Michela Eleuteri

DISPENSE DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

Numeri

Numeri naturali e principio di induzione, campi ordinati, numeri complessi

Indice

CAPITOLO 1

I numeri naturali e il principio di induzione

1.1. I numeri naturali e il principio di induzione

I numeri naturali sono costruiti a partire dall'elemento 0, da un insieme $\mathbb{N}$ e da un'operazione di "successivo" (indicata con s) verificanti i seguenti assiomi detti *assiomi di Peano*.

$$1) 0 \in \mathbb{N};$$

$$2) \forall\, n \in \mathbb{N}, s(n) \in \mathbb{N};$$

$$3) \forall\, n \in \mathbb{N}, s(n) \neq 0;$$

$$4) \forall\, m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \Rightarrow m = n;$$

$$5) \forall\, S \subseteq \mathbb{N},\ \{(0 \in S) \wedge (\forall\, n \in \mathbb{N},\, n \in S \Rightarrow s(n) \in S)\} \Rightarrow S = \mathbb{N}.$$

Il primo assioma afferma che $\mathbb{N}$ non è vuoto; il secondo assioma garantisce che per ogni numero ci sia un successivo, mentre il terzo ci dice che 0 non ha un precedente; il quarto assioma afferma invece che non è possibile tornare ad un numero già incontrato. Infine il quinto assioma può essere riscritto nel seguente modo:

Quinto assioma di Peano (PRINCIPIO DI INDUZIONE: PRIMA FORMA)
Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un insieme che verifica le seguenti proprietà:
1) $0 \in S$ (BASE DELL'INDUZIONE)
2) $\forall n,\ n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$ (PASSO INDUTTIVO)
Allora $S = \mathbb{N}$.

Si tratta di un principio largamente utilizzato per dimostrare proprietà che dipendono da nu-

meri naturali. È un assioma che non stupisce: se un insieme contiene 0 e vale il passo induttivo, allora contiene 1. Se contiene 1, allora dal passo induttivo contiene 2, e così via...Il principio di induzione permette proprio di formalizzare questo concetto del "e così via...", dimostrando la verità di infinite proposizioni in un colpo solo.
Il principio di induzione può anche essere espresso in maniera equivalente in questa seconda forma:

Principio di induzione (seconda forma)
Sia $\mathcal{P}(n)$ una proprietà vera per $n = 0$. Supponiamo che se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora è vera anche $\mathcal{P}(n+1)$. Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n.

Dimostriamo l'equivalenza tra il quinto assioma di Peano e la seconda forma del principio di induzione. Supponiamo vero il quinto assioma di Peano e consideriamo l'insieme $S = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n)\}$. Per ipotesi $0 \in S$ e inoltre se $n \in S$ allora anche $n + 1 = s(n) \in S$. Dunque, per il quinto assioma, $S = \mathbb{N}$ e quindi $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n.
Viceversa, supponiamo vero il principio di induzione. Sia S un insieme che contiene 0, e il successivo di ogni suo elemento. Consideriamo il predicato $\mathcal{P}(n)$ con $n \in S$. Allora, intanto $\mathcal{P}(0)$ è vera; inoltre se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera. Allora per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n e quindi $S = \mathbb{N}$.

Il principio di induzione può anche essere espresso in maniera equivalente in questa forma apparentemente più forte (in realtà è facile vedere che di nuovo sono equivalenti).

Principio di induzione (forma forte)
Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un insieme che verifica le seguenti proprietà:
1) $0 \in S$
2) $\forall n$ tale che tutti i numeri minori o uguali di n appartengono ad S, anche $n + 1 \in S$.
Allora $S = \mathbb{N}$.

Infine osserviamo che il principio di induzione è equivalente al seguente principio, detto principio del minimo intero: esso asserisce che i numeri naturali sono ben ordinati (per questo è anche detto principio del buon ordinamento). Questa proprietà non è verificata dai numeri reali (per esempio considerando l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$). Si rimanda per confronto al corrispondente risultato per sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ (ogni insieme di numeri reali $A \subseteq \mathbb{Z}$ non vuoto e limitato inferiormente ha minimo), la cui dimostrazione si basa sul concetto di estremo inferiore.

Principio del minimo intero (o principio del buon ordinamento)
Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha minimo.

Dimostriamo l'equivalenza tra il principio di induzione, nella forma forte, e il principio del minimo intero. Supponiamo vero il principio di induzione, forma forte e dimostriamo il principio del minimo intero. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che non ha minimo. Dimostriamo che è vuoto, facendo vedere che il complementare $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N}$.
Base dell'induzione: $\mathbb{N} \setminus A$ contiene lo 0. Se così non fosse, $0 \in A$ e allora avremmo che A ha elemento minimo, contro l'ipotesi.
Passo induttivo: se $\mathbb{N} \setminus A$ contiene tutti i numeri da 0 a n, allora deve contenere anche $n+1$. Se così non fosse, $n+1 \in A$ ma nessuno degli elementi minori di esso apparterrebbe ad A, quindi $n+1$ sarebbe l'elemento minimo di A contro l'ipotesi. Allora $\mathbb{N} \setminus A$ coincide con $\mathbb{N}$ e $A = \emptyset$.
Ora dimostriamo che dal principio del minimo intero si ottiene il principio di induzione (nella prima forma, che è a sua volta equivalente al principio di induzione in forma forte). Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ contenente 0 e tale che se contiene n allora contiene $n+1$. Consideriamo $\mathbb{N} \setminus A$ e mostriamo che è vuoto attraverso il principio del minimo intero. Se per assurdo $\mathbb{N} \setminus A$ non fosse vuoto, conterrebbe un minimo m che per ipotesi non può essere 0 (che sta in A). Allora di sicuro $m-1 \notin \mathbb{N} \setminus A$ perché m è minimo. Pertanto $m-1 \in A$. Ma dal passo induttivo sappiamo che se $n = m-1 \in A$ allora anche $n+1 = m \in A$, assurdo perché $m \in \mathbb{N} \setminus A$. Da cui la tesi.

☞ **Osservazione 1.1.1.** Se talvolta non si riesce a far partire l'induzione da $n = 0$, non tutto è perduto se l'insieme è induttivo da qualche elemento in poi. Si può allora usare il principio di induzione in questa forma:

Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:
1) $k \in S$
2) $\forall n \geq k$ se $n \in S$ allora $n+1 \in S$.
Allora $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$.

Questo non significa che l'insieme S contiene solo i numeri maggiori o uguali di k ma la verifica dei numeri precedenti va fatta "a mano", con metodi diversi dall'induzione.

✎ **Esempio 1.1.2.** *Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri naturali vale* $\frac{n(n+1)}{2}$*, in simboli*

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sia

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \right\}.$$

È facile vedere che $0 \in S$. *Infatti*

$$\sum_{i=0} i = \frac{0(1+0)}{2} = 0.$$

Supponiamo ora che $n \in S$. *Dimostriamo che* $n+1 \in S$. *Si ha*

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+(n+1)2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato la definizione di sommatoria e nella seconda uguaglianza l'ipotesi induttiva. Da qui si ha immediatamente la tesi.

✎ **Esempio 1.1.3.** *Dimostrare per induzione* [1] *che*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Il caso $q = 1$ *è facile, quindi ci concentriamo sul caso* $q \neq 1$. *Base dell'induzione: per* $n = 0$ *si ha* $1 = 1$ *(con la convenzione che in questo caso* $0^0 = 1$*). Passo induttivo: supponiamo la formula sia vera per* n *e mostriamo che vale per* $n+1$. *Si ha*

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q},$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato la definizione di sommatoria e nella seconda uguaglianza l'ipotesi induttiva. Da qui si ha immediatamente la tesi.

1.2. Principio di induzione: esercizi proposti

✍ **Esercizio 1.2.1.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$, *il numero* $\alpha(n) := n^3+5n$ *è divisibile per 6.*

➻ **R.**

[1]Per una dimostrazione alternativa che non faccia uso del principio di induzione, si rimanda alla sezione finale dei Complementi.

✍ **Esercizio 1.2.2.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$*, il numero* $\beta(n) := 10^n - 1$ *è divisibile per 9.*

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.3.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$ *si ha*

$$2^{n-1} \leq n!$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.4.** *Sia* $a \geq -1$*. Dimostrare per induzione la seguente disuguaglianza, detta* DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$(1+a)^n \geq 1 + na \qquad \forall n \geq 0.$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.5.** *Dimostrare per induzione che ogni intero* $n \geq 2$ *può essere scritto come prodotto di uno o più numeri primi (usare il principio di induzione in forma forte).*

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.6.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 2$

$$r_n := \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}_{n \text{ volte}} \notin \mathbb{Q}.$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.7.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geq 0.$$

(Usare il principio di induzione in forma forte).

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.8.** (NUMERI DI FIBONACCI) *Definiamo la seguente successione di numeri* $\{F_n\}_{n \geq 0}$*, definita in maniera ricorsiva*

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 2. \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 0$ *si ha* $F_n \geq \Phi^{n-2}$ *dove* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (SEZIONE AUREA).

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.9.** *Sia* $a \in \mathbb{R}$ *tale che* $0 < a < 1$*. Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.10.** *Si definisca* $w_0 = 2$, $w_1 = 3$ *e per ogni* $n \geq 2$ $w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$*. Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$w_0^2 + w_1^2 + \cdots + w_n^2 = w_n w_{n+1} - 2.$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.11.** *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(n) = n + F(n-1) & n \geq 1. \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che

$$F(n) = \frac{n^2 + n}{2}.$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.12.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$ *il numero* $\gamma(n) := n^3 + 3n^2 + 5n$ *è divisibile per 3.*

➾ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.13.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.14.** *Dimostrare per induzione che 21 divide* $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

➾ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.15.** *Siano $G_n \in \mathbb{Z}$ definiti ricorsivamente da*

$$\begin{cases} G_1 = G_2 = 1 \\ G_n = G_{n-1} + 3G_{n-2} \qquad n \geq 3. \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$G_{n+1}^2 - G_n\, G_{n+2} = (-3)^n.$$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.16.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{n}{2n+1}.$$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.17.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ il numero $\zeta(n) := n^3 + 2n$ è divisibile per 3.*

➼ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.18.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale l'uguaglianza*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.19.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 2$ vale l'uguaglianza*

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1+n}{2n}.$$

➺ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.20.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

➺ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.21.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale la formula*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

➺ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.22.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1).$$

Dedurre questa formula dalla (1.1.1) *(attenzione: qui la somma parte da 1!)*

➺ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.23.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

➺ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.24.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k!) = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots n(n!) = [(n+1)!] - 1.$$

➭ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.25.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

➭ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.26.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n > 2$ si ha*

$$n^2 > 2n + 1.$$

➭ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.27.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$*

$$9^{n+1} + 2^{6n+1}$$

è divisibile per 11.

➭ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.28.** *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2.$$

➭ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.29.** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 5$*

$$2^n > n^2.$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.30.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.31.** *Dimostrare per induzione che ogni insieme di* n *elementi ha* 2^n *sottoinsiemi (cardinalità dell'insieme delle parti).*

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.32.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *vale la formula*

$$3^n \geq \frac{n}{2} 2^n.$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.33.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *vale la formula*

$$3^n \geq n\, 2^n.$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.34.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 2$

$$2^n + 4^n \leq 5^n.$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 1.2.35.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 6$

$$n^n \geq 2^n \, n!$$

➻ **R.**

1.3. Fattoriale e coefficienti binomiali

❒ **Definizione 1.3.1.** Per induzione definiamo N FATTORIALE (che indicheremo col simbolo $n!$) come segue

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n! \, (n+1). \end{cases}$$

Il fattoriale di n rappresenta il prodotto dei primi n interi consecutivi. Quindi dalla definizione precedente si ricava che

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Il fattoriale cresce molto rapidamente; inoltre se $0 < k < n$ si ha

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1).$$

Il fattoriale di n ha numerose applicazioni nel calcolo combinatorio, per esempio per calcolare le permutazioni di n oggetti.

✎ **Esempio 1.3.2.** *Se dobbiamo calcolare le permutazioni di 3 oggetti a, b, c, si dimostra che essi possono essere ordinati in 3! = 6 modi diversi, ossia*

$$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$$

Proposizione 1.3.3. *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha la* FORMULA DI NEWTON

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \ldots (a+b)}_{n \text{ volte}} = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} a^k \, b^{n-k}, \tag{1.3.1}$$

dove $c_{n,k}$ sono i COEFFICIENTI BINOMIALI *(utilizzati nelle applicazioni soprattutto in Probabilità e Statistica) e sono definiti come segue:*

$$c_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Quindi
$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}{k!}$$
e la formula di Newton può essere riscritta come
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Se $n = 0$ banalmente (1.3.1) è verificata.
Supponiamo ora che (1.3.1) valga per n. Allora, moltiplicando per $(a+b)$ ambo i membri della (1.3.1), si ha
$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(a^{k+1}\, b^{n-k} + a^k\, b^{n+1-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k\, b^{n+1-k}\end{aligned}$$
Chiaramente si ha
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k+1}\, b^{n-k} = \sum_{h=1}^{n+1} \frac{n!}{(h-1)!(n+1-h)!} a^h\, b^{n+1-h}.$$
Essendo ora h variabile muta si ottiene che
$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^k\, b^{n+1-k} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \right).$$
D'altra parte si ha
$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$
da cui la tesi.

Due proprietà importanti dei coefficienti binomiali sono le seguenti
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
e
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$
Il calcolo dei coefficienti binomiali è utile per costruire il triangolo di tartaglia che dà i coefficienti della formula delle potenze di un binomio.

