Ludovico Russo | Francesco Visconti

# APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA

## Indice

# Capitolo I
# Numeri complessi

**Definizione dei numeri complessi:** C=RxR={(a,b):$a, b \in R$}

In C definiamo :

1) (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d);
2) (a,b) (c,d)=(ac-bd,ad+bc);

**Proprietà:**

**Somma:**

1) **Commutativa :** (a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b);
2) **Associativa :** ((a,b)+(c,d))+(e,f)=(a,b)+((c,d)+(e,f));
3) **Elemento neutro o nullo :** (a,b)+(0,0)=(a,b);
4) **Opposto di un valore:** (a,b)+(-a,-b)=(0,0);

Con queste proprietà , (C,+) si dice "Gruppo abeliano" , ovvero che contiene le quattro proprietà riportate sopra (Commutativa , Associativa , Nullo , Opposto).

**Moltiplicazione:**

Anche (C-{(0,0)} , *) è un gruppo abeliano.

Come elemento neutro la moltiplicazione ha (1,0).

L' inverso è ($\frac{a}{a^2+b^2}$ ; $\frac{-b}{a^2+b^2}$)

**Proprietà:**

1) **Distributiva (relativa a somma e moltiplicazione) :** ((a,b)+(c,d))*(e,f)=(a,b)*(e,f)+(c,d)*(e,f);

Con queste proprietà , (C,+,* ) si dice "Campo dei numeri complessi".

In C non è possibile stabilire alcuna relazione d' ordine.

(a,b)=(a,0)+(0,b)=a*(1,0)+b*(0,1)

(0,1)*(0,1)=(-1,0)=-1 , (i=(0,1)) con i , (i=(0,1)) con $i^2$=-1

((a,b)=a+i*b) è la forma algebrica di un numero complesso .

Dato $z_1=a_1+ib_1$ e $z_2=a_2+ib_2$

$z_1*z_2=(a_1+ib_1)*(a_2+ib_2)=a_1*a_2 + ia_1b_2+ib_1a_2 - b_1 b_2=(a_1*a_2-b_1*b_2)+i(a_1*b_2+a_1*b_2)=( a_1*a_2-b_1*b_2 , a_1*b_2+a_1*b_2)$

Dato un numero complesso z=a+ib , a definita come la parte reale , mentre b è definita come la parte immaginaria.

Il numero complesso si indica con $\overline{Z}$=a-ib è il complesso coniugato di z=a+ib.

**Proprietà di $\overline{Z}$ :**

1) Sia z=a+ib appartante a C
   $z^*\overline{z}$ =(a+ib)*(a-ib)=$a^2+b^2$

2) Re(z)=$\frac{z+\overline{z}}{2}$   Im(z)=$\frac{z-\overline{z}}{2i}$

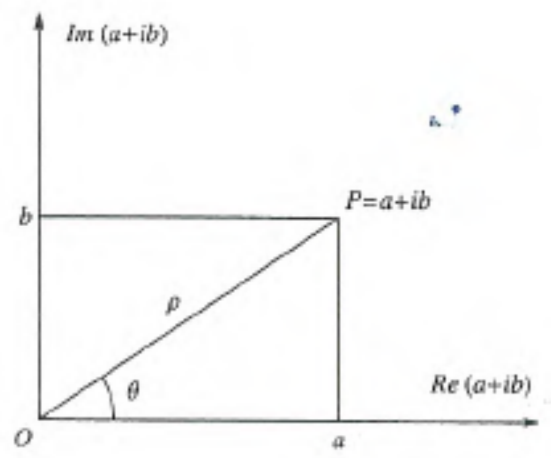
Definizione : |z| si chiama modulo di z il numero positivo (|z|=$\sqrt{z * \overline{z}}$) rappresentato dalla radice del prodotto tra un numero complesso è il suo coniugato.

## 1.2 Forma Trigonometrica

Sia z$\in C$ , di chiama forma trigonometrica di z la forma:

$$z=r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

dove $\vartheta$ è l' argomento di z ed r è il raggio , che altro non è che il modulo di z stesso.




$$a=r\cos(\vartheta);$$
$$b=r\sin(\vartheta);$$

Osservazione:

1)$cos(\vartheta) = \frac{Re(z)}{r}$

2)$sin(\vartheta) = \frac{Im(z)}{r}$

3)tg$(\vartheta) = \frac{sin(\vartheta)}{cos(\vartheta)} = \frac{Im(z)}{Re(z)} = \frac{b}{a}$

| a>0 | a<0 | a=0 | |
|---|---|---|---|
| $\vartheta = arctg(\frac{b}{a})$ | $\vartheta = arctg\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ | b>0 | b<0 |
| | | $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ | $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ |

## 1.3 Forma Esponenziale

$z_1=r_1*(\cos(\vartheta_1)+i\sin(\vartheta_1))=(r_1, \vartheta_1)$

$z_2=r_2*(\cos(\vartheta_2)+i\sin(\vartheta_2))=(r_2, \vartheta_2)$

$z_1*z_2=r_1*r_2(((\cos(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2))-(\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2))+i*(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2+\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2))=$
$=r_1*r_2*(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2))=[r_1*r_2, \vartheta_1+\vartheta_2]$

**Nel prodotto tra due punti è necessario solamente effettuare il prodotto tra i raggi e la somma tra gli argomenti.**

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1*e^{i\vartheta_1}}{r_2*e^{i\vartheta_2}} = \frac{r_1}{r_2} * \frac{e^{i\vartheta_1}}{e^{i\vartheta_2}} = [\frac{r_1}{r_2}, \vartheta_1-\vartheta_2]$

## 1.4 Formule di DeMoivre

**Diretta:Dato un numero complesso $[z=[r, \vartheta]]$, $z^k$ è il numero complesso avente per raggio $r^k$ e come argomento $k\vartheta$ $\forall k \in N$**

**Inversa: Dato un numero complesso $[z=[r, \vartheta]]$ si dice radice ennesima (con $n \geq 2$) di z un numero complesso $z_2$ che avrà come raggio ρ e come argomento Ψ tale che $z_2^n=z$.**

$$\rho=r^{\frac{1}{n}}$$

$$\Psi= \frac{\theta+2k\pi}{n} \text{ con } k=0,\dots,n-1$$

## Capitolo II
## Teoria degli insiemi
### 2.1 Definizione e notazione

- Sia X un insieme qualsiasi ,
  x$\epsilon X$ (x appartiene a X, ne è un elemento);
  x$\not\epsilon X$(x non si trova in X).
- Sia X un insieme , si dice che b è un sotto insieme di X(B⊂X) se tutti gli elementi di b si trovano in X;
- Siano a e b due sottoinsiemi dell' insieme ambiente X , se a⊂ $b$ e c'è un elemento di b che non appartiene ad a si parla di inclusione stretta indicata con A⊊B;
- Si dice che A è uguale a B se A⊂ B e B ⊂A
- Un insieme vuoto è un insieme avente una proprietà particolare : è sempre falso( ha una proprietà falsa per ogni elemento) si indica con ∅.

