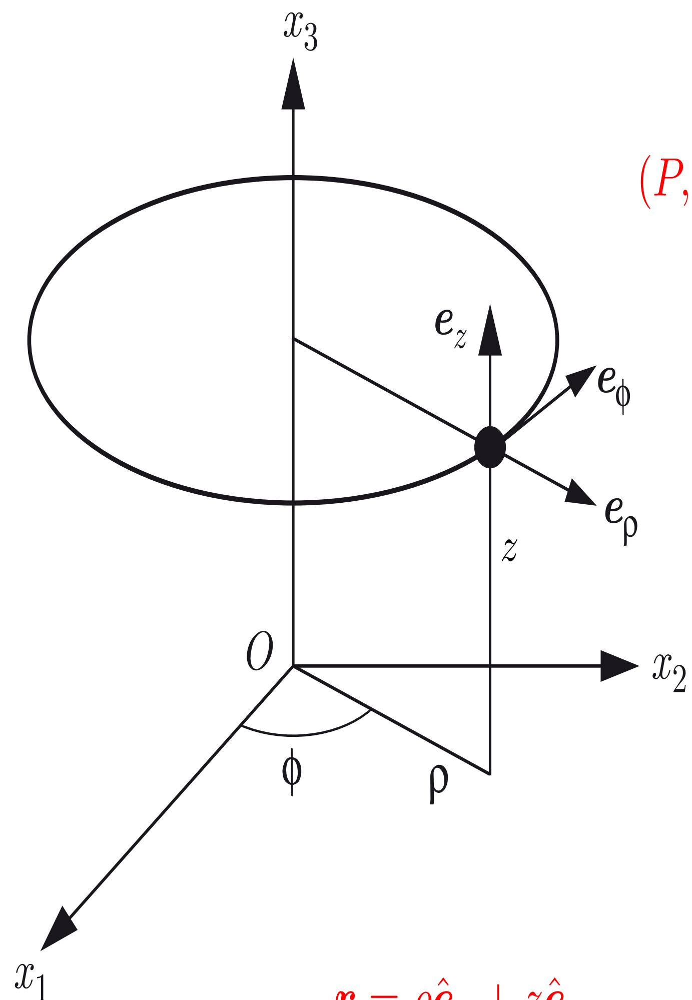
$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\phi \\ x_2 = \rho\sin\phi \\ x_3 = z \end{cases}$$