1.4. Complementi

1.4.1. Valore assoluto

❒ **Definizione 1.4.1.** Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora il VALORE ASSOLUTO di a si indica con $|a|$ ed è definito come segue:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

☞ **Osservazione 1.4.2.** Osserviamo che

$$\forall a \geq 0, \ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

Proposizione 1.4.3. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha*

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE} \tag{1.4.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'osservazione precedente si ha che

$$-|x| \leq x \leq |x| \qquad -|y| \leq x \leq |y|.$$

Sommando le due quantità membro a membro si ottiene

$$-|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

da cui la tesi. □

Proposizione 1.4.4. *Dalla* (1.4.1) *si deducono le seguenti disuguaglianze (anch'esse vanno sotto il nome di* DISUGUAGLIANZE TRIANGOLARI

$$\forall a, b, c \quad |a-b| \leq |a-c| + |b-c| \qquad ||a| - |b|| \leq |a-b|$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla (1.4.1) si ottiene la prima disuguaglianza ponendo $x = a-c$ e $y = b-c$. Per quanto riguarda invece la seconda disuguaglianza, prima si usa la (1.4.1) con la scelta $x = a-b$ e $y = b$ da cui

$$|a| \leq |a-b| + |b| \qquad \Rightarrow \qquad |a| - |b| \leq |a-b|;$$

analogamente scambiando i ruoli tra a e b si ottiene

$$|b| \leq |a-b| + |a| \qquad \Rightarrow \qquad |b| - |a| \leq |a-b|;$$

da cui la tesi. □

La quantità $|a-b|$ geometricamente rappresenta la distanza tra due punti a e b nel senso della geometria elementare. Abbiamo inoltre che

$$|ab| = |a|\,|b| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad |a| = |-a|.$$

1.4.2. Sommatorie

Per indicare in modo compatto una somma finita, si usa il simbolo di sommatoria.

❒ **Definizione 1.4.5.** La SOMMATORIA per i che va da 1 a n di a_i si indica con

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n;$$

i si chiama INDICE DELLA SOMMATORIA.

✎ **Esempio 1.4.6.**

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{5269}{3600}$$

È bene notare che l'indice è muto, cioè

$$\sum_{i=3}^{n} i^2 = \sum_{j=3}^{n} j^2$$

mentre vale

$$\sum_{i=3}^{n} i^2 \neq \sum_{i=3}^{m} i^2, \qquad n \neq m.$$

Le proprietà fondamentali della sommatoria sono:

1) PRODOTTO PER UNA COSTANTE (PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA)

$$\sum_{k=1}^{n} (c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

2) SOMMATORIA CON TERMINE COSTANTE

$$\sum_{k=1}^{n} c = c\, n$$

3) SOMMA DI SOMMATORIE

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

4) SCOMPOSIZIONE

$$\sum_{k=1}^{m+n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$$

5) TRASLAZIONE DI INDICI

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$$

6) RIFLESSIONE DI INDICI

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$$

Le proprietà della sommatoria possono essere usate per calcolare la SOMMA DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA.

❒ **Definizione 1.4.7.** Si dice che n termini sono in PROGRESSIONE GEOMETRICA se il rapporto tra ogni termine (a partire dal secondo) è costante. Tale costante si dice RAGIONE DELLA PROGRESSIONE

✎ **Esempio 1.4.8.** *La progressione geometrica di primo termine a e ragione q è data da*

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$$

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.4.9. *Per la somma dei primi termini della progressione geometrica vale la formula (vera per $a = 1$ e ragione $q \neq 1$)*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Se $q = 1$, la sommatoria vale semplicemente $n + 1$.

DIMOSTRAZIONE: dimostriamo la seguente formula equivalente alla tesi

$$(1 - q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &\overset{1)}{=} \sum_{k=0}^{n}(1-q)\,q^k = \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) \overset{3)}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \\ &\overset{4)}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \left(\sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}\right) = 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

Dal paragrafo precedente, possiamo dedurre, iterando n volte la disuguaglianza triangolare

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

CAPITOLO 2

Campi ordinati

In questo paragrafo andiamo a studiare la struttura degli esempi numerici introdotti prima, in particolare $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. L'idea è solo quella di puntualizzare delle proprietà, non di dare una costruzione rigorosa di questi campi, con lo scopo nel paragrafo successivo di mostrare la differenza fondamentale tra l'insieme dei razionali e l'insieme dei numeri reali.

2.1. L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$

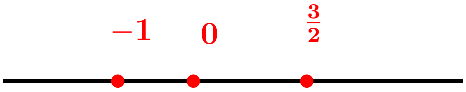
Su $\mathbb{Q}$ valgono le seguenti proprietà:
➜ **R1** È definita in $\mathbb{Q}$ un'operazione detta ADDIZIONE O SOMMA con le seguenti proprietà:
1) COMMUTATIVA $\forall\, a, b, \;\; a+b=b+a$;
2) ASSOCIATIVA $\forall\, a, b, c, \;\; (a+b)+c=a+(b+c)$;
3) esiste un elemento, detto ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA indicato con 0 tale che $\forall a, \;\; a+0=a$;
4) $\forall a$, esiste un elemento, l'inverso di a rispetto alla somma detto OPPOSTO di a indicato con $-a$ tale che $a+(-a)=0$.

➜ **R2** È definita in $\mathbb{Q}$ un'operazione detta MOLTIPLICAZIONE O PRODOTTO con le seguenti proprietà:
1) COMMUTATIVA $\forall\, a, b, \;\; a \cdot b=b \cdot a$;
2) ASSOCIATIVA $\forall\, a, b, c, \;\; (a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$;
3) esiste un elemento, detto ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO indicato con 1 UNITÀ tale che $\forall a, \;\; a \cdot 1=a$;
4) $\forall a \neq 0$, esiste un elemento, l'inverso di a rispetto al prodotto detto RECIPROCO di a indicato con $\frac{1}{a}$ o a^{-1} tale che $a \cdot a^{-1}=1$;

5) proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto:

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c, \ \ \forall a,b,c.$$

Dalle proprietà **R1** e **R2** si deducono le quattro operazioni fondamentali: infatti $a-b=a+(-b)$ e $a:b=a\cdot b^{-1}$, $b\neq 0$. È possibile dare un'interpretazione geometrica di $\mathbb{Q}$: infatti ad ogni numero razionale è possibile associare un punto della retta euclidea, come si vede in figura.



Inoltre $\mathbb{Q}$ è un insieme ordinato. Infatti su $\mathbb{Q}$ è definita una relazione $\leq$ detta relazione d'ordine con le seguenti proprietà:
1) riflessiva $\forall a$, $a\leq a$;
2) antisimmetrica $\forall a,b$, se $a\leq b$ e $b\leq a$ allora $a=b$;
3) transitiva $\forall a,b,c$, se $a\leq b$ e $b\leq c$ allora $a\leq c$.
Inoltre presi comunque $a,b\in\mathbb{Q}$, è sempre possibile confrontarli, cioè stabilire se $a\leq b$ oppure $b\leq a$. Quindi si dice che $\mathbb{Q}$ è un insieme totalmente ordinato.

✎ **Esempio 2.1.1.** *Sia dato l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X, dotato della relazione di inclusione $\subseteq$. Si verifica facilmente che l'inclusione definisce su $\mathcal{P}(X)$ una relazione d'ordine ma non totale (presi due insiemi, non è sempre possibile includere l'uno nell'altro); quindi $\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ non è un insieme totalmente ordinato.*

Quindi riassumendo:
➜ **R3** su $\mathbb{Q}$ è definita una relazione d'ordine totale compatibile con la struttura algebrica tale che cioè:
1) $\forall\, a,b,c$, se $a\leq b$ allora $a+c\leq b+c$;
2) $\forall\, a,b,c$, con $c>0$, se $a\leq b$ allora $ac\leq bc$;
(sono queste le usuali regole che si usano per risolvere le disequazioni). Si ha pertanto la seguente definizione:

❐ **Definizione 2.1.2.** Un insieme su cui sono definite due operazioni che soddisfano le proprietà **R1** e **R2** si dice campo
Un insieme su cui sono definite due operazioni e una relazione d'ordine che soddisfano le proprietà **R1**, **R2** e **R3** si dice campo ordinato

Quindi si verifica facilmente $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sono entrambi campi ordinati. Allora cosa li differenzia? Cercheremo di rispondere a questa domanda nel prossimo paragrafo.

2.2. Numeri reali: estremo superiore e assioma di continuità

Premettiamo il seguente fatto elementare che ci servirà nella dimostrazione della proposizione successiva.

Lemma 2.2.1. *n dispari $\Rightarrow n^2$ dispari.*

DIMOSTRAZIONE. Sia n dispari. Allora si scrive come $n = 2k + 1$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$. Allora

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{h} + 1 =: 2h + 1$$

da cui la tesi.

A questo punto andiamo a dimostrare il seguente fatto.

Proposizione 2.2.2. *Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato è uguale a 2.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che $\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$. Per definizione, $r = \frac{n}{m}$, con $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Supponiamo che tale frazione sia ridotta ai minimi termini (in particolare sicuramente n e m non saranno entrambi pari). Allora si ha

$$\frac{n^2}{m^2} = r^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 2\,m^2.$$

A questo punto, dalla precedente uguaglianza si legge che per forza n^2 è pari, quindi anche n stesso è pari, perché se fosse stato dispari, il quadrato di un numero dispari sarebbe stato ancora dispari per il lemma precedente. Allora $n = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, quindi sostituendo nella relazione precedente si ha

$$4k^2 = 2m^2 \qquad \Rightarrow \qquad m^2 = 2k^2$$

quindi m è pari, contro l'ipotesi che m e n siano primi tra loro. Questo è assurdo e quindi la tesi è dimostrata.

Il significato della proposizione precedente è il seguente: esistono numeri reali che non hanno controparte razionale. Quindi in qualche modo $\mathbb{R}$ "tappa i buchi di $\mathbb{Q}$". In questo paragrafo andremo a formalizzare questo importantissimo concetto, andando a introdurre l'ASSIOMA DELLA CONTINUITÀ. Sarà dunque questo a differenziare i due campi ordinati $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$.

❒ **Definizione 2.2.3.** Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato e sia B un suo sottoinsieme. Si dice che un elemento $a \in A$ è un MAGGIORANTE di B se

$$\forall x \in B,\ x \leq a. \tag{2.2.1}$$

L'insieme dei maggiornati di B si indica con $\mathcal{M}_B$.

✎ **Esempio 2.2.4.** *Sia* $A = \mathbb{R}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$*. Allora*

$$\mathcal{M}_B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Si vede invece che ad esempio $a = -\frac{1}{2}$ *non è un maggiorante. Infatti (negazione di (2.2.1))*

$$\exists x \in B : x > a.$$

Per esempio basta prendere $x = -\frac{1}{4}$*.*

✎ **Esempio 2.2.5.** *Sia* $A = \mathbb{R}$ *e* $B = \{-\pi, 0\}$*. Allora*

$$\mathcal{M}_B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

✎ **Esempio 2.2.6.** *Sia* $A = \mathbb{R}$ *e* $B = \mathbb{Z}$*. Allora non esistono maggioranti di* B *quindi* $\mathcal{M}_\mathbb{Z} = \emptyset$*.*

☞ **Osservazione 2.2.7.** Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato e sia B un suo sottoinsieme. Se $a \in \mathcal{M}_B$ e $x \geq a$ con $x \in A$ allora $x \in \mathcal{M}_B$. Quindi se un insieme ha dei maggioranti, potrebbe averne più di uno. Questo non accade sempre perché dipende dall'insieme "di partenza" A, come mostra il seguente esempio.

✎ **Esempio 2.2.8.** *Sia* $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ *e sia* $B = A$*. Allora* $\mathcal{M}_B = \{0\}$*.*

❒ **Definizione 2.2.9.** Si dice che un sottoinsieme B di un insieme ordinato è LIMITATO SUPERIORMENTE se ha dei maggioranti, cioè se $\mathcal{M}_B \neq \emptyset$.

✎ **Esempio 2.2.10.** *Gli insiemi* B *degli esempi 2.2.4 e 2.2.5 sono limitati superiormente; l'insieme* B *dell'esempio 2.2.6 non è limitato superiormente.*

❒ **Definizione 2.2.11.** Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato e sia B un suo sottoinsieme. Si dice che un elemento $a \in A$ è il MASSIMO di B se

$$\begin{cases} a \in B \\ \forall x \in B,\ x \leq a. \end{cases}$$

In tal caso si scrive $a = \max B$.

☞ **Osservazione 2.2.12.** Il massimo di un insieme è un maggiorante che appartiene all'insieme stesso.

Proposizione 2.2.13. *Il massimo di un insieme se esiste è unico.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che $a = \max B$ e $a' = \max B$, dunque $a' \leq a$ perché a è maggiorante di B e $a \leq a'$ perché anche a' è maggiorante di B. Quindi $a \leq a'$ e $a' \leq a$. Per la proprietà antisimmetrica $a = a'$ quindi il massimo è unico.

❒ **Definizione 2.2.14.** Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato e sia B un suo sottoinsieme. Si dice che un elemento $a \in A$ è un MINORANTE di B se

$$\forall x \in B,\ a \leq x.$$

Diciamo che B è LIMITATO INFERIORMENTE se ha dei minoranti. Diciamo che un elemento $a \in A$ è il minimo di B se

$$\begin{cases} a \in B \\ \forall x \in B,\ a \leq x. \end{cases}$$

In tal caso si scrive $a = \min B$. Anche in questo caso si dimostra che se il minimo esiste allora è unico.

☞ **Osservazione 2.2.15.** Se B ha massimo e minimo, allora è facile vedere che

$$\min B \leq \max B$$

e si ha

$$\min B = \max B \Leftrightarrow B \text{ è costituito da un solo punto.}$$

❒ **Definizione 2.2.16.** Diciamo che un insieme è LIMITATO se è limitato superiormente e inferiormente.

✎ **Esempio 2.2.17.** *Sia $A = \mathbb{N}$. Allora A è limitato inferiormente, per esempio da 0 oppure anche da $-\pi$ ecc... perché $-\pi \leq 0 \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Più in generale ogni numero reale negativo o nullo è un minorante per $\mathbb{N}$. Inoltre $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente; infatti comunque scelto $M > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq M$; basta prendere $n = [M] + 1$, dove $[x]$ denota la* PARTE INTERA DI *x, cioè il più piccolo intero più piccolo di x. Inoltre $\min \mathbb{N} = 0$ mentre il massimo non esiste.*

✎ **Esempio 2.2.18.** *Sia A l'insieme degli interi pari relativi. Allora A non è limitato né superiormente né inferiormente, e non esistono né massimo né minimo.*

✎ **Esempio 2.2.19.** *Sia*

$$A := \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n^2} : n > 0\right\}.$$

Allora A è limitato inferiormente, per esempio da 0 ma anche da ogni numero reale negativo; il minimo però non esiste perché il più grande minorante sarebbe 0 che non appartiene ad A.

Il massimo invece esiste ed è 1, perché A è fatto da una successione di numeri decrescenti; A è dunque limitato superiormente da 1 ma anche ogni numero reale maggiore o uguale a 1 è un maggiorante per A.