**Insieme delle parti :** Dato un insieme A , l' insieme di tutti i sotto insiemi di A viene detto insieme delle parti di A(denotato con P(A)).

### 2.2 Proprietà e implicazioni

Siano $P_1$ e $P_2$ due proprietà definite da un insieme ambiente sull' insieme X. Si dice che $P_1 \rightarrow P_2$ se un elemento verifica $P_1$ e quindi verifica $P_2$.

### 2.3 Operazioni con gli insiemi

Sia X un insieme ambiente e A,B⊂ $X$

- Si definisce come l' unione tra A∪B={x∈X: x∈A o x∈B};
- Si definisce come l' intersezione A∩B={x∈X: x∈A e x∈B};
- Due insiemi si dicono disgiunti se la loro intersezione è ∅ A∩B=∅;
- Dicesi complemento di A rispetto a B l' insieme B-A={ x∈X: x∈B e x∉A}

### 2.4 Leggi di Morgan

1) $(A\cup B)^C=\{x\in X: x\notin A\cup B\}=\{x\in X: x\notin A \text{ e } x\notin B\}=A^c\cap B^c$
2)$(A\cap B)^C=A^c\cup B^c$
3)Proprietà Commutativa: A∩B=B∩A , A∪B=B∪A;
4)Proprietà Associativa: (A∪B)∪C=A∪(B∪C) ,(A∩B)∩C=A∩(B∩C);
5)Proprietà distributiva:A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C),A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)

Notazione:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \dots \dots . \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \dots \dots . \cap A_n$$

Legge di de Morgan : $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^C$=$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^C$ e $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^C$=$\bigcup_{i=1}^{n} A_i{}^C$

## 2.5 Prodotto Cartesiano

Siano A e B due insiemi:

AxB={(a,b):a∈A e b∈B}

$A^2$=AxA={(a,b): a∈A e b∈A}

Proprietà:

Se un insieme A ha n elementi e B ha m elementi allora il loro prodotto cartesiano AxB avrà n x m elementi.

Notazione:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 * A_2 * A_3 * \dots \dots a_n$$

$=\{(x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n)\ x_i \in A_i\}$.

## 2.6 Estremi e massimi , minimi

Def: x=R , A⊂R

Si dice che A è limitato superiormente se :

$\exists M \in R : a \leq M \ , \ \forall\, a \in A$

Si dice che A è limitato inferiormente se :

$\exists m \in R : a \geq m \ , \ \forall\, a \in A$

si definisce:

M=maggiorante dell' insieme A

m=minorante dell' insieme A

Un insieme si definisce limitato se A è limitato superiormente e inferiormente.

$$\leftrightarrow \exists M \in X , \exists m \in X : m \leq x \leq M$$

Notazione:

m=insieme dei minoranti di A

M=insieme dei maggioranti di A.

Def

- supA limitato superiormente il più piccolo dei maggioranti
- inf A limitato inferiormente il più grande dei minoranti.

Oss: In generale supA o infA non sono elementi di A.

Def: Se supA ∈A , allora supA si chiama massimo di A e si indica con maxA=supA.

Se infA ∈A , allora infA si chiama minimo di A e si indica con minA=infA.

**Proprietà:**

Sia A limitato superiormente.

$$M=\sup A \leftrightarrow \begin{cases} M \geq X \quad , \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A: M < x_\varepsilon + \varepsilon \\ oppure\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A: M - \varepsilon < x_\varepsilon \end{cases}$$

Sia A limitato inferiormente

$$m=\inf A \leftrightarrow \begin{cases} m \leq X \quad , \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in A: m + \varepsilon > y_\varepsilon \\ \end{cases}$$

## 2.7 Principio di induzione

**Sia $P_n$ una proprietà definita per n≥ $n_0$. Se la proprietà $P_n$ vale per n allora vale per n+1 e per qualsiasi altra n**

**{se $P_{n0}$ vale e [$P_n \rightarrow P_{n+1}$]} allora $P_n$ è verificata $\forall n \geq n_0$**

**Dimostrazione:**

**Definiamo A={$n \geq n_0$: $P_n$è $falsa$ }**

**Si assume che A≠ ∅ ,A⊂N→A ammette un minimo $m_0$=minA→$P_{m0}$ è falsa → $P_{m0-1}$ è falsa →m0 non puo essere un minimo → m0-1∈A è assurdo.**

## Capitolo III
## Successioni Reali

**Preliminari:**

- $\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ **(Tutti i numeri reali inclusi** $-\infty, +\infty$**);**
- **Un intorno , sia $x_0$ appartenente a $\bar{R}$ con $x_0$ finito è l' intervallo aperto** $]x_0 - r; x_0 + r[$ **con qualsiasi costante "r" positiva;**
- **In questo caso prende il nome di intorno di $x_0$;**
- **Se $x_0$=$+\infty$ allora $]a; +\infty[$ con a>0 si chiama intorno di $+\infty$;**
- **Se $x_0$=-∞ allora $]-\infty, b[$ con b <0 si chiama intorno di -∞;**

**Notazioni:**

1. **$I_r(x_0)$=$]x_0 - r, x_0 + r[$ se $x_0 \in$R;**
2. **$I_a(+\infty)$=$]a, +\infty[$;**
3. **$I_b(-\infty)$=$]-\infty, b[$;**

**Definizione:Sia X⊂ $R$ , un punto $x_0 \in \bar{R}$ ,** $x_0$ è un punto di accumulazione se ad ogni intorno di $x_0$ , appartiene almeno un punto di X distinto da $x_0$.

I punti isolati non sono mai punti di accumulazione.

**Teorema:Sia $x_0 \in \bar{R}$ ,** $x_0$ è un punto di accumulazione per X $\Leftrightarrow \forall I_r(x_0)$ ,$I_r(x) \cap X$ è un insieme infinito.