4.17 Lignes de coordonnées cylindriques



4.18 Repère associé aux coord. cylindriques

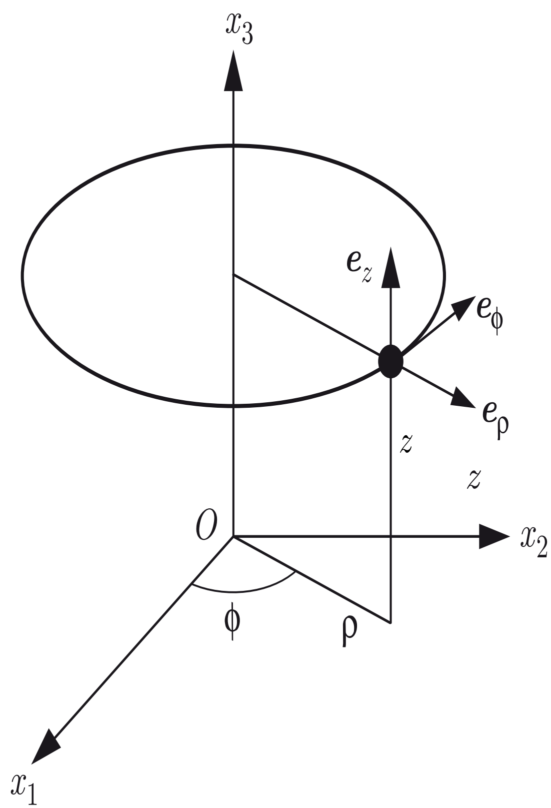




$(P, \boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z)$

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

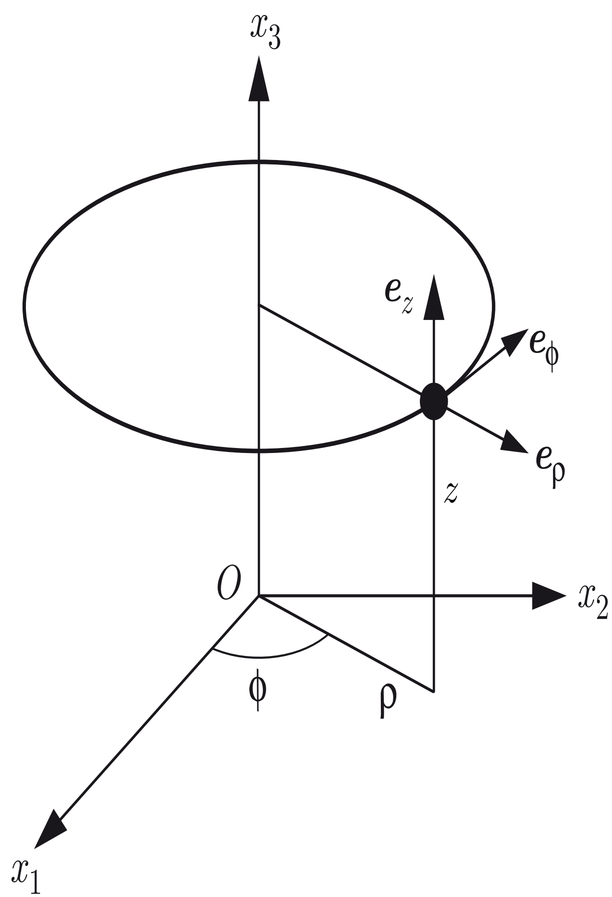
4.19 Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère cylindrique



$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{x}}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0 \end{cases}$$

4.20 Vitesse projetée sur le repère des coord. cylindriques



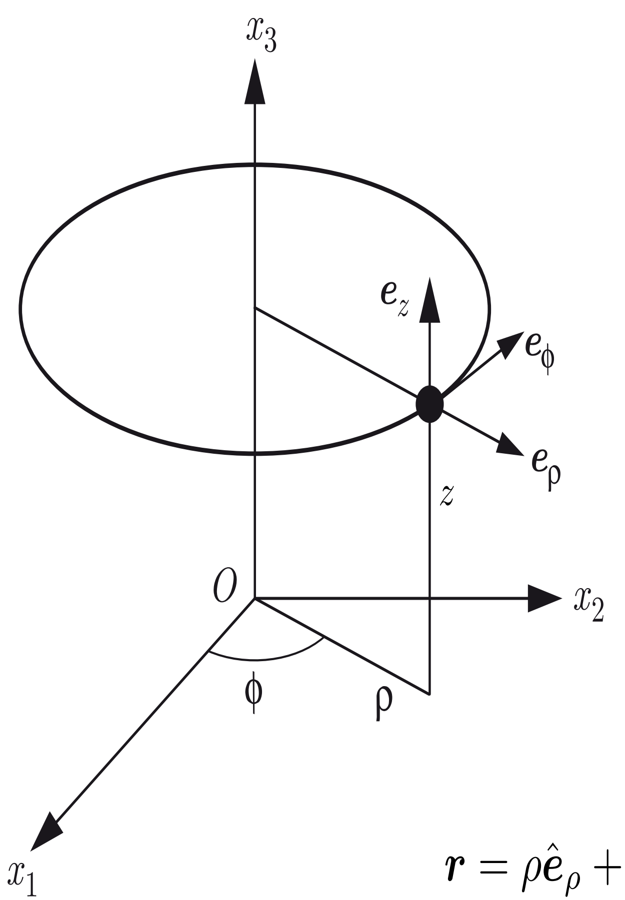
$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\phi \\ x_2 = \rho\sin\phi \\ x_3 = z \end{cases}$$

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Comment arrive-t-on à ce résultat?