✎ **Esempio 2.2.20.** *Sia*

$$A := \left\{ \frac{n+2}{n-2} : n \in \mathbb{N},\ n > 2 \right\}.$$

Allora possiamo riscrivere A come

$$A := \left\{ \frac{n-2+4}{n-2} = 1 + \frac{4}{n-2},\ n > 2 \right\}.$$

Quindi è facile verificare che A è limitato superiormente, da 5 e da ogni altro numero reale maggiore o uguale a 5; quindi $\mathcal{M}_A = \{x : x \geq 5\}$. A è limitato inferiormente da 1 e ogni altro numero minore o uguale a 1 è un maggiorante per A. Il massimo esiste e vale 5, mentre il minimo non esiste (in particolare 1 non appartiene ad A).

Quindi gli esempi precedenti mostrano che talvolta, pur essendo l'insieme limitato (inferiormente e/o superiormente), il massimo o il minimo possono non esistere; inoltre il motivo per cui essi non esistono può dipendere fortemente dall'insieme "universo" in cui si sta lavorando, come mostrano i seguenti esempi.

✎ **Esempio 2.2.21.** *Sia*

$$A := \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

L'insieme A è limitato (perché limitato inferiormente e superiormente) ma $\min A$ *e* $\max A$ *non esistono (sarebbero $x = \mp\sqrt{2}$ che non sono numeri razionali).*

✎ **Esempio 2.2.22.** *Sia*

$$A := \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

L'insieme A come nel caso precedente risulta limitato e $\min E = -\sqrt{2}$ e $\max E = \sqrt{2}$.

Alla luce degli esempi precedenti, si rende necessaria l'introduzione di una nuova nozione, quella di ESTREMO SUPERIORE; questo concetto, nel caso di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, formalizza l'idea del punto dove "termina" l'insieme se ci muoviamo dai numeri negativi verso quelli positivi come mostrano i seguenti esempi. Discorsi analoghi naturalmente possono essere fatti a proposito dell'ESTREMO INFERIORE.

✎ **Esempio 2.2.23.** *Sia $A = \mathbb{R}$. Questo insieme non ha maggioranti quindi non è limitato superiormente e "non termina" da nessuna parte.*

✎ **Esempio 2.2.24.** *Sia* $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. *Si ha* $\mathcal{M}_A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ *e* $\max A = 0$. *D'altra parte è intuitivo pensare che questo insieme "termini" in 0. Il fatto che* A *sia una semiretta è ininfluente: infatti le stesse considerazioni valgono per l'insieme* $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\} \cup \{0\}$.

✎ **Esempio 2.2.25.** *Sia* $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. *Anche in questo caso* $\mathcal{M}_A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ *ma stavolta il massimo di* A *non esiste; tuttavia anche in questo caso è intuitivo pensare che questo insieme "termini" in 0.*

Siamo pronti allora a introdurre la seguente definizione.

❐ **Definizione 2.2.26.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e limitato superiormente. Si dice che ξ è l'ESTREMO SUPERIORE di A se ξ è il minimo dei maggioranti di A (se esiste). In tal caso scriveremo $\xi = \sup A$.
Analogamente si dice che η è l'ESTREMO INFERIORE di A se η è il massimo dei minoranti di A (se esiste). In tal caso scriveremo $\eta = \inf A$.

☞ **Osservazione 2.2.27.** Essendo definito come un minimo, il sup se esiste è unico (idem per l'inf essendo definito come un massimo).

☞ **Osservazione 2.2.28.** Si possono facilmente dare le seguenti caratterizzazioni dell'estremo superiore, se $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\xi = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \xi \in \mathcal{M}_A \\ \forall \lambda < \xi, \ \ \lambda \notin \mathcal{M}_A \end{cases} \tag{2.2.2}$$

e anche

$$\xi = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \ \ a \leq \xi \\ \forall \lambda < \xi, \ \ \exists \bar{a} \in A, \ \ \lambda < \bar{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \ \ a \leq \xi \\ \forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{a} \in A : \xi - \varepsilon \leq \bar{a}. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

L'ultima caratterizzazione deriva dal fatto che tutti i numeri minori di un dato numero reale ξ si possono scrivere come $\xi - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.
Analogamente

$$\eta = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \ \ \eta \leq a \\ \forall \lambda > \eta, \ \ \exists \bar{a} \in A, \ \ \lambda > \bar{a}. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

La nozione di estremo superiore (inferiore) si può definire più in generale per sottoinsiemi di un insieme ordinato; in tal caso le presenti caratterizzazioni non valgono e devono essere sostituite da altre opportune caratterizzazioni ma questo esula dagli scopi di questo corso.

Proposizione 2.2.29. *Se* A *ha massimo, allora questo è anche l'estremo superiore.*

DIMOSTRAZIONE. Se $m = \max A$ allora per definizione $m \in A$ e $m \in \mathcal{M}_A$, dunque tutti i numeri minori di m non sono maggioranti (perché sono minori di m che è un elemento di A). Pertanto, dalla (2.2.2), si ottiene immediatamente $m = \sup A$.

Proposizione 2.2.30. *Se $\xi = \sup A$ e $\xi \in A$ allora A ha massimo e $\xi = \max A$.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di estremo superiore, ξ è un maggiorante che per ipotesi sta nell'insieme, quindi per definizione $\xi = \max A$ perché il massimo è unico.

Corollario 2.2.31. *Se $\eta = \inf A$ e $\eta \in A$ allora A ha minimo e $\eta = \min A$.*

Siamo pronti per enunciare la proprietà che caratterizza $\mathbb{R}$ e lo differenza da $\mathbb{Q}$.
➜ **R4** ASSIOMA DI DEDEKIND (O ASSIOMA DI SEPARAZIONE O DI CONTINUITÀ) Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Un tale c è detto ELEMENTO SEPARATORE di A e B.

Teorema 2.2.32. *Ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore (in $\mathbb{R}$).*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo A che per ipotesi è non vuoto, e consideriamo l'insieme dei suoi maggioranti $\mathcal{M}_A$ che è non vuoto perché A è limitato superiormente. Per definizione di maggiorante, tutti gli elementi di $\mathcal{M}_A$ sono maggiori o uguali di tutti gli elementi di A, cioè

$$\forall a \in A, \, \forall m \in \mathcal{M}_A, \quad a \leq m.$$

Sono allora verificate le ipotesi dell'assioma di Dedekind, pertanto esiste un elemento separatore

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \ \forall a \in A, \ \forall m \in \mathcal{M}_A \ \ a \leq \xi \leq m.$$

In particolare da questa ultima relazione si deduce che ξ è maggiorante per A (infatti $\xi \geq a$ per ogni $a \in A$) e inoltre è il più piccolo dei maggioranti (infatti $\xi \leq m$ per ogni $m \in \mathcal{M}_A$). Quindi ξ è il minimo dei maggioranti e per definizione $\xi = \sup A$.

Corollario 2.2.33. *Ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente ha estremo inferiore (in $\mathbb{R}$).*

È facile vedere che dal Teorema 2.2.32 si può dedurre l'assioma di Dedekind, quindi possiamo considerare queste due proprietà come equivalenti.
Si può enunciare allora la seguente proprietà (valida più in generale per X insieme ordinato):
➜ **R4** Ogni insieme $A \subseteq X$ non vuoto e limitato superiormente possiede estremo superiore in X.

❐ **Definizione 2.2.34.** Un insieme X totalmente ordinato possiede la PROPRIETÀ DELL'ESTREMO SUPERIORE se soddisfa la proprietà **R4**.

Quindi ad esempio $\mathbb{Q}$ non ce l'ha. Infatti ad esempio se

$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

allora $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; mentre $\mathbb{R}$ ce l'ha. È QUESTA LA DIFFERENZA FONDAMENTALE TRA I CAMPI $\mathbb{Q}$ E $\mathbb{R}$. Possiamo dunque dare una definizione *assiomatica* di $\mathbb{R}$ secondo la seguente definizione.

❐ **Definizione 2.2.35.** Chiamiamo $\mathbb{R}$ un insieme che soddisfa le proprietà **R1**, **R2**, **R3**, **R4** e diremo che è un CAMPO ORDINATO CHE HA LA PROPRIETÀ DELL'ESTREMO SUPERIORE.

☞ **Osservazione 2.2.36.** Dal Teorema 2.2.32 sappiamo che l'estremo superiore esiste sempre, almeno per tutti quegli insiemi per cui è ragionevole cercarlo (insiemi non vuoti e limitati superiormente). Per poter parlare liberamente di estremo superiore (e in analogia di estremo inferiore) senza preoccuparsi della limitatezza di A, diamo la seguente definizione.

❐ **Definizione 2.2.37.** Se $A \subseteq \mathbb{R}$ allora la scrittura $\sup A = +\infty$ significa che A non è limitato superiormente. Analogamente con la scrittura $\inf A = -\infty$ intendiamo che A non è limitato inferiormente.

Con questa convenzione dunque possiamo parlare liberamente di estremo superiore e inferiore per un qualunque sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.
Presentiamo ora alcune proprietà di estremo superiore e inferiore che saranno utili negli esercizi.

Proposizione 2.2.38. *Se A è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, allora*

$$\sup A = -\inf(-A) \qquad \inf A = -\sup(-A)$$

Proposizione 2.2.39. *Se A è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, allora* $\inf A \leq \sup A$ *e l'uguaglianza vale e e soltanto se A è costituito da un solo punto.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $a \in A$ si ha

$$\inf A \leq a \leq \sup A$$

per definizione di estremo superiore e inferiore. Inoltre se $\inf A = \sup A = \xi$ allora abbiamo che ξ è sia maggiorante che minorante di A, quindi tutti gli elementi di A sono contemporaneamente maggiori o uguali di ξ e minori o uguali di ξ pertanto ogni elemento coincide con ξ.

Proposizione 2.2.40. *Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ha*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}. \tag{2.2.5}$$

Concludiamo con due risultati importanti che torneranno utili quando andremo a trattare le proprietà dei numeri naturali.

Proposizione 2.2.41. *Ogni insieme di numeri reali $A \subseteq \mathbb{Z}$ non vuoto e limitato inferiormente ha minimo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme A è anche sottoinsieme di $\mathbb{R}$, quindi A ha estremo inferiore $\eta \in \mathbb{R}$, per il Corollario 2.2.33. Per la caratterizzazione (2.2.4) esiste $\bar{a} \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\eta \leq \bar{a} < \lambda \qquad \forall \lambda > \eta.$$

Prendiamo $\lambda = \eta + \frac{1}{2}$ (basta anche $\lambda = \eta + \varepsilon$, con ogni $\varepsilon < 1$). Dimostriamo che $\bar{a} = \eta$. Supponiamo per assurdo che questo non sia vero. Allora η non sarebbe intero perché $\bar{a} \in \mathbb{Z}$ e nell'intervallo $[\eta, \eta + 1/2)$ può cadere al più un solo intero, e c'è già $\bar{a}$. Ma allora anche $\bar{a}$ è minorante di A: infatti, da un lato non esistono elementi di A minori di η (che era l'estremo inferiore pertanto un minorante) e non esistono numeri interi (quindi nemmeno elementi di A) maggiori o uguali di η e minori di $\bar{a}$ (perché siamo in $\mathbb{Z}$ e pertanto, come già osservato, nell'intervallo $[\eta, \eta + 1/2)$ ci può essere al più un intero, e quello è già $\bar{a}$). Questo vuol dire che abbiamo trovato un minorante $\bar{a} \geq \eta$ contro l'ipotesi che η sia il massimo dei minoranti. Quindi $\eta = \bar{a}$ e in particolare $\eta \in A$. Essendo $\eta = \inf A$ ed $\eta \in A$ allora, per il Corollario 2.2.31, $\eta = \min A$.

Corollario 2.2.42. *Ogni insieme di numeri reali $A \subseteq \mathbb{Z}$ non vuoto e limitato superiormente ha massimo.*

Proposizione 2.2.43. (PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b > 0$. Allora esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con A l'insieme dei multipli di a, cioè

$$A = \{na : n \in \mathbb{N}\}.$$

Chiaramente A è non vuoto. Supponiamo che A sia limitato superiormente. Allora $\xi = \sup A$ è un numero reale. Per la caratterizzazione (2.2.3) con $\lambda = \xi - a$, esiste almeno un elemento di A compreso tra $\xi - a$ e ξ. Poiché gli elementi di A hanno tutti la forma na con $n \in \mathbb{N}$, questo significa che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\xi - a < \bar{n}a \leq \xi$, pertanto $(\bar{n}+1)a > \xi$. Ma allora anche $(\bar{n}+1)a \in A$ e questo contraddice il fatto che ξ sia un maggiorante per A. Quindi A non è limitato superiormente; in particolare, per ogni $b > 0$, b non è un maggiorante di A, quindi deve esistere un elemento di A, cioè un multiplo di a, maggiore di b, da cui la tesi.

Corollario 2.2.44. *Gli insiemi* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ *non sono limitati superiormente.*

DIMOSTRAZIONE. Applicare la proprietà di Archimede con $a = 1$.

2.3. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 2.3.1.** *Sia*

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di* A *rispettivamente.*

R. Siccome $n < n+1$, allora $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, quindi posto $a_n = \frac{1}{n}$, si ha che la successione a_n è decrescente. Quindi $\sup A = 1$ raggiunto per $n = 1$ quindi è anche un massimo. Dimostriamo che $\inf A = 0$. Dalla caratterizzazione (2.2.4) si deve far vedere che:
(i) $\eta = 0$ è minorante, cioè $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha $0 < \frac{1}{n}$ il che è sempre vero;
(ii) $\eta = 0$ è il massimo dei minoranti, cioè fissato $\varepsilon > 0$, occorre determinare $\bar{n}$ tale che ε non sia più minorante, cioè

$$\varepsilon > \frac{1}{\bar{n}} \Leftrightarrow \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

che è vero dalla PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE. Allora $\inf A = 0$ e il minimo non esiste (0 non appartiene ad A).

✍ **Esercizio 2.3.2.** *Sia*
$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$
Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.*

R. Analogamente all'esercizio precedente, si dimostra che $\inf A = \min A = 0$; $\sup A = 1$ e $\max A$ non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.3.** *Sia*
$$A = \left\{\frac{2n}{n^2+1} : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$
Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.*

R. A è limitato superiormente e inferiormente. Infatti è possibile dimostrare (risolvendo esplicitamente le disequazioni) che
$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad -1 \leq \frac{2n}{n^2+1} \leq 1$$
Eventuali estremanti sono pertanto ± 1, che sono raggiunti rispettivamente per $n = \pm 1$. Quindi $\inf A = \min A = -1$; $\sup A = \max A = 1$.