**Osservazione:**

**1) Un insieme dotato di punti di accumulazione è un insieme infinito.**

**2)$+\infty$ è un punto di accumulazione per x ⇔ x non è limitato superiormente.**

**3)$-\infty$ è un punto di accumulazione per x ⇔ x non è limitato inferiormente.**

**Notazione:**

**DX={$x_0$∈** R $x_0$ è di accumulazione per x}

Viene detto derivato di X

DX è l' insieme dei punti di accumulazione.

**Def:** x⊂R si dice chiuso se

DX⊂X

**Def:Sia X⊂R , X si dice compatto se X è chiuso è limitato.**

**Oss:** X⊂R è compatto ⇔ $DX$⊂X e $\pm\infty$ non sono punti di accumulazione per x.
I punti di accumulazione sono i cosi detti punti di "frontiera" ovvero gli estremi dell' intervallo esclusi da esso.

## Successioni reali

**Def:** **Una successione è una funzione $f: N \rightarrow R$**

**f(n) viene denotato con $x_n$,$y_n$...**

**Una successione si dice crescente (risp . decrescente) se $x_{n+1} \geq x_n$ (risp $x_{n+1} \leq x_n$) si dice strettamente crescente o decrescente quando $x_{n+1} > x_n$ $x_{n+1} < x_n$.**

**Def:** **Una successione crescente o decrescente si dice monotona.**

- **$x_n$ si dice limitata superiormente(risp. inferiormente) se esiste una costante a∈R tale che $x_n \leq a$ (risp $a \leq x_n$) $\forall n$**
- **$x_n$ si dice limitata se (è limitata sia inferiormente che superiormente) $\exists a, b \in R$ tale che:**

$$a \leq x_n \leq b \; \forall n$$

**Sia ($x_n$) una successione limitata sup (risp. inf):**
**$\sup_n x_n$ (risp $\inf_n x_n$) è l' estremo sup (risp inf di ($x_n$))**
**$\sup_n (x_n) = x_{n0} = \max_n x_n$**
**$\inf_n (x_n) = x_p = \min_n x_n$**

**Proprietà:**

**1)Una successione crescente ammette sempre un minimo;**
**2) Una successione decrescente ammette sempre un massimo;**
**3)Una successione crescente può:**

**a)crescere fino all' infinito;**
**b) avere un limite.**

### 3.1 Limiti di successioni

**Def:**

**1)**$\lim_{n\rightarrow+\infty} x_n = l \,, l \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon \geq 0, \exists N_\varepsilon \in N: |x_n - l| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_\varepsilon$

**2)** $\lim_{n\rightarrow+\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \geq 0, \exists N_A \in N: x_n > a \qquad \forall n \geq N_A$

**3)** $\lim_{n\rightarrow+\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall B \geq 0, \exists N_b \in N: x_n < -b \qquad \forall n \geq N_b$

**Def: Una successione ($x_n$) si dice convergente (o regolare) se $\lim_{n\to+\infty} x_n = l \in R$.**

**Proprietà**

**1) Se si ha una successione crescente limitata superiormente il limite esiste . Una succ($x_n$)$\uparrow$ è limitata sup e regolare quando $\lim_{x\to+\infty} x_n = sup_n x_n$.**

**2)Una successione decrescente è limitata inferiormente è una successione regolare. $\lim_{x\to+\infty} x_n = inf_n x_n$.**

**Def: Sia ($x_n$)una successione di numeri reali e sia ($K_n$) una successione di numeri naturali strettamente crescente. Allora la successione ($X_{kn}$) viene detta successione estratta da $x_n$.**

**Proprietà**

**Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = l \in R$ , allora**

**$\lim_{n\to+\infty} xk_n = 0\ \forall (k_n)$ strettamente crescente .**

Capitolo IV

Insieme di definizioni

**Def:** Sia f:$D_f \rightarrow R$ si dice una funzione su f se f è una corrispondenza che ad ogni $x \in D_f$ associa uno ed un solo $y=f(x) \in R$.

- $D_f$ si chiama insieme di definizione della funzione.
- $D_f \subset R$

| Funzione | Tipo | Insieme di definizione |
|---|---|---|
| $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}...+a_1x+a_0$ | Polinomio | $D_f=R$ |
| $f(x)=\frac{P(x)}{Q(X)}$ | Fratta | $D_f=\{x \in R: Q(x) \neq 0\}$ |
| $f(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ | Irrazionale | $D_f=\begin{cases} x \geq 0 \; se \; n \text{ è } pari \\ R \quad se \; n \text{ è } dispari \end{cases}$ |
| $f(x)=\sin x$ | Seno | $D_f=R$ |
| $f(x)=\cos x$ | Coseno | $D_f=R$ |
| $f(x)=tgx$ | Tangente | $D_f=\{x \in R: x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\}$ |
| Sia $a>0$ $a\neq 0$ $f(x)=\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ | Logaritmica | $D_f=]0;+\infty[$ |
| $f(x)=e^x$ | Esponenziale | $D_f=R$ |

## 4.1 Funzioni composte

Sia f: $D_f \rightarrow R$

$f(D_f)$ l' insieme dell' immagine di $D_f$.

- f: $D_g \rightarrow R$ , $D_g \rightarrow D_f$

f o g: $D_g \rightarrow R$ , (f o g)(x)=f(g(x))

Capitolo V

Limiti di funzioni

**Sia f:$D_f$→R una funzione e $x_0$ un punto di accumulazione in $D_f$ e l∈R. Diremo che l è il limite di f(x) per x che tende a $x_0$ e si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.**

**Se** $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon: f(x) \in I_\varepsilon(l), \forall x \in D_f \cap I_\delta(x_0) - \{x_0\}$

**Notazione: Sia r>0**

$I_r(a) = ]a - r, a + r[ \ se\ a \in R$

$I_r(+\infty) = ]r, +\infty[$

$I_r(-\infty) = ]-\infty, -r[$

**Oss:** $l \in R \ , x_0 \in R$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta: |f(x) - l| < \varepsilon \ \forall x \in D_f \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ - \{x_0\}$

$I_\delta - \{x_0\} = ]x_0 - \delta, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + \delta[ = I_\delta(x_0)^- \cup I_\delta(x_0)^+$

## 5.1 Limite sinistro

**Def:**

**1) Limite sinistro in $x_0$**

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: f(x) \in I_\varepsilon(l), \forall x \in D_f \cap I_\delta(x_0)^-$$