4.21 Dérivée temporelle des vecteurs unité



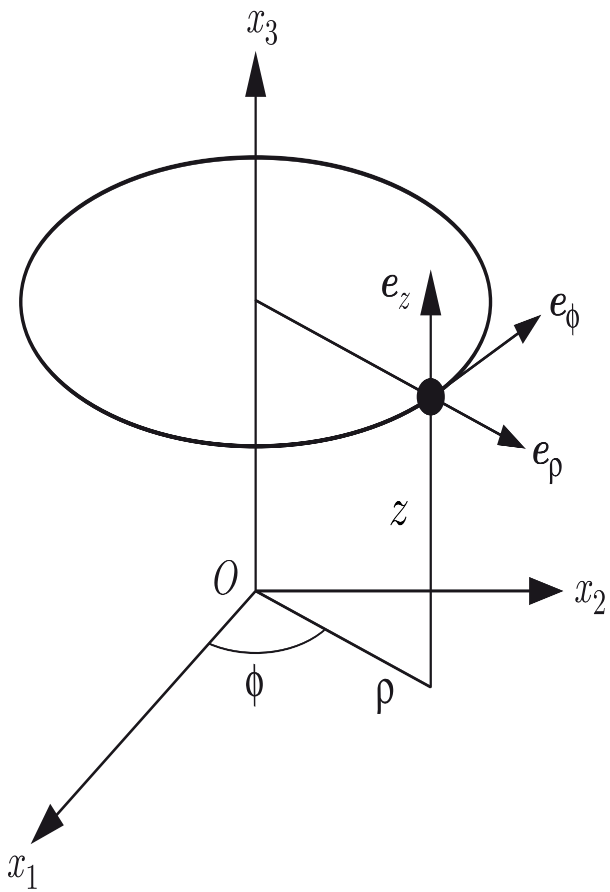
$$\left\{\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho &= \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_z &= \hat{\boldsymbol{x}}_3\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{dt} &= -\dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{dt} &= -\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho}$$

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \dot{z}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

4.22 Accélération projetée sur le repère



$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\rho$$

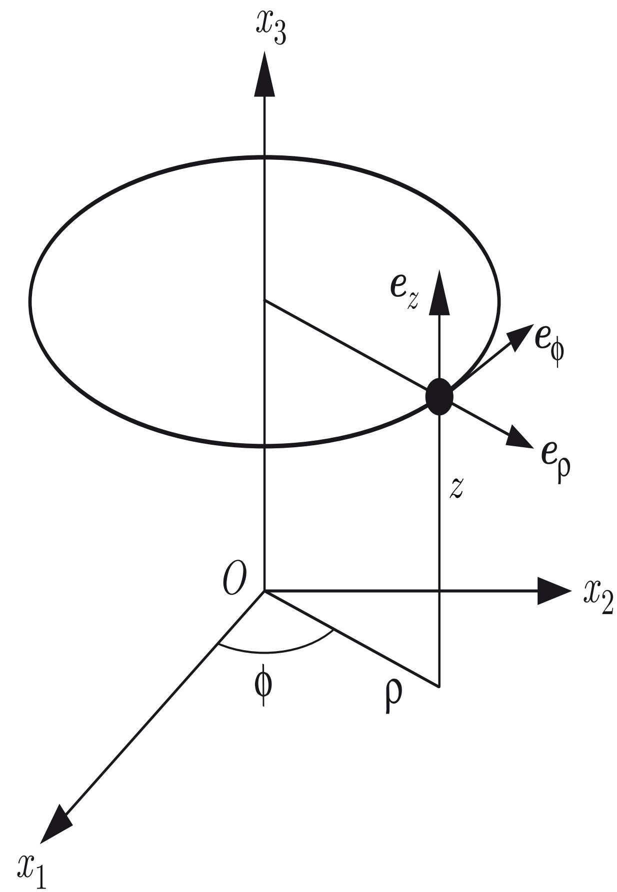
$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

$$+\dot{\rho}\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} + \rho\dot{\phi}\frac{d\boldsymbol{e}_\phi}{dt}$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