✍ **Esercizio 2.3.4.** *Sia*
$$A = \left\{n + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$
Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.*

R. Il termine n va all'infinito più velocemente di $2/n$ (è un infinito di ordine superiore); quindi $\sup A = +\infty$ e $\max A$ non esiste. D'altra parte, osservando che per $n = 1$ e $n = 2$ si ha $n + 2/n = 3$ e per $n > 2$ si ha $n + 2/n > n \geq 3$;, si deduce che $\inf A = \min A = 3$.

✍ **Esercizio 2.3.5.** *Sia*
$$A = \left\{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di A rispettivamente.*

R. PRIMO MODO: Vogliamo far vedere che la successione $\frac{n-1}{n+1}$ è crescente. Per fare questo, dobbiamo mostrare che

$$\frac{n-1}{n+1} < \frac{n+1-1}{n+1+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow n^2 + 2n - n - 2 < n^2 + n \Leftrightarrow -2 < 0$$

dove abbiamo potuto eliminare i denominatori perché stiamo lavorando in $\mathbb{N}$ e quindi $n \geq 0$. Allora l'estremo inferiore è quello raggiunto per $n = 0$, quindi $\inf A = \min A = -1$. Ora dimostriamo che $\sup A = 1$ (e quindi $\max A$ non esiste). Dobbiamo prima di tutto mostrare che 1 è un maggiorante, quindi occorre far vedere che

$$\frac{n-1}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n - 1 < n + 1 \Leftrightarrow -1 < 1$$

che è sempre vero. Ora bisogna far vedere che 1 è il minimo dei maggioranti, cioè che per ogni ε, $1 - \varepsilon$ non è un maggiorante, ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon < \frac{\bar{n}-1}{\bar{n}+1}.$$

D'altra parte

$$1 - \varepsilon < \frac{\bar{n}-1}{\bar{n}+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{n}+1-\bar{n}+1}{\bar{n}+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\bar{n}+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \bar{n} > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

che di nuovo è vero per la proprietà di Archimede. Da cui la tesi.
SECONDO MODO: in analogia col l'Esercizio 2.3.2 potendo scrivere

$$\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Esercizio 2.3.6. *Sia*

$$A = \left\{ \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di* A *rispettivamente.*

R. innanzitutto possiamo riscrivere l'insieme A nel seguente modo:

$$A = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n} & n \text{ pari} \\ 1 - \dfrac{1}{n} & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Quindi possiamo ragionare separatamente nei due casi, che sono analoghi ai primi esempi trattati. In modo semplice si può far vedere che se n è pari, $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$ mentre $\inf A = 1$ e il minimo non esiste; se n è dispari si fa vedere che $\sup A = 1$ ma il massimo non esiste, mentre $\inf A = \min A = 0$. A questo punto, grazie alle formule (2.2.5), possiamo concludere che qualunque sia n,

$$\inf A = \min A = 0 \qquad \sup A = \max A = \frac{3}{2}$$

✍ **Esercizio 2.3.7.** *Sia*

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 9^x + 3^{x+1} - 4 \geq 0\right\}.$$

Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di* A *rispettivamente.*

R. Basta risolvere la disequazione

$$3^{2x} + 3\,3^x - 4 \geq 0$$

da cui sostituendo $t = 3^x$ si ha

$$t^2 + 3t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -4 \ \vee \ t \geq 1 \Leftrightarrow 3^x \leq -4 \ \vee \ 3^x \geq 1 \Leftrightarrow 3^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Quindi $\inf A = \min A = 0$; $\sup A = +\infty$ e ovviamente il massimo non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.8.** *Sia*

$$A = \left\{x > 0 : \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0\right\}.$$

Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di* A *rispettivamente.*

R. Si osserva che

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{N}$$

perché si chiede che $x > 0$. Quindi

$$x = \frac{2}{\pi(1+2k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Allora $\sup A = \max A = \frac{2}{\pi}$ raggiunto per $k = 0$. Mostriamo che $\inf A = 0$ e che $\min A$ non esiste. Prima di tutto 0 è banalmente minorante. Inoltre 0 è il massimo dei minoranti perché fissato $\varepsilon > 0$, ε non è più un minorante, infatti

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N}:\ \varepsilon > \frac{2}{\pi(1+k)} \Leftrightarrow k > \frac{1}{\pi\,\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

che è possibile.

✍ **Esercizio 2.3.9.** *Sia*

$$A = \left\{[-1+(-1)^n]n + \frac{1}{n^2+2}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Determinare $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dite se sono minimo e/o massimo di* A *rispettivamente.*

➻ **R.** innanzitutto possiamo riscrivere l'insieme A nel seguente modo:

$$A = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2+2} & n \text{ pari} \\ -2n + \dfrac{1}{n^2+2} & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Quindi possiamo ragionare separatamente nei due casi e alla fine applicare le formule (2.2.5). Nel caso n pari si ha che $a_n = \frac{1}{n^2+2}$ è una successione decrescente, pertanto ha estremo superiore coincidente con il massimo per $n = 0$ e ha estremo inferiore 0 (che non è minimo perché non sta nell'insieme). Nel caso n dispari invece, il termine $-2n$ va all'infinito più velocemente di $\frac{1}{n^2+2}$ (è un infinito di ordine superiore) e tende a $-\infty$ quindi la successione non è limitata inferiormente ($\inf = -\infty$) mentre ha estremo superiore pari a $-5/3$ corrispondente a $n = 1$. Concludendo possiamo concludere che qualunque sia n, $\inf A = -\infty$, il minimo di A non esiste, $\sup A = \max A = \frac{1}{2}$.

✍ **Esercizio 2.3.10.** *Sia*

$$A = \left\{\frac{n-2}{n+2}:\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di* A *rispettivamente.*

➻ **R.** In analogia con l'esercizio 2.3.5 si ha che $\inf A = \min A = -1$ mentre $\sup A = 1$ e il massimo non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.11.** *Sia*

$$A = \left\{ \frac{n^2 + 2[n + (-1)^n]}{n^2 + 1} : \;\; n \geq 2 \right\}.$$

Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di* A *rispettivamente.*

➾ **R.** Prima di tutto osserviamo che

$$\frac{n^2 + 2[n + (-1)^n]}{n^2 + 1} = 1 + \frac{2(n + (-1)^n) - 1}{n^2 + 1}$$

e inoltre

$$\frac{2n - 3}{n^2 + 1} \leq b_n := \frac{2(n + (-1)^n) - 1}{n^2 + 1} \leq \frac{2n + 1}{n^2 + 1}$$

quindi b_n è controllata da due successioni decrescenti e infinitesime (e a termini non negativi visto che si considera $n \geq 2$). Quindi è facile vedere che $\sup A = \max A = 2$ ottenuto per $n = 2$ mentre $\inf A = 1$ che non è minimo visto che non è raggiunto per alcun valore di n.

✍ **Esercizio 2.3.12.** *Sia*

$$A = \left\{ \frac{n - n\cos(n\pi) + 1}{n + n\cos(n\pi) + 1} : \;\; n \geq 1 \right\}.$$

Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di* A *rispettivamente.*

➾ **R.** Osserviamo innanzitutto che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e

$$\frac{n - n\cos(n\pi) + 1}{n + n\cos(n\pi) + 1} = 1 - \frac{2n(-1)^n}{n + 1 + n(-1)^n}$$

quindi possiamo riscrivere l'insieme A nel seguente modo:

$$A = \begin{cases} 1 + 2n & n \text{ dispari} \\ \dfrac{1}{2n + 1} & n \text{ pari.} \end{cases}$$

Quindi possiamo ragionare separatamente nei due casi e alla fine applicare le formule (2.2.5) per ottenere che $\sup A = +\infty$ e il massimo ovviamente non esiste, mentre $\inf A = 0$ e non è minimo perché non è raggiunto da alcun n.

✍ **Esercizio 2.3.13.** *Sia*

$$A = \left\{ \frac{2}{n+1} : \quad n \geq 1 \right\} \cup [1, 2).$$

Determinate $\inf A$ *e* $\sup A$ *e dire se sono minimo e/o massimo di* A *rispettivamente.*

R. Ragionando come in precedenza è facile vedere che $\sup A = 2$ e il massimo non esiste perché non è raggiunto; $\inf A = 0$ che non è minimo perché non è raggiunto per alcun valore di n.

CAPITOLO 3

Numeri complessi

3.1. Premessa: radicali, potenze e logaritmi

3.1.1. Radici n-esime aritmetiche

Teorema 3.1.1. *Sia $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ e n intero $n \geq 1$. Allora esiste un unico numero reale positivo x tale che $x^n = y$.*

Tale numero si chiama RADICE ENNESIMA ARITMETICA di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$ o $y^{1/n}$.

☞ **Osservazione 3.1.2.** Per quanto detto sopra si osserva che la radice ennesima aritmetica è sempre *non negativa*, esempi: $\sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{x^2} = |x|$; questo accade perché stiamo lavorando in campo reale. In campo complesso naturalmente il comportamento sarà differente (si veda la sezione successiva per maggiori dettagli).

3.1.2. Potenze a esponente reale

L'estrazione di radice ennesima è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza intera. In questo paragrafo vogliamo estendere questa operazione ad *ogni esponente razionale*; questo lo possiamo fare se la base è positiva. Sia dunque

$$r := \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n > 0, \qquad a > 0.$$

Allora è ben definita

$$a^r := (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

La definizione si estende allo stesso modo anche se l'esponente è un numero reale (per densità).

Supponiamo ora che $a<0$; allora a^b è definita solo in certi casi particolari, più precisamente se $b\in\mathbb{Z}$ oppure se $b\in\mathbb{Q}$, $b=\frac{n}{m}$ a patto che non sia n dispari e m pari. Infatti se m è dispari $a^{n/m}=\sqrt[m]{a^n}$ e in generale $\sqrt[m]{c}=-\sqrt[m]{-c}$. Per esempio:

$$(-2)^{3/5}=\sqrt[5]{(-2)^3}=\sqrt[5]{-8}=-\sqrt[5]{8}; \qquad (-2)^{3/4}=\sqrt[4]{-8} \text{ non esiste in campo reale.}$$

Per le potenze a esponente reale valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{E0} & a^0=1\ \forall a\neq 0; \quad 1^c=1\ \forall c \\
\textbf{E1} & a^c>0\ \forall c; \quad a^c \gtreqless 1 \text{ se } a\gtreqless 1 \text{ e } c>0 \\
\textbf{E2} & a^{c+d}=a^c\,a^d \\
\textbf{E3} & (ab)^c=a^c\,b^c \\
\textbf{E4} & (a^b)^c=a^{bc} \\
\textbf{E5} & c<d\Rightarrow a^c\gtreqless a^d \text{ se } a\lesseqgtr 1 \\
\textbf{E6} & 0<a\le b\Rightarrow a^c\le b^c\ \ \forall c>0
\end{array}$$

3.1.3. Logaritmi

Consideriamo l'equazione $a^x=y$ per $a>0$, y assegnato e x incognito. Se $a=1$ allora l'equazione precedente ha soluzione se $y=1$; in tal caso ogni x è soluzione. Se $a\neq 1$ e $y\le 0$, l'equazione non ha soluzioni. Si ha allora il seguente teorema:

Teorema 3.1.3. *Siano $a>0$, $a\neq 1$ e $y>0$. Allora esiste un unico numero reale x tale che $a^x=y$.*

Tale numero prende il nome di LOGARITMO IN BASE a DI y e si indica con $\log_a y$; per definizione si ha dunque

$$a^{\log_a y}=y.$$

Il logaritmo ha le seguenti proprietà dedotte dalle corrispondenti per le potenze a esponente reale:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{L1} & \log_a(xy)=\log_a x+\log_b y \\
\textbf{L2} & \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y \\
\textbf{L3} & \log_a x^\alpha=\alpha\log_a x,\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R} \\
\textbf{L4} & \log_a x=\dfrac{1}{\log_x a}=-\log_{\frac{1}{a}} x,\ \ \forall x\neq 1 \\
\textbf{L5} & \log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b},\ \ \forall b>0, b\neq 1
\end{array}$$

3.2. Numeri complessi

L'introduzione del campo dei numeri complessi avviene principalmente per ragioni di natura algebrica. Infatti si pone l'esigenza di ampliare il campo matematico rendendo più naturale il concetto di potenza, visto che a^b ha senso se $a > 0$ mentre se $a < 0$ vale solo in certi casi (equivale a cercare la radice di numeri negativi).

3.2.1. Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo

Sia $\mathbb{R}^2$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Su $\mathbb{R}^2$ è definito in modo naturale l'operazione di *somma*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e quella di *prodotto*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Si verificano facilmente le proprietà *commutativa*, *associativa*, *distributiva*. Inoltre $(0, 0)$ è *l'elemento neutro* della somma, cioè si ha

$$\forall (a, b), (a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$$

mentre $(1, 0)$ è *l'elemento neutro per il prodotto*, ossia

$$\forall (a, b), (a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b).$$

Inoltre per ogni (a, b) è possibile definire *l'elemento opposto* di (a, b) che indicheremo con $(-a, -b)$ e si ha

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

e analogamente, per ogni $(a, b) \neq (0, 0)$ è possibile definire *il reciproco di* (a, b) che indicheremo con $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ tale per cui si abbia

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0).$$

Si verifica quindi che $\mathbb{R}^2$ con queste operazioni è un campo che chiameremo CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI e indicheremo con la lettera $\mathbb{C}$.

Sia ora $\mathbb{C}_0$ un sottocampo di $\mathbb{C}$ formato dall'insieme delle coppie del tipo $(a, 0)$ con il secondo elemento della coppia uguale a 0. In tal caso le operazioni di somma e prodotto si riducono a

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \qquad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Quindi su $\mathbb{C}_0$ è possibile introdurre una relazione d'ordine $<$ in modo tale che diventi un campo ordinato: infatti si ha

$$a < b \to (a, 0) < (b, 0).$$

È quindi possibile *mettere in corrispondenza biunivoca* $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}_0$ nel modo seguente

$$(a, 0) \leftrightarrow a$$

in modo tale da poter IDENTIFICARE i due insiemi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}_0$. In questo senso il campo dei numeri complessi si può vedere come un *ampliamento* del campo dei numeri reali.