## 5.2 Limite destro

**Def:**

**1) Limite destro in $x_0$**

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: f(x) \in I_\varepsilon(l), \forall x \in D_f \cap I_\delta(x_0)^+$$

## 5.3 Limiti notevoli

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

3) $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

5) $\lim_{x\to -\infty} x^n e^{ax} = 0 \ \ se\ a > 0$

6)$\lim_{x\to+\infty} x^{-n}e^{ax} = +\infty \quad se\ a > 0\ e\ n > 0$

Dimostrazione:$\lim_{x\to0}\frac{tg\,x}{x} = \lim_{x\to0}\left[\frac{sinx}{cosx}\right] * \frac{1}{x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{sin\,x}{x}\right) * cosx = 1$

Dimostrazione:$\lim_{x\to0}\frac{1-cos\,x}{x^2} =$

$\lim_{x\to0}\left[\frac{1-cosx}{x^2}\right] * \frac{1+cosx}{1+cosx} = \lim_{x\to0}\left(\frac{1-cos^2 x}{x^2 * (1+cosx)}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^2 * \frac{1}{1+cosx} = \frac{1}{2}$

Dimostrazione:$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

**1 Metodo**

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}*log(1+x)} = e$$

$$(applicando\ il\ limite\ notevole\ del\ logaritmo)$$

**2 Metodo**

**Ponendo t=$\frac{1}{x}$:**

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

## 5.4 Operazioni con i limiti

**Il limite della somma , differenza , prodotto , quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma / differenza / prodotto / quoziente dei limiti delle due funzioni (il quoziente è possibile solo se il denominatore è diverso da zero) a condizione di non avere una forma indeterminata:**

- $\pm\infty \mp \infty$
- $0 * \pm\infty$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\frac{0}{0}$

## Aritmetica dei transfiniti

- $\pm\infty + n = \pm\infty$
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $+\infty - \infty =? \, forma \ indeterminata$
- $\pm\infty \pm 0 = \pm\infty$
- $+\infty * (+\infty) = +\infty$
- $-\infty * (-\infty) = +\infty$
- $-\infty * (+\infty) = -\infty$
- $\infty * (n) = \infty$
- $\infty * (0) =? \, forma \ indeterminata$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{n}{\infty} = 0$
- $\frac{n}{0} = \infty$
- $\frac{\infty}{\infty} =? \, forma \ indeteminata$
- $\frac{0}{0} =? \, forma \ indeteminata$

## 5.5 Teorema dei due carabinieri

**Siano $f_1, f_2, f \ e \ f: D \to R \ sia$**

**$x_0$ un punto di accumulazione per D**

**Se $\exists I_r(x_0): f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \ \forall x \in D \cap I_r(x) - \{x_0\}$**

**Se $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = l \, , allora \ \lim_{x\to x_0} f(x) = l$**

**Dimostrazione**

**1)**$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists I_\delta(x_0): l - \varepsilon < f_1(x) < l + \varepsilon \ \ \forall x \in D \cap I_\delta(x_0) - \{x_0\}$

**2)** $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists I'_\delta(x_0): l - \varepsilon < f_2(x) < l + \varepsilon \ \ \forall x \in D \cap I'_\delta(x_0) - \{x_0\}$

**3)Si pone** $I = I_r(x_0) \cap I_\delta(x_0) \cap I'_\delta(x_0) \ I$ è $un \ intorno \ di \ x_0$

**Vogliamo maggiorare con $l + \varepsilon$ e volgiamo minorare con $l - \varepsilon$ questo è possibile solo se siamo nell' intersezione.**

$$l-\varepsilon < f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) < l+\varepsilon \ \ \forall x \in D \cap I_{x0} - \{x_0\}$$

$$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \ \ \forall x \in D \cap I_{x0} - \{x_0\}$$

**Questo dimostra che:**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

**Corollario(conseguenza del teorema): Siano f,g:D -> R due funzioni.**

$$\exists I_r(x_0): |f(x)| \le |g(x)| \quad e \ \forall x \in D \cap I_r(x_0) - \{x_0\}$$

$$\text{e } \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \ allora$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

**Dim:** $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow -g(x) \le f(x) \le g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

**Siano f,g:D→R : f(x)≥ $g(x), \forall x \in D$**

- **se** $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \ allora \ \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- **se** $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \ allora \ \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

## 5.6 Funzioni continue

**Def.** **Sia f:$D_f$→R una funzione qualsiasi e sia $x_0$ un punto che si trova nell' insieme di definizione $D_f$:si dice che f(x) è continua in $x_0$ se:**$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**Def** **Sia f:$D_f$→R una funzione qualsiasi e sia $x_0$ un punto che si trova nell' insieme di definizione $D_f$ :f si dice continua a destra (o a sinistra) se il limite destro (o sinistro) è uguale a f($x_0$).**

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \ \left( risp\ a\ sinistra \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0). \right).$$

**Proprietà:**

$$f \text{ è } continua\ in\ x_0 \Leftrightarrow f \text{ è } continua\ a\ destra\ e\ a\ sinistra\ di\ x_0$$

**1) siano f:x→y e g:y→R**

**Se f è continua in $x_0 \in X$ e g è continua in f($x_0$) , allora g o f è continua in $x_0$**

**2) f è continua in $x_0 \in D_f \Leftrightarrow$**

$$\forall (x_n) \subset D_f\ ,\ x_n \Rightarrow x_0\ , si\ ha$$

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

**N.B. Per vedere se una funzione trigonometrica è continua oppure no bisogna utilizzare il metodo del confronto.**

**3) Se $D_f \to R$ è continua in $x_0$ , allora la funzione in valore assoluto |f(x)| è continua in $x_0$**

**Dim:**

$$||a|-|b|| \leq |a-b|$$

## 5.7 Continuità uniforme

La continuità uniforme è un concetto globale è si parla di continuità in un insieme.

**Def:** Sia $f: D_f \to R$ si dice che f è uniformemente continua in x se:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall x, y \in X \; con \; |x - y| < \delta$$

La continuità uniforme è globale e questo significa che la continuità si ha nell' insieme x.

**Oss:** Continuità uniforme $\Rightarrow$ *continuità*

In generale l' altra implicazione non è mai verificata.

**Teorema di Cantor:**

Se x è compatto (chiuso e limitato) allora una funzione f continua in un compatto X è sempre uniformemente continua.