4.23 Que retenir des coordonnées cylindriques?

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\phi \\ x_2 = \rho\sin\phi \\ x_3 = z \end{cases}$$



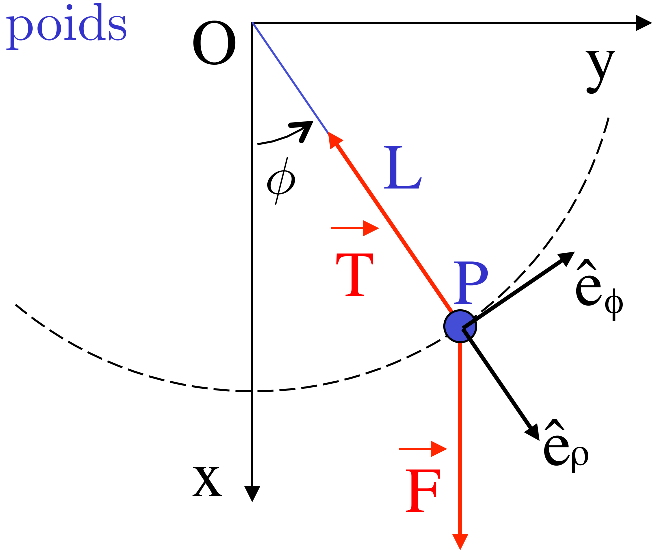
$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Pendule mathématique

- Point matériel P attaché à une tige rigide sans masse de longueur L, soumis à son poids F, et oscillant dans un plan vertical
- Repère fixe (lié au référentiel): $Oxyz$
- Repère en mouvement: $P\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$ (coordonnées cylindriques)
- Contraintes (ou liaisons):



$$\begin{cases} \rho = L = const \;\Rightarrow\; \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0 \\ z = \dot{z} = \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

- Accélération: $\vec{a} = -L\dot{\phi}^2\;\hat{e}_\rho + L\ddot{\phi}\;\hat{e}_\phi$
- 2ème loi de Newton: $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}$
- Projections sur les axes du repère: $\begin{cases} -mL\dot{\phi}^2 &= F\cos\phi - T \quad \text{sur } \hat{e}_\rho \\ mL\ddot{\phi} &= -F\sin\phi \quad \text{sur } \hat{e}_\phi \end{cases}$

équation différentielle à résoudre pour $\phi(t)$...
... puis on peut tirer $T(t)$

Pendule mathématique (suite)

- Galilée observe que la mouvement d'un pendule (en particulier la période d'oscillation) ne dépend pas de m: démo
  - pour que l'équation du mouvement soit indépendante de m, il faut que F = mg, où g est une constante !

$$\boxed{mL\ddot{\phi} \;=\; -\frac{F}{mL}\sin\phi = -\frac{g}{L}\sin\phi}$$

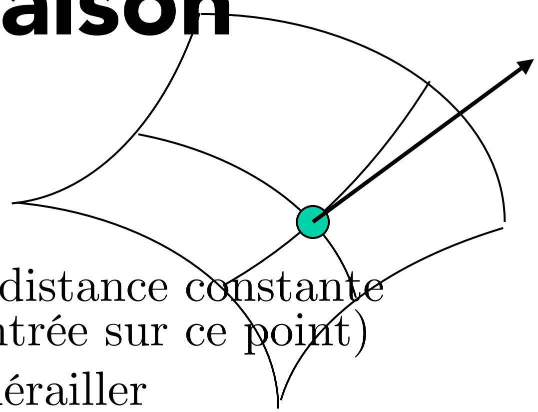
- Solution:
  - Mouvement périodique, mais pas de solution analytique simple (intégrale elliptique)
  - La période dépend de l'amplitude ! démo