☞ **Osservazione 3.2.1.** Notiamo che

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Quindi abbiamo trovato un numero complesso tale che il suo quadrato coincida con il numero reale $(-1, 0)$ (che può essere identificato con -1). Per l'importanza (anche storica) di questo numero complesso, gli viene dato il nome di UNITÀ IMMAGINARIA e si indicherà con $(0, 1) = i$.

A questo punto andiamo a semplificare le notazioni. Si ha

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$$

che viene denominata FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI. A questo punto allora

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

e

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Se $z = a + ib$, a si dice PARTE REALE DI z e si indica con $\Re(z)$ mentre b si dice PARTE IMMAGINARIA DI z e si indica con $\Im(z)$.

☞ **Osservazione 3.2.2.** $\boxed{\text{Si noti che } a \text{ e } b \text{ sono NUMERI REALI!!!}}$

✎ **Esempio 3.2.3.** *Calcolare*

$$(2 - i) + (1 + 3i).$$

Si ha

$$(2 - i) + (1 + 3i) = 2 - i + 1 + 3i = 3 + 2i.$$

✎ **Esempio 3.2.4.** *Calcolare*

$$(2 - i)(1 + 3i)$$

Si ha

$$(2 - i)(1 + 3i) = 2 + 6i - i + (-i)(3i) = 2 - 5i + 3 = 5 + 5i.$$

❒ **Definizione 3.2.5.** Il QUOZIENTE di numeri complessi si definisce nel modo seguente

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\,(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

✎ **Esempio 3.2.6.** *Calcolate*

$$\frac{1}{2-3i}$$

Si ha

$$\frac{1}{2-3i}\,\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{13}.$$

❒ **Definizione 3.2.7.** Si dice COMPLESSO CONIUGATO di un numero complesso $z = a + ib$ il numero complesso $\overline{z} = a - ib$.

Si noti che

$$z + \overline{z} = 2\Re(z), \qquad z - \overline{z} = 2i\Im(z).$$

✎ **Esempio 3.2.8.** *Calcolate*

$$\frac{2+i-\overline{(3-i)}}{3i+1}.$$

Si ha

$$\frac{2+i-\overline{(3-i)}}{3i+1} = \frac{2+i-3-i}{3i+1}\,\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{3i-1}{10}.$$

N.B. un errore molto comune sarebbe stato moltiplicare ambo i membri per $3i-1$ e non per $1-3i$. Infatti il complesso coniugato del numero $3i+1$ è $1-3i$ e non $3i-1$.

Elenchiamo ora alcune semplici proprietà dell'operazione di coniugio. Si ha

$$\begin{aligned}
&(i)\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\\
&(ii)\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\\
&(iii)\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}\\
&(iv)\overline{\overline{z}} = z\\
&(v)z\,\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Quest'ultima proprietà è particolarmente interessante perché ci dice che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato dà un numero reale, la cui radice quadrata prende il nome di MODULO DI z e si indica con $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Quindi $|z|^2 = z\,\overline{z}$; se $z \in \mathbb{R}$ allora il suo modulo coincide con il valore assoluto.

✎ **Esempio 3.2.9.** *Calcolare $|2-3i|$.*
Si ha

$$|2-3i| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}.$$

Un ***errore*** *molto frequente sarebbe stato quello di prendere il quadrato di* $-3i$ *anziché quello della sola parte immaginaria* -3*. In questo caso si otterrebbe* $|2-3i|^2 = -5$ *che fa subito sospettare, ma se il risultato fosse stato positivo, poteva esserci il rischio di non accorgersi dell'errore.*

Elenchiamo alcune proprietà del modulo di un numero complesso.

$$
\begin{aligned}
&1)|z| \geq 0, \ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \\
&2)|z| = |\overline{z}| \\
&3)|\Re(z)| \leq |z|, \qquad |\Im(z)| \leq |z| \\
&4)|z+w| \leq |z| + |w| \qquad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE} \\
&5)|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)| \\
&6)||z| - |w|| \leq |z+w|.
\end{aligned}
$$

DIMOSTRAZIONE: Le prime due proprietà sono di immediata dimostrazione. Per la terza, indicando con $a = \Re z$ e $b = \Im z$, si ottiene la tesi dal fatto che $a^2 \leq a^2 + b^2$ e similmente $b^2 \leq a^2 + b^2$. Per la proprietà 4), basta dimostrare che

$$|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2,$$

cioè esplicitando i conti

$$(z+w)(\overline{z} + \overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\,|w|$$

da cui

$$z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|.$$

A questo punto si conclude osservando che

$$z\overline{z} = |z|^2 \qquad w\overline{w} = |w|^2 \qquad z\overline{w} + w\overline{z} = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = 2\Re(z\overline{w}) \leq 2|z\overline{w}| \leq 2\,|z||w|.$$

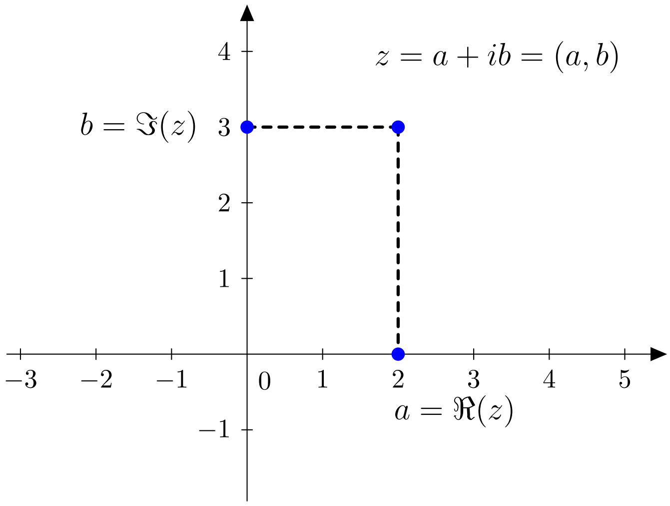
dove l'ultimo passaggio si ottiene o lavorando direttamente con i conti espliciti, o usando la formula per il prodotto di numeri complessi dato al paragrafo corrispondente.
La formula 5) discende dalla precedente osservando che $z = \Re z + i\Im z$ e $i\Im z = |\Im z|$ mentre la sesta è una conseguenza della disuguaglianza triangolare.

Osserviamo anche che

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{3.2.1}$$

e inoltre l'unico numero di modulo zero è lo zero.

Vista l'identificazione tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, per il campo dei numeri complessi c'è un'interessante interpretazione geometrica. Infatti il numero complesso $z = a + ib$ può essere identificato con il punto di coordinate (a, b) e la rappresentazione grafica avviene nel cosiddetto *piano complesso* O PIANO DI GAUSS; l'asse x è identificato con l'asse reale, l'asse y con l'asse immaginario e per sommare due numeri complessi vale la regola del parallelogramma (come con i vettori).



In quest'ottica, anche il modulo di un numero complesso ha anche un'interessante *interpretazione geometrica*. Infatti $|z|$ rappresenta la distanza del numero complesso (o del punto nel piano di Gauss) dall'origine. In particolare $|z_1 - z_2|$ rappresenta la *distanza* di due numeri complessi. Quindi le proprietà 5) e 6) di cui sopra si interpretano geometricamente con il ben noto fatto che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Osserviamo invece che $|z - z_0| = r$ rappresenta nel piano di Gauss una circonferenza di centro il numero complesso z_0 e raggio r; quindi $|z - z_0| < r$ rappresenta il cerchio di centro z_0 e raggio r (privato della circonferenza che è il suo bordo) mentre $|z - z_0| \leq r$ rappresenta il cerchio di centro z_0 e raggio r, bordo incluso. Pertanto in quest'ottica, i numeri complessi di modulo r sono i punti della circonferenza centrata nell'origine e raggio r.

Inoltre, se $a > 0$ è un numero reale, allora il numero complesso az si ottiene dal numero z con un'omotetia di ragione a e centro l'origine nel piano di Gauss.

Infine $|z - z_0| = |z - z_1|$ si interpreta come il luogo dei punti del piano *equidistanti* dai punti z_0 e z_1: si tratta pertanto dell'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1. Di conseguenza $|z - z_0| < |z - z_1|$ rappresenta il semipiano (delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1) che contiene z_0 e viceversa $|z - z_0| > |z - z_1|$ rappresenta il semipiano (delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1) che contiene z_1. Se la disuguaglianza è stretta allora l'asse non è compreso, se larga l'asse è compreso.

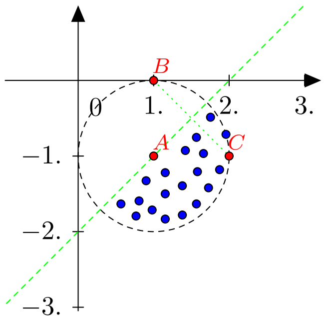
✎ **Esempio 3.2.10.** *Descrivere cosa rappresenta il luogo dei punti del piano di Gauss che* *soddisfano le seguenti disuguaglianze*

$$|z-1| > |z-2+i| \qquad \text{e} \qquad |z-1+i| < 1.$$

Possiamo riscrivere

$$|z-1| > |z-2+i| = |z-1| > |z-(2-i)|.$$

In questo modo, per quanto detto sopra, tale disuguaglianza rappresenta il semipiano generato dall'asse del segmento che congiunge $z = 1$ e $z = 2 - i$ (asse escluso) e che contiene il punto $z = 2 - i$. Tale zona del piano di Gauss deve essere intersecata con $|z - 1 + i| < 1$ che rappresenta il cerchio (privato del bordo) di centro $z = 1 - i$ e raggio 1. Osservando che l'asse del segmento che congiunge $z = 1$ e $z = 2 - i$ passa anche per il centro del cerchio, la zona interessata rappresenta un semicerchio (privato dei bordi; nel disegno è rappresentato dalla zona punteggiata di blu).



☞ **Osservazione 3.2.11.** Si noti che $\mathbb{C}$ con le operazioni introdotte prima è un campo, ma non è un campo ordinato. Infatti ricordando le proprietà introdotte nella Sezione dove si sono trattati i numeri reali, è possibile far vedere che non si può introdurre una relazione d'ordine tale che valga la proprietà **R3**. Infatti, se così fosse, si arriverebbe a una contraddizione: basta considerare il fatto che $a^2 \geq 0$ per ogni a reale, mentre nel campo complesso si ha $i^2 = -1$.

Osserviamo che il numero complesso 0 ha parte reale e parte immaginaria uguali a 0: questo ha come conseguenza il fatto che se due numeri complessi sono uguali, allora la loro differenza (che è zero) ha parte reale e parte immaginaria zero, ma la parte reale della differenza è la differenza delle parti reali, quindi queste devono essere uguali e lo stesso le parti immaginarie. Dunque un'equazione complessa dà origine, prendendo separatamente le parti reali e immaginarie, a due equazioni reali.

✎ **Esempio 3.2.12.** *Risolvere l'equazione per $z \in \mathbb{C}$*

$$(2z - \overline{z} + 3i)\Im z = 1 + 6i.$$

Ponendo $z = a + ib$ si ha

$$(2(a+ib) - (a-ib) + 3i)b = 1 + 6i$$

che equivale a

$$(a + 3ib + 3i)b = 1 + 6i.$$

A questo punto, separando parte reale e parte immaginaria si ottengono le due equazioni (attenzione: $a, b \in \mathbb{R}$!!!)

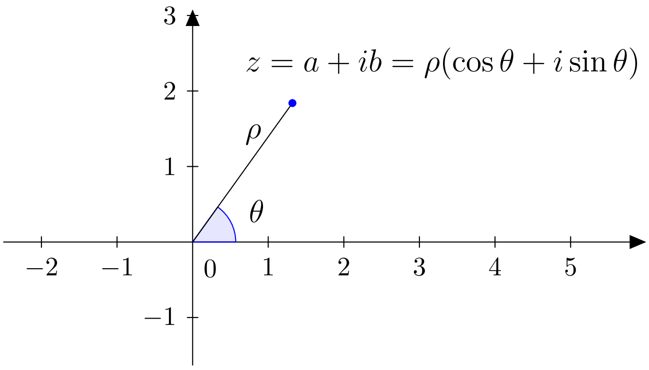
$$\begin{cases} ab = 1 \\ 3b^2 + 3b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ b^2 + b - 2 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si legge $b = 1$ o $b = -2$ che inserite nella prima danno rispettivamente $a = 1$ e $a = -1/2$. Quindi l'equazione data ha due soluzioni in campo complesso che sono

$$z_1 = 1 + i \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - 2i.$$

3.2.2. Forma trigonometrica dei numeri complessi

Com'è noto dalla geometria analitica, per individuare un punto nel piano cartesiano si possono usare sia le coordinate cartesiane che le coordinate polari. In tal caso un punto nel piano viene individuato dalla coppia (ρ, θ) dove ρ è il raggio e θ è l'angolo polare, cioè l'angolo che la semiretta che coingiunge il punto $z \neq 0$ con l'origine forma con la direzione positiva dell'asse delle x, individuato a meno di multipli di 2π e misurato in radianti, con le solite convenzioni di verso.
Nel caso dei numeri complessi, il raggio polare coincide con il MODULO di z mentre si indica con $\arg(z)$ L'ARGOMENTO di z uno degli angoli θ, definito a meno di multipli di 2π. Tra tutti i valori possibili di $\arg z$, uno solo è compreso nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e viene di solito indicato con $\operatorname{argmin} z$. Quando chiaro dal contesto, scriveremo semplicemente $\arg z$ al posto di $\operatorname{argmin} z$.



Dalle classiche relazioni di trigonometria si ha

$$\Re z = |z| \cos(\arg z)$$
$$\Im z = |z| \sin(\arg z)$$

o anche, se $z \neq 0$

$$\cos(\arg z) = \frac{\Re z}{|z|} \qquad \sin(\arg z) = \frac{\Im z}{|z|}.$$

In particolare, se $z \neq 0$ non è immaginario (non ha parte reale uguale a zero)

$$\tan\theta = \frac{\Im z}{\Re z},$$

da cui si deduce

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right)(+2k\pi) & \Re z > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right)(+2k\pi) & \Re z < 0 \\ \frac{\pi}{2}(+2k\pi) & \Re z = 0 \ \ \Im z > 0 \\ \frac{3}{2}\pi(+2k\pi) & \Re z = 0 \ \ \Im z < 0 \end{cases}$$

❒ **Definizione 3.2.13.** Si dice che $z \in \mathbb{C}$ è scritto in FORMA TRIGONOMETRICA se sono evidenziati i valori di $\rho \geq 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

✎ **Esempio 3.2.14.** *Se $z = 1+i$ allora $|z| = \sqrt{2}$ e $\arg z = \frac{\pi}{4}$ pertanto la forma trigonometrica di z è*

$$z = \sqrt{2}[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}].$$

Se $z = -1$ allora $\arg z = \pi$ e la forma trigonometrica di z risulta

$$z = 1\cos(\pi + i\sin\pi).$$

L'argomento di $\overline{z}$ è l'opposto dell'argomento di z, quindi se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ allora $\overline{z} = \rho\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$.