## 5.8 Punti di discontinuità

f si dice discontinua in $x_0$ se f non è continua in $x_0$

### A. Discontinuità eliminabile.

Se $x_0$ è un punto di discontinuità e se esiste il $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (con $l \neq f(x_0)$) , si dice che f presenta una discontinuità eliminabile in $x_0$.

La funzione $g(x)=\begin{cases} f(x) & se \; x \neq x_0 \\ l & se \; x = x_0 \end{cases}$ la funzione è continua in $x_0$

g si chiama prolungamento per continuità di f in $x_0$.

### B. Discontinuità di prima specie (con Salto)

Si dice che f ha in $x_0$ una discontinuità di prima specie se il limite destro e quello sinistro esistono e sono diversi tra loro se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

si definisce come salto:

$$s(x_0) = \left( \lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x) \right)$$

si chiama salto di discontinuità di f in $x_0$.

se risulta che: $f(x_0) = \frac{1}{2}\left( \lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x) \right)$

allora si dice che f presenta una discontinuità simmetriche .

## C. Discontinuità di seconda specie

$x_0$ è un punto di discontinuità di seconda specie

Se almeno uno dei due limiti sinistro o destro non esiste o è infinito.

## 5.9 Teoremi per funzioni continue

### 5.9.1 Teorema di Weistrass

Sia $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \rightarrow \boldsymbol{R}$ continua allora f è dotata di massimo e minimo

Dim:

1)Verificare che f è una funzione limitata ($\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{M} > 0: |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{M} \quad \forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$)

Dimostriamo la 1 con un ragionamento per assurdo.

Assumiamo che f non è limitata

$$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{M} > 0 \exists \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{M}} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]: |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{M}})| > M$$

$$\Rightarrow \forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}, \exists \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]: |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})| > n$$

Poichè $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,]$ è compatto , esiste ($x_{kn}$) tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{kn}} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$$

Possiamo porre:

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{kn}})| > \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{n}}$$

lo possiamo fare perché $k_n$ è un numero naturale , proseguendo otteniamo

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{kn}})| > \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{n}}$$

$$n \to +\infty \downarrow \quad n \to +\infty \downarrow$$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}})| > +\infty$$

Qualcosa maggiore dell' infinito è assurdo , per indicare ciò , utilizziamo il simbolo $\lightning$

Quindi f è limitata.

b) Poniamo L=sup f(x) x∈[a,b] e l=inf f(x) x∈[a,b].

$$\begin{cases} \boldsymbol{1})\ \boldsymbol{L} \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \forall\ \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \\ \boldsymbol{2})\ \forall \boldsymbol{\varepsilon} \geq \boldsymbol{0}\ \exists \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \boldsymbol{\varepsilon} > L \end{cases}$$

Ipotesi compattezza e continuità

L insieme più grande f($x_\varepsilon$)

lim $\boldsymbol{\varepsilon}$ ***che dipende da n***

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}, \exists \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}) + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} > L \geq f(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})$$

[a,b] è compatto$\Rightarrow \exists \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{kn}} \to \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{kn}}) \leq \boldsymbol{L} < f(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{kn}}) + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{kn}}$$

$$\downarrow n \to +\infty \qquad \downarrow n \to +\infty$$

$f(x_0) \leq L \leq f(x_0) + 0$

**Quando si passa al limite le diseguaglianze strette diventano larghe**

$$\Rightarrow L = f(x_0)$$

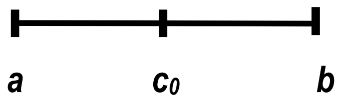
### 5.9.2 Teorema degli zeri

**Sia** $f: [a, b] \to R$ è $continua$

**Se** $f(a)f(b) < 0$ $allora$ $\exists c \in ]a, b[: f(c) = 0$

**Dim:** $f(a) > 0$ $f(b) < 0$

**Guardiamo il tutto graficamente:**




**Sia $c_0$ il punto medio di [a,b].**

**Se $f(c_0)=0$ , finito**

**Se $f(c_0)\neq 0$ , scegliamo $[a,c_0]$ e $[c_0,b]$**

**dove il prodotto $f(a)f(c_0)<0$ o $f(c_0)f(b)<0$ Denotiamo tale intervallo con $[a_1;b_1]$ con $f(a_1)f(b_1)<0$**

**$f(a_1)>0$ e $f(b_1)<0$**

$$b_1-a_1=\begin{cases} b - c_0 = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} \\ c_0 - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

**La distanza è sempre uguale a:** $\frac{b-a}{2}$

**Sia** $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ **, allora** $f(c_1) = 0$ $o$ $f(c_1) \neq 0$

**se** $f(c_1) \neq 0$ **allora scelgo $[a_2;b_2]$ con**

**$f(a_2)>0$ e $f(b_2)<0$**

$$b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$$

**così al passo (n+1)- ennessimo se** $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$

**verifica f(cn)=0 finito**

**se no abbiamo una successione di intervalli** $[a_n, b_n]$ **tale che:**

1) $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$
2) $f(a_n) > 0$ e $f(b_n) < 0$
3) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

$(a_n)$ è una successione crescente limitata $\Leftrightarrow$ convergente $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = x = c$

$(b_n)$ è una successione decrescente limitata $\Leftrightarrow$ convergente $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = y$

3) $\Rightarrow\; x = y$

2) (continuità) $\Rightarrow\; 0 < f(a_n) \to f(x) \geq 0$

$$f(b_n) \to f(y) = f(x) \leq 0$$

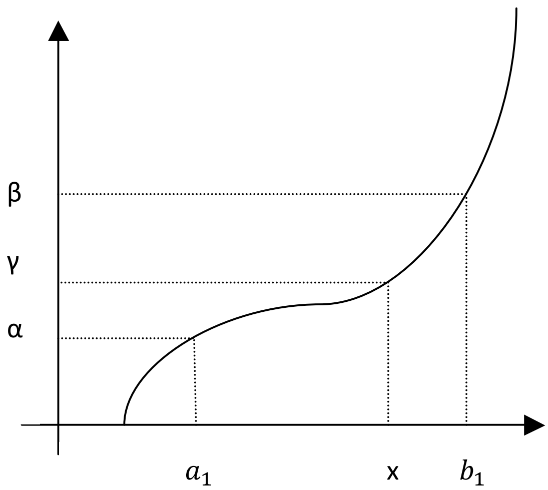
$$f(b_n) \to f(y) = f(c) \leq 0$$

$$\Rightarrow f(c) = 0$$

### 5.9.3 Teorema di Bolzano (o dei valori intermedi)

Sia $f$ una funzione continua definita in un intervallo $[a, b]$ compatto e siano α e β due numeri con β > α e $a_1, b_1 \in\, ]a, b[ / f(a_1) = \alpha$ e $f(b_1) = \beta$ . Allora:

$\forall \gamma \in\, ]\alpha, \beta[\,, \exists\, x \in\, ]a_1, b_1[\, / f(x) = \gamma$




**Dim.:** Si applica il teorema degli zeri alla funzione: $F(x) = f(x) - \gamma$

$F(a_1) = f(a_1) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$

$F(b_1) = f(b_1) - \gamma = \beta - \gamma > 0$

$\exists\, x \in\, ]a_1, b_1[\; / \; F(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \gamma$

# Capitolo VI
# Derivata di una funzione

## 1)Definizione:

**Si definisce rapporto incrementale in un punto $x_0 \in D_f$ di $f: D_f \longrightarrow R$;**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ , x \in D_f - \{x_0\}$$

**se il $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $esiste\ ed$ è $finito$**

**allora si dice che f è derivabile in $x_0$ e il valore del limite si chiama derivata di f in $x_0$ e si indica con f'($x_0$) o $\frac{df}{dx}(x_0)$.**

**Oss: h=x-$x_0$**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0), se\ esiste$$

**Esempio: 1)f(x)=c** $\quad \forall x \in R$

**Siano** $x_0 \in R$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

$$\Rightarrow f \text{ è } derivabile\ in\ x_0 e\ f'(x_0)=0$$

**2)f(x)=x** $\quad x \in R$

**Siano** $x_0 \in R$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1 \qquad\qquad \forall x \neq x_0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1=f'(x_0)$$

**3)f(x)=sinx** $\quad x \in R$

**Siano** $x_0 \in R$

**h=x-$x_0$**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h}=$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{sin(x_0)cos(h) + cos(x_0)sin(h) - sin(x_0)}{h} =$$

$$Metendo\ in\ evidenza\ sin(x_0)\ e\ cos(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \quad (sin(x_0)\left(\frac{cos(h) - 1}{h}\right) + cos(x_0)\frac{sinh}{h}) = cos(x_0) = f'(x_0)$$

**4)f(x)=x² $x \in R$**

**Siano $x_0 \in R$**

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)}$**=x+x₀** $\forall x \neq x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0 = f'(x_0)$$

**5)f(x)=|x| $x \in R$**

**Ricordando che la funzione valore assoluto è uguale a:**

$$|f(x)| = \left| \begin{matrix} x\ se & x \geq 0 \\ -x\ se & x < 0 \end{matrix} \right|$$

**f è derivabile in $x_0 \neq 0$**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

**Studiamo il limite destro e sinistro:**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\Rightarrow f\ non\ \text{è}\ derivabile\ in\ 0$$

**Def. 1.2)** Sia f:$D_f \to R$ e $x_0 \in D_f$

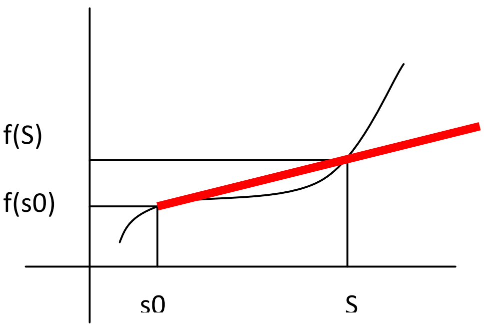
"f" si dice derivabile a destra (rispettivamente, a sinistra) in $x_0, se\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (rispettivamente $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) esiste ed è finito.

**Notazione** : $f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$

$$: f'_s(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

**OSS:** f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow$ $f$ è $derivabile$ a destra e a sinistra e $f'_d(x_0) = f'_s(x_0)$

## 6.1 Significato geometrico della derivata




**P($s_0$;f($s_0$))**

**Q(s;f(s))**

$$y(x) = \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}(x - s_0) + f(s_0)$$

$$\Big\downarrow \, s \to s_0$$

**$y_t$=f'($s_0$) (x-$s_0$)+f'($s_0$)**

**Si chiama retta tangente di f nel punto ($s_0$,f($s_0$))=P**

**Proprietà:**

**se f è derivabile in $x_0$ , allora f è continua in $x_0$**

**Dim:**

**f(x)-f($x_0$)=**$\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right](x - x_0)$

$$\Big\downarrow \, x \to x_0$$

**f($x_0$)=0**

**Derivabilità → Continuità**

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

## 6.2 Operazioni sulle derivate

**Siano f1 e f2 due funzioni derivabili in $x_0 \epsilon D_{f1} \cap D_{f2}$. Allora:**

**1)**$(c_1 * f_1 + c_2 * f_2) * (x_0) = c_1 * f_1' * (x_0) + c_2 * f_2' * (x_0)$

**2)**$(f_1 * f_2) * (x_0) = f_1' * (x_0) * f_2 * (x_0) + f_1 * (x_0) * f_2' * (x_0)$

**3)Se** $f_2(x) \neq 0$**, allora:**

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' * (x_0) = \frac{f_1'(x_0) * f_2(x_0) - f_1(x_0) * f_2'(x_0)}{(f_2(x_0))^2}$$

**Dimostrazione di 3) :**

$$(\frac{f_1}{f_2})' * (x_0) = \left(f_1 * \left(\frac{1}{f_2}\right)\right)' * (x_0) = f_1'(x_0) * \frac{1}{f_2(x_0)} + f_1(x_0) * \frac{1}{f_2'(x_0)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{f_2}\right)(x) - \left(\frac{1}{f_2}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{f_2(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f_2(x_0) - f_2(x)}{f_2(x) * f_2(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-(f_2(x) - f_2(x_0))}{x - x_0} * \frac{1}{f_2(x\ \ ) * f_2(x_0)} = \frac{-f_2'(x_0)}{f_2^2(x_0)}$$

**Sostituendo, si ottiene:**

$$\frac{f_1{}'(x_0) f_2(x_0) - f_1(x_0) f_2'(x_0)}{f_2^2(x_0)}$$

## 6.3 Derivata della funzione composta g o f

**Sia f derivabile in $x_0$ e g derivabile in $f(x_0)$ , allora g o f è derivabile in $x_0$ e (g o f)' ($x_0$)=g'(f($x_0$)) *f'($x_0$)**

## 6.4 Derivata della funzione inversa

**Sia** $f: X \to Y$ *una funzione invertibile*

$$f^{-1}: Y \to X \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \forall x \in X$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$$