- Approximation dans le cas de petites oscillations:

$$\sin\phi \cong \phi \quad \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} \cong \frac{g}{L}\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{oscillateur harmonique de pulsation}\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ et de période } T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

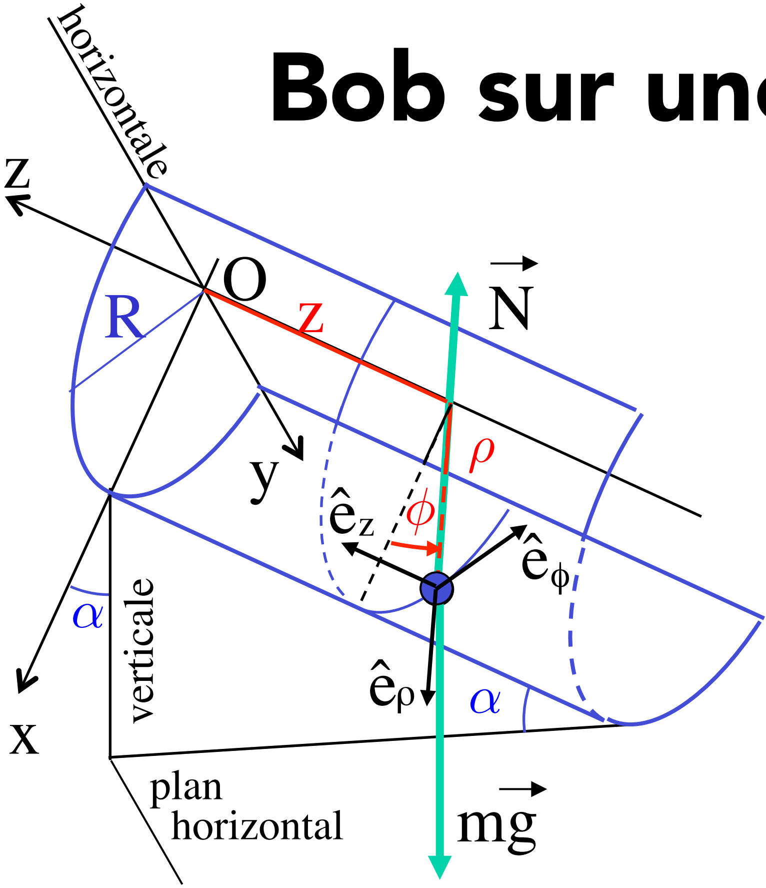
Contraintes et forces de liaison



- Point matériel astreint à se déplacer sur une courbe ou une surface lisse, fixe ou en mouvement.
  - Exemples:
    - Pendule mathématique, contraint à rester à une distance constante d'un point fixe (i.e. sur une surface sphérique centrée sur ce point)
    - Wagonnet d'un « grand huit », qui ne doit pas dérailler
    - Goutte d'eau coulant sur le pare-brise d'une voiture
    - Bille dans un anneau en rotation ☞ démo

- Force de liaison = force exercée sur le point matériel pour qu'il obéisse à la contrainte géométrique
  - toujours perpendiculaire à la courbe ou à la surface
  - jamais de composante tangente à la courbe ou la surface (c'est-à-dire dans une direction où le point matériel peut bouger)
  - la force de liaison devient nulle ⇔ la contrainte disparaît
    - Souvent on ne spécifie pas le mécanisme qui exerce la contrainte (tout ce passe comme si la surface ou la courbe exerçait la force de liaison)
    - Le force de liaison est a priori inconnue; elle fait partie du problème à résoudre
    - La surface ou la courbe peut exercer une force tangente, mais ce n'est pas une force de liaison (par exemple force de frottement)