3.2.3. Potenze di numeri complessi

Proposizione 3.2.15. *Siano $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ due numeri complessi di dati moduli ρ, r e argomenti θ, ϕ. Allora si ha*

$$z\,w = (\rho\,r)\,[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)]$$

e se $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}\left(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)\right).$$

La dimostrazione si basa sulle regole di base di trigonometria su seno e coseno di somme o differenze, dopo aver scritto esplicitamente il prodotto

$$zw = \rho\,r[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)].$$

Per il quoziente basta ricordare la formula (3.2.1) e applicare la formula del prodotto.

Quindi il prodotto (o il quoziente) di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto (o il quoziente) dei moduli e per argomento la somma (o la differenza) degli argomenti. La formula si può per induzione generalizzare a un numero qualsiasi di fattori, per esempio

$$z_1\, z_2\, \ldots, z_n = \rho_1\, \rho_2\, \ldots\, \rho_n\, \left(\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\right).$$

Corollario 3.2.16. (formula di De Moivre) *Se $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ allora $\forall n\in\mathbb{Z}$ si ha*

$$z^n=\rho^n\,\left(\cos(n\theta)++\sin(n\theta)\right).$$

✎ **Esempio 3.2.17.** *Calcolare* $(1+i)^{16}$.
Ponendo $z=(1+i)$ si ha che $|z|=\sqrt{2}$ e $\arg(z)=\pi/4$. Da cui

$$|(1+i)^{16}|=(\sqrt{2})^{16}=2^8=256; \qquad \arg(1+i)^{16}=16\,\frac{\pi}{4}=4\pi.$$

Quindi si ha

$$(1+i)^{16}=256(\cos(4\pi)+i\sin(4\pi))=256.$$

✎ **Esempio 3.2.18.** *Calcolare* i^{2015}.
Si ha

$$2015=503\cdot 4+3$$

da cui

$$i^{2015}=(i^4)^{503}\,i^3=1\cdot(-i)=-i$$

tenendo conto che $i^4=1$ e $i^3=i\cdot i\cdot i=-i$.

☞ **Osservazione 3.2.19.** La moltiplicazione per z equivale nel piano di Gauss a una rotazione di $\arg z$ seguita da un'omotetia di ragione $|z|$.

3.2.4. Radici n-esime di numeri complessi

❒ **Definizione 3.2.20.** Dato un numero complesso w, diremo che z è una radice n-esima complessa di w se risulta $z^n=w$.

Teorema 3.2.21. *Sia $w\in\mathbb{C}$, $w\neq 0$ e $n\geq 1$ intero. Allora esistono* esattamente *n radici ennesime complesse $z_0,z_1,\ldots,z_{n-1}$ di w, cioè tali che $z_k^n=w$ per $k=0,\ldots,n-1$. Inoltre posto $w=r(\cos\phi+i\sin\phi)$, si ha che $z_k=\rho_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$ dove*

$$\begin{cases}\rho_k=r^{1/n}\\ \theta_k=\dfrac{\phi+2\pi k}{n}, \qquad k=0,1,\ldots,n-1.\end{cases}$$

Se z è una radice ennesima di w, allora per definizione $z^n = w$ pertanto anche $|z^n| = |w|$. Dalla formula delle potenze ennesime, sappiamo che $|z^n| = |z|^n$ pertanto $|z|^n = |w|$. Dato che quest'ultima è un'uguaglianza tra numeri reali, ne deduciamo che

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}.$$

In particolare, se $w = 0$, l'unica radice ennesima di w è zero (come detto l'unico numero di modulo 0). Se invece $w \neq 0$, scriviamo z e w in forma trigonometrica come

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

così che dalla formula di De Moivre ricaviamo

$$\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

che equivale alle due equazioni reali

$$\cos(n\theta) = \cos\phi \qquad \sin(n\theta) = \sin\phi.$$

Dunque gli angoli $n\theta$ e ϕ hanno lo stesso seno e lo stesso coseno, pertanto differiscono per un multiplo intero di 2π

$$n\theta = \phi + 2m\pi$$

da cui ricaviamo

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi m}{n}.$$

Quindi possiamo porre

$$\begin{cases} \theta_0 = \dfrac{\phi}{n} \\ \theta_1 = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} \\ \theta_2 = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{4\pi}{n} \\ \vdots \\ \theta_{n-1} = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{cases}$$

e per ogni $k = 0, \dots n-1$

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k).$$

Questi n numeri hanno argomenti diversi e compresi tra 0 e 2π, quindi sono numeri tutti distinti e abbiamo dimostrato che sono le uniche possibili radici di w. Poiché si verifica facilmente che la loro potenza $n-$esima è effettivamente w, il teorema è dimostrato.

In conclusione, se $w = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$, allora le sue n radici ennesime sono date dalla formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Dunque il simbolo $\sqrt[n]{z}$ non indica un numero complesso ma un insieme di numeri complessi, quindi la radice ennesima non è una **funzione** da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ (semmai una funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{C})$). C'è pertanto una differenza significativa tra trovare le radici ennesime in campo reale e in campo complesso: per esempio in $\mathbb{R}$ si ha $\sqrt{4} = 2$ mentre in $\mathbb{C}$ si ha $\sqrt{4} = \pm 2$.

☞ **Osservazione 3.2.22.** Le radici ennesime di un numero complesso hanno un'interessante interpretazione geometrica nel piano di Gauss: infatti sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

✎ **Esempio 3.2.23.** *Scrivere le radici cubiche di* $i - 1$.

Sia $w = i - 1 = -1 + i$ di cui dobbiamo individuare le radici cubiche (quindi si tratta di 3 radici). Prima di tutto occorre scrivere w in forma trigonometrica per cui si ottiene facilmente che

$$r = |w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$

inoltre

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Quindi la forma trigonometrica del numero complesso w è

$$w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

A questo punto, se z è una radice cubica allora $|z| = \sqrt[3]{|w|} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$, mentre se indichiamo con θ l'argomento di z si ottiene

$$\theta = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

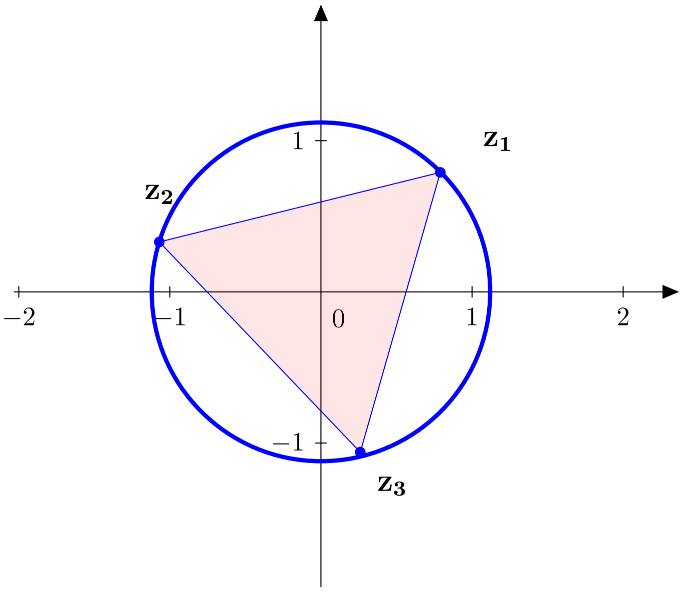
Allora gli argomenti delle tre radici cubiche sono esattamente

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi}{4} \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi = \frac{11}{12}\pi \\ \theta_3 &= \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\pi = \frac{19}{12}\pi. \end{aligned}$$

Quindi le tre radici cubiche sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right) \\ z_3 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right). \end{aligned}$$

Le tre radici cubiche stanno ai vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[6]{2}$, come mostrato in figura.



☞ **Osservazione 3.2.24.** Andiamo a risolvere la generica equazione di secondo grado a coefficienti reali: $ax^2+bx+c=0$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sappiamo che $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e questo (a seconda del segno del discriminante) può dare origine a due soluzioni oppure una sola (con molteplicità 2) oppure nessuna soluzione. Se consideriamo invece le equazioni di secondo grado in campo complesso, cioè andiamo a risolvere l'equazione $az^2+bz+c=0$ con $a,b,c,\in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ allora formalmente si ha sempre $z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ con la consueta formula, ma il significato qui è profondamente diverso: qui la radice esiste sempre perché siamo in campo complesso, quindi in $\mathbb{C}$ un'equazione di secondo grado ha sempre due soluzioni, anche se il discriminante viene negativo.

✎ **Esempio 3.2.25.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2-2z+2=0$.*
Si ha

$$z = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$$

quindi l'equazione data ha due soluzioni $z_1 = 1+i$ e $z_2 = 1-i$.

Gli esempi precedenti non sono casi isolati: vale infatti il seguente importantissimo teorema.

Teorema 3.2.26. TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA *Un'equazione polinomiale*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0, \qquad a_n \neq 0$$

con coefficienti complessi ha esattamente n radici in $\mathbb{C}$, ognuna contata con la sua molteplicità.

La somma delle molteplicità delle radici di un polinomio complesso è pari al grado del polinomio. Questo non vale in $\mathbb{R}$: ad esempio $x^2 + 1$ ha grado 2 ma non ha soluzioni reali.

3.3. Forma esponenziale dei numeri complessi

Concludiamo il capitolo con un'ulteriore notazione riguardanti i numeri complessi. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ poniamo

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Abbiamo dunque definito una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ che risulta periodica di periodo 2π. In particolare dal fatto che $e^{ir} = e^{is}$ non segue che $r = s$ ma $r = s + 2k\pi$. Allora il numero complesso di modulo ρ e argomento θ può essere scritto in forma abbreviata come

$$\rho e^{i\theta}.$$

Questa notazione prende il nome di NOTAZIONE ESPONENZIALE e ha ragione di essere nel fatto che la formula del prodotto e quella delle potenze danno rispettivamente

$$\rho e^{i\theta}\, r e^{i\phi} = \rho\, r\, e^{i(\theta+\phi)} \qquad (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

proprio come si avrebbe usando formalmente le proprietà dell'esponenziale. Attenzione però con le radici: da $\rho^n e^{in\theta} = r e^{i\phi}$ non segue $\theta = \dfrac{\phi}{n}$ ma solo $\theta = \dfrac{(\phi + 2k\pi)}{n}$.

✎ **Esempio 3.3.1.** *Si ha*

$$e^{i\pi} = -1 \qquad e^{2i\pi} = 1 \qquad 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}.$$

3.4. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 3.4.1.** *Calcolare* $-i(2 - i) + (3 - i)(i + 2)$

➼ **R.** Si ha

$$-i(2-i)+(3-i)(i+2) = -2i-1+3i+6+1-2i = 6-i.$$

✍ **Esercizio 3.4.2.** *Calcolate parte reale, parte immaginaria e il coniugato del numero* $i(2i-3)+(i-1)\overline{(3+4i)}$

➼ **R.** Si ha

$$i(2i-3)+(i-1)\overline{(3+4i)} = -2-3i+(i-1)(3-4i) = -2-3i+3i+4-3+4i = -1+4i$$

da cui

$$\Re(z) = -1, \qquad \Im(z) = 4, \qquad \overline{z} = -1-4i.$$

N.B. $\Im(z) = 4 \neq 4i$!!!

✍ **Esercizio 3.4.3.** *Calcolare*

$$\frac{2-i}{3+i}$$

➼ **R.** Si ha

$$\frac{2-i}{3+i} = \frac{6-2i-3i-1}{9+1} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1-i}{2}.$$

✍ **Esercizio 3.4.4.** *Calcolare*

$$\frac{iz-2\overline{z}}{i+z} \qquad \text{se} \qquad z = 3+i$$

➼ **R.** Si ha

$$\frac{i(3+i)-2(3-i)}{3+2i}\,\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(-7+5i)(3-2i)}{13} = \frac{-11+29i}{13}.$$

✍ **Esercizio 3.4.5.** *Calcolare*

$$|3i+5| \qquad |-6i| \qquad |-i+4|.$$

➼ **R.** Si ha

$$|3i+5| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}.$$

Inoltre

$$|-6i| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6.$$

Infine

$$|-i+4| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}.$$

✍ **Esercizio 3.4.6.** *Calcolate*

$$\frac{3z - i|z|^2 - (2-i)\overline{z}}{2\Re(z) - \Im(z)} \qquad \text{se} \qquad z = 2+i$$

➻ **R.** Si ha

$$\frac{3(2+i) - i(4+1) - (2-i)(2-i)}{4-1} = \frac{6 + 3i - 4i - i - 4 + 4i + 1}{3} = 1 + \frac{2i}{3}.$$

✍ **Esercizio 3.4.7.** *Calcolate*

$$\Im\left(iz\,\overline{z} + \frac{|z|^2}{z}\right) \qquad \text{se} \qquad z = 1+3i$$

➻ **R.** Si ha

$$iz\,\overline{z} + \frac{|z|^2}{z} = i10 + \frac{10}{1+3i}\,\frac{1-3i}{1-3i} = 10i + \frac{10-30i}{10} = 1+7i$$

da cui

$$\Im\left(iz\,\overline{z} + \frac{|z|^2}{z}\right) = 7.$$

✍ **Esercizio 3.4.8.** *Calcolate*

$$\Re\left(\frac{|z|^2 - 2\overline{z}}{iz}\right) \qquad \text{se} \qquad z = 2+i$$

➻ **R.** Si ha innanzitutto

$$z = 2+i, \qquad \overline{z} = 2-i \qquad |z|^2 = 5 \qquad iz = 2i-1$$

da cui

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{|z|^2 - 2\overline{z}}{iz}\right) &= \Re\left(\frac{5-4+2i}{2i-1}\,\frac{-1-2i}{-1-2i}\right) = \Re\left(\frac{1+2i}{-1+2i}\,\frac{-1-2i}{-1-2i}\right) = \Re\left(\frac{-1-4i+4}{5}\right)\\ &= \Re\left(\frac{3-4i}{5}\right) = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