**se f è derivabile in $x_0$ con $f'(x_0) \neq 0$ allora**

**$f^{-1}$ è derivabile in $y_0=f(x_0) \Leftrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$**

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Esempi**

**1)** $f(x) = e^x \, , f^{-1}(y) = log(y)$

$$(logy)' = \frac{1}{e^{logy}} = \frac{1}{y}$$

**2)** $f\colon \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \, , f(x) = sinx$

$$f \text{ è } invertibile\ e\ f^{-1}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(y) = arcsin(y)$$

$$1)\ (arcsin\, y)' = \frac{1}{cos(arcsin\, y)}$$

$$\begin{cases} arcsin(sinx) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ sin(arcsin\, y) = y \quad \forall y \in [-1,1] \end{cases}$$

$$cos^2(arcsin\, y) + sin^2(arcsin\, y) = 1$$

$$\Rightarrow cos^2(arcsin\, y) = 1 - sin^2(arcsin\, y)$$

$$\Rightarrow cos^2(arcsin\, y) = 1 - y^2$$

$$\Rightarrow |cos(arcsin\, y)| = \sqrt{1 - y^2}$$

**Il domino della funzione precedentemente definita sappiamo che è definita per valori**

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dove il valore del coseno è sicuramente positivo quindi possiamo eliminare o meglio non considerare il valore assoluto è quindi otteniamo:

$$\Rightarrow \cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$$

Sostituendo nella 1) ciò appena calcolato otteniamo la derivata della funzione inversa è quindi la 1) diventa :

$$1)\ (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in ]-1,1[$$

2)$f : [0,\pi] \to [-1;1]$ , $f(x) = \cos x$

$f^{-1}: [-1;1] \to [0,\pi]$ , $f^{-1}(y) = \arccos y$

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in ]-1,1[$$

3)$tan: \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[ \to R$

$arctan: R \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$$(arctg\ y)' = \frac{1}{1+y^2}, \forall y \in R$$

## 6.5 Teorema per le derivate

### 6.5.1 Teorema di Rolle:

$$Sia\ f: [a,b] \to R\ continua\ [a,b]\text{è}\ derivabile\ \ in\ ]a,b[.$$

$$Se\ f(a) = f(b), allora$$

$$\exists c \in ]a,b[: f'(c) = 0$$

Dim: 1 Caso. Se f è costante la derivata è 0

f è costante tutti i punti di $]a,b[$ annullano la derivata

$$\Rightarrow f'(c) = 0\ , \forall c \in ]a,b[$$

2 Caso. f non è costante

$$\xrightarrow{Weiestrass} \exists x_1, x_2 \in [a,b] \; tale\ che$$

$$f(x_1) = min\, f(x) \;\; x \in [a,b] \;\;\; e\ f(x_2) = max\, f(x) \;\;\; x \in [a,b]$$

$$Si\ assume\ per\ assurdo\ che\ f\ non\ sia\ continua$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 o\ x_2 \;\in\ ]a,b[ \quad \text{(f(a)=f(b))}$$

**Scegliamo** $x_1 \in\ ]a,b[$

$$\left.\begin{matrix} \left(0 \leq \lim\limits_{x \to x_1^+} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'_d(x_1)\right) \\ \left(0 \geq \lim\limits_{x \to x_1^-} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'_s(x_1)\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(x_1) = 0$$

### 6.5.2 Teorema di Lagrance (Teorema del valore medio)

$Sia\ f\colon [a,b] \to R\ continua\ in\ [a,b] e\ derivabile\ in\ ]a,b[.$

$Allora\ \exists c \in\ ]a,b[ \colon f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

**Dim: Definiamo una nuova funzione :**

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

$$\Rightarrow g\colon [a,b] \in R\ continua\ in\ [a,b] e\ derivabile\ \ in\ ]a,b[$$

$$g(a) = 0 \quad g(b) = 0$$

$$\xrightarrow{Rolle} \exists c \in\ ]a,b[ \colon g'(c) = 0$$

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 6.5.3 Teorema di Cauchy:

$Siano\ f, g\colon [a,b] \to R\ \ continue\ in\ [a,b] e\ derivabile\ in\ ]a,b[.$

$Se\ g(a) \neq g(b)\ e\ se\ f' e\ g' non\ sono\ entrambe\ nulle\ in\ uno\ stesso\ punto\ di\ ]a,b[$

$Allora\colon$

$$\exists c \in ]a,b[: g'(c) \neq 0 \; e \; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Dim** $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * (g(x) - g(a))$

$$\varphi(a) = 0 \quad \varphi(b) = 0$$

$$\overset{Rolle}{\Longrightarrow} \exists c \in ]a,b[: \varphi'(c) = 0$$

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * g'(c) = 0 \Rightarrow g'(c) \neq 0$$

## 6.5.4 Primo teorema di de L' Hopital

Siano f,g:[a,b]→ $R$ continue e derivabile in$]a,b[$.

Assumiamo che $\exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = g(x_0) = 0$ e esiste $I_\delta(x_0)$ $intorno\ di\ x_0\ tale\ che$

$$g'(x) \neq 0\,, \forall x \in I_\delta(x_0) - \{x_0\}$$

$$Se\ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l\ \ dove\ l \in R\ allora$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

**Dim:** $\frac{f}{g}$ ha senso nel intorno $I_\delta(x_0) - \{x_0\}$

Assumiamo per assurdo :

$$\exists x_1 \in I_\delta(x_0) - \{x_0\}: g(x_1) = 0$$

$$\overset{Rolle}{\Longrightarrow} \exists x_2\ tra\ x_0\ e\ x_1: g'(x_2) = 0$$

Questo è assurdo perché per ipotesi la funzione $g'(x) \neq 0$.

Ora bisogna dimostrare la tesi e cioè che il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ .

Per dimostrare ciò utilizziamo il teorema di Cauchy.

$$\overset{Cauchy}{\Longrightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ , c\ tra\ x\ e\ x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to 0} \frac{f'(c)}{g'(c)}\ \ Quando\ c \to x_0$$

## 6.5.5 Secondo teorema

## di de L'Hople

Se f,g continue in [a,b] e derivabile $]a,b[$ tranne in $x_0$ se $g'(x) \neq 0$ , $\forall x \in I_\delta(x_0) - \{x_0\}$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.Allora se

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, allora \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

**Proprietà:** $(+\infty)$

$$f, g\ [a, +\infty[ \rightarrow R\ continua\ e\ derivabile$$
$$e\ g'(x) \neq 0\ , \forall x \in [a, +\infty[$$
$$se \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$$
$$e\ se \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in R\ allara$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

La regola vale anche per $(-\infty)$

**Def:**Sia f:$]a,b[ \rightarrow R$ derivabile in $f' : ]a,b[ \rightarrow R\ la\ sua\ derivata.$

Sia $x_0 \in ]a,b[$ se f' è derivabile in $x_0$ allora si dice che f è due volte derivabile.