Bob sur une piste cylindrique



Repère lié à la piste (référentiel): $Oxyz$

Coordonnées cylindriques: ρ, ϕ, z

Contrainte: le bob reste sur la piste

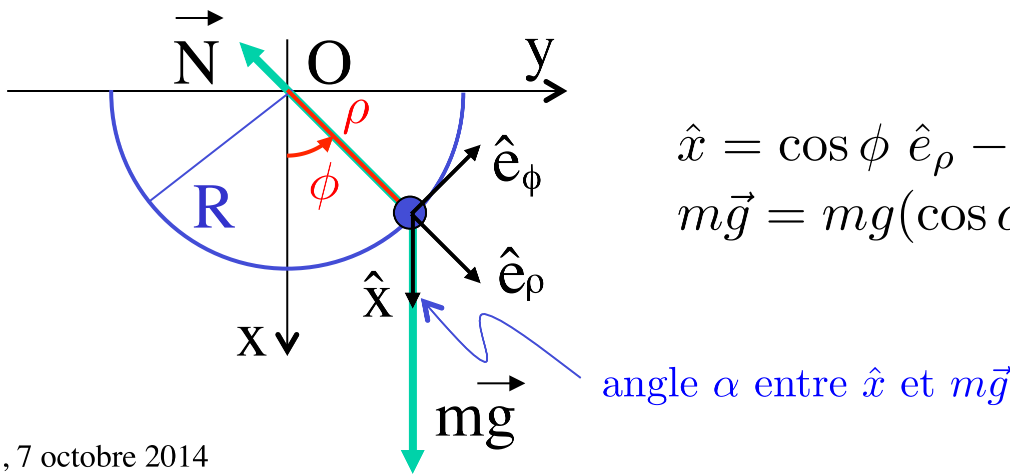
$$\rho = R, \ \dot{\rho} = 0, \ \ddot{\rho} = 0$$

Repère en mouvement avec le bob:

$$P\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$$

Forces:

$$\begin{cases} \text{poids: } m\vec{g} = mg(\cos\alpha\hat{x} - \sin\alpha\hat{z}) \\ \text{force de liaison: } \vec{N} = -N\hat{e}_\rho \end{cases}$$



$$\hat{x} = \cos\phi\ \hat{e}_\rho - \sin\phi\ \hat{e}_\phi$$

$$m\vec{g} = mg(\cos\alpha\cos\phi\ \hat{e}_\rho - \cos\alpha\sin\phi\ \hat{e}_\phi - \sin\alpha\ \hat{e}_z)$$

Bob sur une piste cylindrique (suite)

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

$$= -R\dot{\phi}^2\,\hat{e}_\rho + R\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{N} = -N\,\hat{e}_\rho$$

$$m\vec{g} = mg\,(\cos\alpha\,\cos\phi\,\hat{e}_\rho - \cos\alpha\,\sin\phi\,\hat{e}_\phi - \sin\alpha\,\hat{e}_z)$$

2ème loi de Newton : $\quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$

$$\begin{cases} \text{sur } \hat{e}_\rho: & -mR\dot{\phi}^2 = mg\cos\alpha\cos\phi - N \\ \text{sur } \hat{e}_\phi: & mR\ddot{\phi} = -mg\cos\alpha\sin\phi \\ \text{sur } \hat{e}_z: & m\ddot{z} = -mg\sin\alpha \end{cases}$$

$z(t)$: mouvement uniformément accéléré

pesanteur $= g\sin\alpha$

$\phi(t)$: mouvement d'un pendule mathématique

pesanteur $= g\cos\alpha$, longueur $= R$

$N(t)$: $3mg\cos\alpha\cos\phi(t) + A$

(A = constante d'intégration déterminée par les conditions initiales)