N.B. Di nuovo osserviamo che

$$\overline{2i-1} = -1-2i \neq 2i+1!!!$$

✍ **Esercizio 3.4.9.** *Trovare le soluzioni* (z,w) *con* $z,w \in \mathbb{C}$ *del seguente sistema*

$$\begin{cases} z\overline{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1. \end{cases}$$

R. Prima di tutto osserviamo che $z \neq 0$, altrimenti si avrebbe l'assurdo $0 = i$. Quindi passando ai coniugati nella seconda riga del sistema e ricordando le proprietà del coniugio, si ottiene

$$\overline{|z|^2 w + z} = \overline{|z|^2}\,\overline{w} + \overline{z} = |z|^2\,\overline{w} + \overline{z} = 1$$

visto che $|z|^2$ è un numero reale. Sostituendo dalla prima equazione (ok, visto che abbiamo visto che $z \neq 0$)

$$|z|^2\,\frac{i}{z} + \overline{z} = 1.$$

A questo punto, so che $|z|^2 = z\,\overline{z}$ quindi

$$\frac{z\overline{z}i}{z} + \overline{z} = 1$$

da cui

$$\overline{z}i + \overline{z} = 1.$$

A questo punto poniamo $z = a+ib$ da cui $\overline{z} = a-ib$ e quindi l'equazione da risolvere diventa

$$(a-ib)(i+1) = 1$$

da cui

$$ai + a + b - ib = 1.$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottiene

$$\begin{cases} a-b = 0 \\ a+b = 1. \end{cases}$$

Quindi $a = b = \frac{1}{2}$ da cui

$$z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{i+1}{2}, \qquad \overline{w} = \frac{i}{z} = \frac{2i}{1+i}\,\frac{1-i}{1-i} = \frac{2i+2}{2} = i+1, \qquad w = 1-i.$$

Per curiosità, facciamo la prova per verificare che effettivamente la soluzione trovata soddisfa il sistema di partenza. Si ha

$$z\,\overline{w} = \frac{1+i}{2}(i+1) = \frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+(-1)+2i) = i$$

e inoltre
$$|z|^2w + z = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)(1-i) + \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}(1-i+1+i) = 1.$$

✍ **Esercizio 3.4.10.** *Trovare le soluzioni (z,w) con $z,w \in \mathbb{C}$ del seguente sistema*
$$\begin{cases} z+w = 1+i \\ |w|^2 + \overline{z} = 1-i. \end{cases}$$

➾ **R.** Dalla prima equazione si ricava
$$z = 1+i-w, \qquad \text{da cui} \qquad \overline{z} = 1-i-\overline{w}$$
quindi sostituendo nella seconda equazione si ottiene
$$|w|^2 + 1 - i\overline{w} = 1-i$$
da cui
$$\overline{w}(w-1) = 0$$
che porta a due casi: $\overline{w} = 0$ da cui si deduce $w = 0$ e $w = 1$. Allora le soluzioni del sistema sono $(1+i, 0)$ e $(i, 1)$.

✍ **Esercizio 3.4.11.** *Trovare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del seguente sistema*
$$\begin{cases} z^2 - \overline{z}^2 = 4i \\ (1+i)z = (1-i)\overline{z}. \end{cases}$$

➾ **R.** Ponendo $z = a+ib$ si ha $\overline{z} = a-ib$ e $z^2 = (a+ib)^2 = a^2+2abi-b^2$ e dunque $\overline{z} = a^2-2abi-b^2$. Quindi il sistema dato si riduce al seguente sistema (dove a e b stavolta sono numeri reali!!!)
$$\begin{cases} 4abi = 4i \\ (1+i)(a+ib) = (1-i)(a-ib) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ 2(a+b)i = 0. \end{cases}$$
Dalla seconda equazione si deduce $a = -b$ che inserito nella prima non dà alcuna soluzione (visto che a, b per definizione sono numeri reali).

3.5. Esercizi proposti

N.B. *Per gli esercizi di questa sezione si propone solo un* suggerimento *della soluzione; in sede d'esame lo studente deve presentare uno svolgimento completo, come per gli esercizi contenuti* *nelle sezioni precedenti.*

✍ **Esercizio 3.5.1.** *Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi e scrivere z nella forma trigonometrica*

$$1) z = -1 + i$$
$$2) z = \sqrt{3}i + 1$$
$$3) z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

R. 1) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{3}{4}\pi$ da cui

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

2) $|z| = 2$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ da cui

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

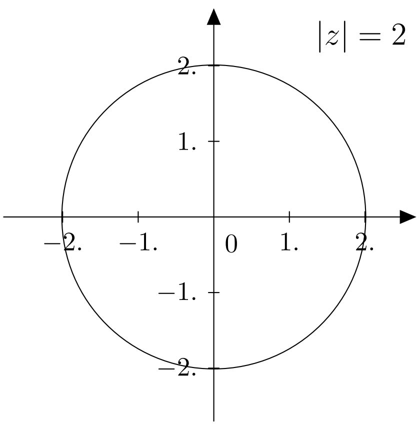
3) $|z| = 2$, $\arg(z) = \frac{7}{4}\pi$ da cui

$$z = 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

✍ **Esercizio 3.5.2.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| = 2$$

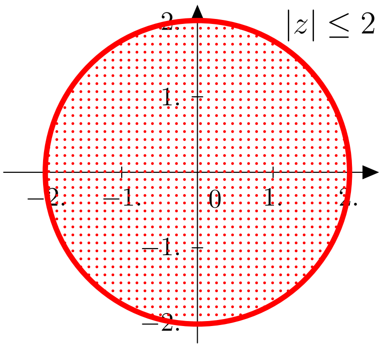
R. Si tratta di una circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2



✍ **Esercizio 3.5.3.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| \leq 2.$$

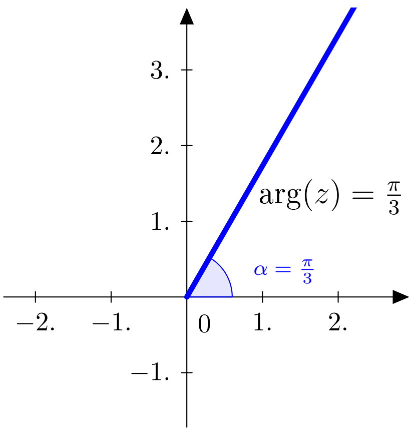
➼ **R.** Si tratta di un cerchio di centro l'origine e raggio 2.



✍ **Esercizio 3.5.4.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$\arg(z) = \frac{\pi}{3}.$$

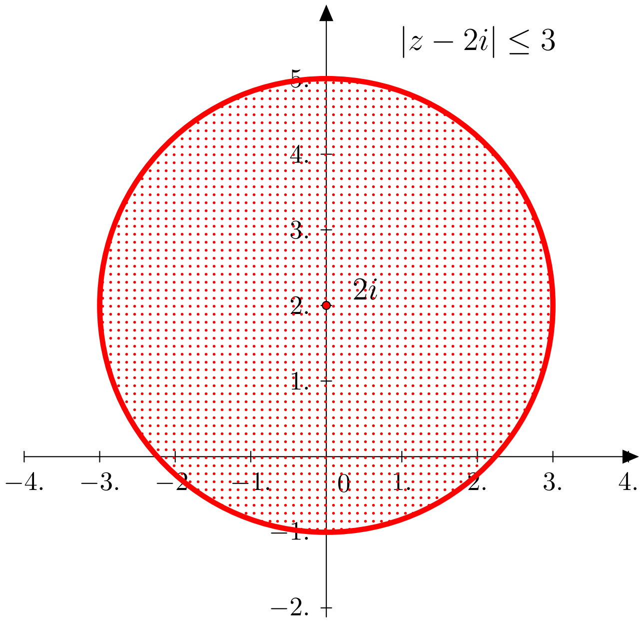
➼ **R.** Si tratta di una semiretta uscente dall'origine che forma con la direzione positiva dell'asse delle x un angolo di $\pi/3$.



✍ **Esercizio 3.5.5.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z - 2i| \leq 3.$$

➼ **R.** Si tratta di un cerchio centrato in $2i$ e di raggio 3.



✍ **Esercizio 3.5.6.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z-3+4i| \leq 5.$$

➾ **R.** Si tratta di un cerchio centrato in $z_0 = 3-4i$ e raggio 5.

✍ **Esercizio 3.5.7.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$\pi \leq \arg(z) \leq \frac{7}{4}\pi.$$

➾ **R.** Si tratta della porzione di piano compresa la direzione negativa dell'asse delle ascisse e la bisettrice del quarto quadrante (semirette uscenti dall'origine).

✍ **Esercizio 3.5.8.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| = |z+i|$$

➾ **R.** Asse del segmento che congiunge i numeri complessi $z=0$ e $z=-i$.

✍ **Esercizio 3.5.9.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$\Re z > 2$$

➼ **R.** Semipiano a destra della retta $x = 2$ (retta esclusa).

✍ **Esercizio 3.5.10.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$\Im z = -4$$

➼ **R.** Retta $y = -4$ (retta parallela all'asse delle x).

✍ **Esercizio 3.5.11.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$z = \sqrt{8 + i}$$

➼ **R.** Due punti simmetrici rispetto all'origine.

✍ **Esercizio 3.5.12.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$z = \sqrt[3]{2 - 2i}$$

➼ **R.** Tre punti che stanno su una circonferenza di raggio $2\sqrt{2}$ ai vertici di un triangolo equilatero.

✍ **Esercizio 3.5.13.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| < 1 \ \text{ e } \ |z - 1 - i| < 1$$

➼ **R.** Intersezione tra cerchio di centro l'origine e raggio 1 e cerchio di centro $z_1 = 1 + i$ e raggio 1 (bordi esclusi).

✍ **Esercizio 3.5.14.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z-i| = |z-1| \text{ e } |z-1-i| \le 1$$

➻ **R.** Intersezione tra l'asse del segmento che congiunge i punti $z = i$ e $z = 1$ e il cerchio di centro $z_1 = 1+i$ e raggio 1. Si tratta del segmento (bordi inclusi) $\{(x,y) : y = -x+1,\ \ 0 \le x \le 1\}$.

✍ **Esercizio 3.5.15.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| < |z+1| \text{ e } |z+1-i| < 1$$

➻ **R.** Intersezione tra il semipiano contenente $z = 0$ delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z = 0$ e $z = -1$ (estremi esclusi) e il cerchio centrato in $z_1 = -1+i$ e raggio 1 (bordo escluso). Si tratta di una porzione di cerchio.

✍ **Esercizio 3.5.16.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| > |z+1| \text{ e } |z+1-i| < 1$$

➻ **R.** Intersezione tra il semipiano contenente $z = -1$ delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z = 0$ e $z = -1$ (estremi esclusi) e il cerchio centrato in $z_1 = -1+i$ e raggio 1 (bordo escluso). Si tratta di una porzione di cerchio (la parte di cerchio complementare rispetto all'esercizio precedente).

✍ **Esercizio 3.5.17.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| < |z+1| \text{ e } |z+1-i| > 1$$

➻ **R.** Intersezione tra il semipiano contenente $z = 0$ delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z = 0$ e $z = -1$ (estremi esclusi) e l'esterno del cerchio centrato in $z_1 = -1+i$ e raggio 1 (bordo escluso). Si tratta del semipiano a cui è stata levata la porzione di cerchio di due esercizi sopra.

✍ **Esercizio 3.5.18.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1| < 1 \text{ e } \Re z = \Im z$$

➼ **R.** Intersezione del cerchio (bordo escluso) di centro -1 e raggio 1 e la retta $y = x$. Si tratta del segmento (bordi esclusi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, \ -1 < x < 0\}$.

✍ **Esercizio 3.5.19.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1| < 1 \text{ e } \Re z > \Im z$$

➼ **R.** Intersezione del cerchio (bordo escluso) di centro -1 e raggio 1 e il semipiano delimitato dalla retta $y = x$ contenente il quarto quadrante. Si tratta di una porzione di cerchio.

✍ **Esercizio 3.5.20.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1| = 1 \text{ e } \Re z < \Im z$$

➼ **R.** Intersezione della circonferenza di centro -1 e raggio 1 e il semipiano delimitato dalla retta $y = x$ contenente il secondo quadrante. Si tratta di $3/4$ di una circonferenza.

✍ **Esercizio 3.5.21.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1| < 1 \text{ e } \Re z < \Im z$$

➼ **R.** Intersezione del cerchio (bordo escluso) di centro -1 e raggio 1 e il semipiano delimitato dalla retta $y = x$ contenente il secondo quadrante. Si tratta della porzione di cerchio complementare a quella di due esercizi sopra.

✍ **Esercizio 3.5.22.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| > 1 \text{ e } |z-1-i| < 1$$

➼ **R.** Se chiamiamo C l'insieme dei punti interni al cerchio di centro $1+i$ e raggio 1 e D l'insieme dei punti del cerchio di centro l'origine e raggio 1, l'insieme dato è $C \setminus D$ (bordi esclusi).

✍ **Esercizio 3.5.23.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| < 1 \ \text{ e } \ |z-1-i| > 1$$

➼ **R.** Se chiamiamo C l'insieme dei punti interni al cerchio di centro $1+i$ e raggio 1 e D l'insieme dei punti del cerchio di centro l'origine e raggio 1, l'insieme dato è $D \setminus C$ (bordi esclusi).

✍ **Esercizio 3.5.24.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+2| < |z+i|$$

➼ **R.** Semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z = -2$ e $z = i$, che contiene $z = -2$ (asse del segmento esclusa).

✍ **Esercizio 3.5.25.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1| = |z+i|$$

➼ **R.** Asse del segmento che congiunge i punti $z = -1$ e $z = -i$.

✍ **Esercizio 3.5.26.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z| > |z+i|$$

➼ **R.** Semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z = 0$ e $z = -i$, che contiene $z = -i$ (asse del segmento esclusa).

✍ **Esercizio 3.5.27.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1| > |z+i|$$

➼ **R.** Semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z = -1$ e $z = -i$, che contiene $z = -i$ (asse del segmento esclusa).