**Notazione:** f''($x_0$).

Dalla derivata '' in poi , la derivata si indica con

$$f^3, f^4, \dots, f^n$$

## 6.6 Formule di Taylor

Differenziale:

Sia $f: x \rightarrow R$ e $x_0 \in X : f'(x_0)\ esiste. La\ funzione\ df(x_0): R \rightarrow R$:

$$d\, f(x_0)(x) = f'(x)(x - x_0) * differenziale\ del\ primo\ ordine\ di\ f\ in\ x_0$$

**Notazione:**$df(x_0)(x) = (x - x_0) = d(x_0)\ (x)$

$$* \Leftrightarrow\ df(x_0) = f'(x_0)\, dx_0 \Leftrightarrow \frac{df(x_0)}{dx_0} = f'(x_0)$$

### 6.6.1 Formule di Taylor

### Teorema del differenziale

Se f è derivabile in $x_0$ la funzione (f(x)-f($x_0$)) df($x_0$) è un infinitesimo in $x_0$ di ordine superiore rispetto a (x-$x_0$).

Significa $\lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0) - df(x_0)}{x - x_0} = 0$

**Dim:** $\frac{f(x)-f(x_0)-dfx_0}{x-x_0} =$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-dfx_0}{x-x_0} = 0$$

**Posto** $R_1(x) = \frac{f(x)-f(x_0)-df(x_0)}{x-x_0}$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{Polinomio di primo grado}} + R_1(x-x_0)$$

**Notazione:** $R_1(x)(x-x_0) = o(x-x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 1$$

**Oss:** $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

**Def:**

$$d^n f(x_0) = f^n(x_0)(x-x_0)^n$$

$$se\ f^n(x)\ esiste$$

**differenziale n-esimo di f in $x_0$.**

## Formula di Taylor:

**Sia $f: X \to R$ n-volte derivabile in $x_0 \in X$. Si considera il polinomio di Taylor di grado n.**

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + f^n(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

**Allora f(x)-$P_n$(x) è un infinitesimo di $x_0$ di ordine superiore rispetto a (x-$x_n$)$^n$ significa che:**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

**Dim posto** $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=$$

$$=P^{n-1}(x)=f^{n+1}(x_0)+f^n(x_0)(x-x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{n-1}(x)-P_n^{n-1}(x)}{n!\,(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{n-1}(x)-f^{n-1}(x_0)-f^n(x_0)(x-x_0)}{n!\,(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{n-1}(x)-f^{n-1}(x_0)}{(x-x_0)}-f^n(x_0)=0$$

**Oss:** **Sia $f: x\to R$ n-volte derivabile in x.**

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)\ \text{ con }\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

**Notazione:** $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$

$x_0=0$

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)(x)^n}{n!}$$

**Corollario** $x_0=0$

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)(x)^n}{n!}+o(x^n)$$

$\Rightarrow$ ***Formula di Mac − Laurin"***

# Capitolo VII

## Studio di funzione

### 7.1 Gli asintoti

1) Asintoti Verticali $x = x_0$ quando:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

2) Asintoti Orizzontali $y = y_0$ quando:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \quad o \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

3)Asintoti obliquo y=ax+b

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

Si procede in egual modo quando $x \to -\infty$

### 7.2 Crescenza e Decrescenza

**Def:**Sia $f: x \to \mathbb{R}$ una funzione f di dice crescente (risp. decrescente) se $f(x) \leq f'(x)$ (risp. $f(x) > f'(x)\ \forall x, x' \in x\ con\ x \leq x'$

**Notazione:** $\uparrow$ *funzione crescente* $\downarrow$ *funzione decrescente*

**Proprietà:** Sia $f: x \to \mathbb{R}$ è derivabile :

$$f \text{ è } \uparrow \Leftrightarrow f(x) \geq 0\ \forall x \in X$$

$$f \text{ è } \downarrow \Leftrightarrow f(x) \leq 0\ \forall x \in X$$

### 7.3 Minimo e massimi

**Def:** Si dice che $x_0 \in X$ è un numero (risp massimo relativo di $f: x \to \mathbb{R}$ se

$$\exists I_\delta(x_0) \in X: \forall x \in I_\delta(x_0), f(x) \geq f(x_0)\ (risp. f(x) \leq f(x_0)$$

Assoluto è il massimo per tutti i punti

Relativo è il massimo locale.

**Prop:** Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.Se f ammette un massimo o un minimo relativo $x_0$ $]a,b[$ e f è derivabile in $x_0$ , allora f'($x_0$)=0. Questo è vero perché il rapporto incrementale è 0.

## 7.4 Punti di sella o flessi

Sia $f: x \to \mathbb{R}$ n volte derivabile e

Sia $x_0 \epsilon\ x\ se\ f'(x_0) = f''(x_0) \dots f^{n-1}(x_0) = 0\ \ e\ f^{n-1}(x_0) \neq 0$

Se n è dispari allora f non ha un estremo in $x_0$.

Se n è pari in questo caso abbiamo un massimo se la derivata in $x_0$ è negativa. $x_0$ è minimo relativo (risp. massimo relativo) se $f''(x_0) > 0\ (risp. f''(x_0) < 0)$

Questo lo possiamo dimostrare mediante la formula di Mac-Laurin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{n!} + o(x - x_0)^n$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

$$f(x) = f(x_0) + \left[\frac{f^n(x_0)}{n!} + \frac{o(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n}\right](x - x_0)^n$$

n è positivo se $\frac{f^n(x_0)}{n!}$ è positivo f(x)>f($x_0$)

n è negativo se $\frac{f^n(x_0)}{n!}$ è negativo f(x)<f($x_0$)

## 7.5 Concavità e Convessità

**Def:**Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile f è convessa in a,b se verifica

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x_0, x \in\ ]a,b[$$

Concava: se $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x_0, x \in\ ]a,b[$

**Prop:**Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile e due volte derivabile in $]a,b[$ allora f è convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0\ \ \forall x \in [a,b]$