✍ **Esercizio 3.5.28.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z-i| < |z+1-2i| \text{ e } |z+1-i| < 1$$

➼ **R.** Semicerchio dato dall'intersezione tra il cerchio centrato in $z = -1+i$ di raggio 1 (bordo escluso) e il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z_1 = i$ e $z_2 = -1+2i$ (asse esclusa) contenente il punto $z = i$.

✍ **Esercizio 3.5.29.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z-i| > |z+1-2i| \text{ e } |z+1-i| < 1$$

➼ **R.** Semicerchio dato dall'intersezione tra il cerchio centrato in $z = -1+i$ di raggio 1 (bordo escluso) e il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z_1 = i$ e $z_2 = -1+2i$ (asse esclusa) contenente il punto $z = -1+2i$.

✍ **Esercizio 3.5.30.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1-i| > |z| \text{ e } |z+i| < 1$$

➼ **R.** Intersezione tra il cerchio centrato in $z = -i$ di raggio 1 (bordo escluso) e il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z_1 = 0$ e $z_2 = -1+i$ (asse esclusa) contenente il punto $z = 0$. Si ottiene il cerchio $|z+i| < 1$.

✍ **Esercizio 3.5.31.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1-i|<|z| \text{ e } |z+i|<1$$

➼ **R.** Intersezione tra il cerchio centrato in $z=-i$ di raggio 1 (bordo escluso) e il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z_1=0$ e $z_2=-1+i$ (asse esclusa) contenente il punto $z=-1+i$. Si tratta dell'insieme vuoto.

✍ **Esercizio 3.5.32.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1-i|>|z| \text{ e } |z+i|>1$$

➼ **R.** Intersezione tra l'esterno del cerchio centrato in $z=-i$ di raggio 1 (bordo escluso) e il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z_1=0$ e $z_2=-1+i$ (asse esclusa) contenente il punto $z=0$. Si ottiene il semipiano stesso privato del cerchio.

✍ **Esercizio 3.5.33.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei punti z tali che*

$$|z+1-i|<|z| \text{ e } |z+i|>1$$

➼ **R.** Intersezione tra il cerchio centrato in $z=-i$ di raggio 1 (bordo escluso) e il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z_1=0$ e $z_2=-1+i$ (asse esclusa) contenente il punto $z=0$. Si ottiene il semipiano stesso.

✍ **Esercizio 3.5.34.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$z^2+z\,\overline{z}-4+4i=0$$

➼ **R.** Se $z=a+ib$ allora

$$(a+ib)^2+a^2+b^2-4+4i=0$$

da cui

$$a^2=2 \qquad ab=-2$$

che dà come soluzioni $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ e $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

✍ **Esercizio 3.5.35.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$z + \frac{1+i}{z} = 2 + i$$

➥ **R.** $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1$.

✍ **Esercizio 3.5.36.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$(2z + \overline{z} - 3)\Re z = 6 - i$$

➥ **R.** $z_1 = 2 - \frac{1}{2}i$ e $z_2 = -1 + i$

✍ **Esercizio 3.5.37.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$|z + 2|\, z = -i$$

➥ **R.** $z = \sqrt{\sqrt{5} - 2}i$

✍ **Esercizio 3.5.38.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$z - \frac{1-i}{z} = 1 + 2i$$

➥ **R.** $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = i$

✍ **Esercizio 3.5.39.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$5\overline{z} - z = z\,\overline{z} + 6i$$

➥ **R.** $z_1 = 2 - \sqrt{3} - i$ e $z_2 = 2 + \sqrt{3} - i$

✍ **Esercizio 3.5.40.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$i\overline{z}\,\Im z = z$$

➻ **R.** $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 1 - i$

✍ **Esercizio 3.5.41.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$z(\Re z + \Im z) = \overline{z}$$

➻ **R.** $z_1 = 0$, $z_2 = -i$ e $z_3 = 1$

✍ **Esercizio 3.5.42.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$(2z - \overline{z} + 2)\Re z = 3 - 3i$$

➻ **R.** $z_1 = -3 + \frac{1}{3}i$ e $z_2 = 1 - i$

✍ **Esercizio 3.5.43.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$(\overline{z} - 2z + 6i)\Im z = 1 - 9i$$

➻ **R.** $z_1 = -\frac{1}{3} + 3i$ e $z_2 = 1 - i$

✍ **Esercizio 3.5.44.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$z(4 - \overline{z}) = 4\sqrt{3}i$$

➻ **R.** $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$

✍ **Esercizio 3.5.45.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$\Re z(z + i\Im z) = \overline{z}$$

➬ **R.** $z = 0$ e $z = 1$

✍ **Esercizio 3.5.46.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$(\overline{z} - 2)z = iz$$

➬ **R.** $z_1 = 0$, $z_2 = 2 - i$

✍ **Esercizio 3.5.47.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$(z - 2)\overline{z} = i\overline{z}$$

➬ **R.** $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$

✍ **Esercizio 3.5.48.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$|z|^2 + \overline{z} = 2 + i$$

➬ **R.** $z = a + ib$ con $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ e $b = -1$

✍ **Esercizio 3.5.49.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$\Re z(\overline{z} - i\Im z) = z$$

➬ **R.** $z = 0$ e $z = 1$

✍ **Esercizio 3.5.50.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$z + \frac{1-i}{z} = -2 + i$$

➻ **R.** $z = -1$ e $z = -1 + i$

✍ **Esercizio 3.5.51.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$5z + \overline{z} = z\,\overline{z} + 4i$$

➻ **R.** $z = 3 - 2\sqrt{2} + i$ e $z = 3 + 2\sqrt{2} + i$

✍ **Esercizio 3.5.52.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$z(\overline{z} + i) = 2$$

➻ **R.** $z = -i$ e $z = 2i$

✍ **Esercizio 3.5.53.** *Calcolare* i^{501} *e poi* i^{502}.

➻ **R.** $i^{501} = i$ e $i^{502} = -1$.

✍ **Esercizio 3.5.54.** *Descrivere geometricamente l'insieme* $E \in \mathbb{C}$ *definito da*

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \, |z + i| = 1 \, |z - i| = 2\}$$

➻ **R.** Si tratta dell'intersezione tra due circonferenze, una centrata in $z = -i$ e raggio 1 e l'altra centrata in $z = i$ e di raggio $\sqrt{2}$. La loro intersezione è costituita esattamente da due punti.

✍ **Esercizio 3.5.55.** *Calcolare*
$$\frac{2+3i}{1+3i}$$

➭ **R.** $\frac{1}{10}(11-3i)$

✍ **Esercizio 3.5.56.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei numeri complessi z tali che $z+\overline{z}=0$*

➭ **R.** Si ha $z+\overline{z}=2\Re z$ quindi l'insieme cercato rappresenta l'asse delle x (asse reale)

✍ **Esercizio 3.5.57.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione*
$$2z-2\Re z+\overline{z}=-3i$$

➭ **R.** $z=-3i$

✍ **Esercizio 3.5.58.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione*
$$3\overline{z}+2i\Im z+z=2$$

➭ **R.** Si tratta della retta verticale $\Re z=\frac{1}{2}$

✍ **Esercizio 3.5.59.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione*
$$3\overline{z}-2\Re z-z=2i$$

➭ **R.** Si tratta della retta orizzontale $\Im z=-\frac{1}{2}$

✍ **Esercizio 3.5.60.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione*

$$z - \Im z = -\overline{z}$$

➻ **R.** Si tratta degli infiniti numeri complessi $z = a + ib$ tali che $b = 2a$.

✍ **Esercizio 3.5.61.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione*

$$(z - \overline{z})\,\overline{z} = 2$$

➻ **R.** $z = \pm i$

✍ **Esercizio 3.5.62.** *Se* θ *è l'argomento del numero complesso* z*, determinare l'argomento (a meno di multipli di* 2π*) di* $\frac{1}{z}$ *e di* $\frac{1}{\overline{z}}$

➻ **R.** Ricordando che

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

si ha che l'argomento di $\frac{1}{z}$ è $-\theta$ e l'argomento di $\frac{1}{\overline{z}}$ è θ.

✍ **Esercizio 3.5.63.** *Se* $z = 2\sqrt{3} + 2i$ *e* $w = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$*, calcolare* $z\,w$

➻ **R.** Si ha $z\,w = 2i$

✍ **Esercizio 3.5.64.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei numeri complessi* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *tale che* $|z+2| < |z| < |z+4|$

➻ **R.** Si tratta della striscia

$$\{x + iy : -2 < x < -1\}$$

✍ **Esercizio 3.5.65.** *Se* $z = 1 + i$ *calcolare* $|z + 1|^2$

➻ **R.** 5

✍ **Esercizio 3.5.66.** *Descrivere geometricamente l'insieme dei numeri complessi* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *tali che*

$$|z + 1| < |z - 1|$$

➻ **R.** Si tratta del semipiano contenente $z = -1$ e delimitato dall'asse del segmento che congiunge i punti $z = 1$ e $z = -1$ (asse escluso), quindi $\{a + ib : \ a < 0\}$

✍ **Esercizio 3.5.67.** *Se* $z = 2 + i$ *calcolare* $z\,\overline{z}$

➻ **R.** 5

✍ **Esercizio 3.5.68.** *Se* $z = 3 + 4i$ *calcolare* z^{-1}

➻ **R.** $\frac{3-4i}{25}$

✍ **Esercizio 3.5.69.** *Se* $z = \sqrt{2}\,\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\ \sin\frac{\pi}{16}\right)$ *calcolare* z^8

➻ **R.** $z = 16i$

✍ **Esercizio 3.5.70.** *Calcolare*

$$\frac{3+i}{1+i}$$

➻ **R.** $2 - i$

✍ **Esercizio 3.5.71.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione* $z\,|z|^2 = -8i$

➼ **R.** $z = 2i$

✍ **Esercizio 3.5.72.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione* $z\,|z|^2 = -i$

➼ **R.** $z = -2i$

✍ **Esercizio 3.5.73.** *Si denoti con* $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$ *un generico numero complesso. Determinare l'insieme delle soluzioni di* $|z+1|\,z = \overline{z}$

➼ **R.** Si ha

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2}(x + iy) = x - iy$$

da cui, indicando con $R = \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$ si ottengono le due equazioni $Ra = a$ e $Rb = -b$. Dalla prima si legge $a = 0$ oppure $R = 1$. Se $a = 0$ allora $b = 0$ mentre se $R = 1$ allora $b = 0$ da cui $a = -2$. Quindi le soluzioni sono $z = 0$ e $z = -2$.

✍ **Esercizio 3.5.74.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione* $z^2 = \overline{z}$?

➼ **R.** $z = 0$, $z = 1$, $z = -1 + i\sqrt{3})/2$ e $z = -1 - i\sqrt{3})/2$

✍ **Esercizio 3.5.75.** *Se* $z = 3 + 4i$ *calcolare* $|z^{-2}|$

➼ **R.** $\dfrac{1}{25}$

✍ **Esercizio 3.5.76.** *Determinare qual è la minima distanza nel piano complesso tra due radici seste complesse di 1*

➼ **R.** Le radici seste complesse di 1 sono sui vertici di un esagono regolare; la distanza minima di due vertici è la lunghezza del lato dell'esagono, ma essendo l'angolo sotteso uguale a $\pi/3$ tale distanza è pari a 1.

✍ **Esercizio 3.5.77.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^3$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^3 = w$.

➻ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^3 = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right\}^3 = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right) = -\frac{i}{8} \end{aligned}$$

A questo punto le tre soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

✍ **Esercizio 3.5.78.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(i - \sqrt{3}\right)^3$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^3 = w$.

➼ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(i-\sqrt{3}\right)^3 = \left\{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right\}^3 = 8\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)^3 \\ &= 8\left(\cos\frac{5}{2}\pi + i\sin\frac{5}{2}\pi\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i \end{aligned}$$

A questo punto le tre soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2i$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{4}{3}\pi\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$

✍ **Esercizio 3.5.79.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\sqrt{3}-3i\right)^3$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^3 = w$.

➼ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(\sqrt{3}-3i\right)^3 = \left\{2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}^3 = 24\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^3 \\ &= 24\sqrt{3}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -24\sqrt{3}. \end{aligned}$$

A questo punto le tre soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_3 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2\sqrt{3}$$

✍ **Esercizio 3.5.80.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^3 = w$.

➭ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left\{\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3 = 3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^3 \\ &= 3\sqrt{3}\,(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

A questo punto le tre soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_3 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{3}\,(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt{3}$$

✍ **Esercizio 3.5.81.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^4$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^4 = w$.

➭ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{i}{4}\right)^4 = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\right\}^4 = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

A questo punto le quattro soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_3 = -z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}+\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$

$$z_4 = -z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{3}{2}\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

✍ **Esercizio 3.5.82.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(i-\sqrt{3}\right)^4$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^4 = w$.

➭ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(i-\sqrt{3}\right)^4 = \left\{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right\}^4 = 16\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)^4 \\ &= 16\left(\cos\frac{10}{3}\pi+i\sin\frac{10}{3}\pi\right) = 16\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

A questo punto le quattro soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = (-1 - \sqrt{3}i)$$

$$z_3 = -z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi + \pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi + \pi\right)\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$z_4 = -z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

✍ **Esercizio 3.5.83.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\sqrt{3} - 3i\right)^4$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^4 = w$.

➻ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(\sqrt{3} - 3i\right)^4 = \left\{2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}^4 = 144\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^4 \\ &= 144\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 144\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

A questo punto le quattro soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_3 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3} + \pi\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = -z_1$$

$$z_4 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = -z_2$$

✍ **Esercizio 3.5.84.** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^4 = w$.

➾ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \left\{\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^4 = 9\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^4 \\ &= 9\left(\cos\frac{8}{3}\pi + i\sin\frac{8}{3}\pi\right) = 9\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 9\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

A questo punto le quattro soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_3 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \pi\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = -z_1$$

$$z_4 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = -z_2$$

3.6. Esercizi senza soluzione

✍ **Esercizio 3.6.1.** *Calcolare le soluzioni dell'equazione* $(z+1)^2 + 1 = 0$ *e quelle dell'equazione* $(z-1)^2 + 1 = 0$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.2.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$(\overline{z}+2)z = i\overline{z}$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.3.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$(z+2)\overline{z} = iz$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.4.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$(z+1)^3 = i$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.5.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$z - \frac{1+i}{z} = 1-2i$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.6.** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$z^2 + i\sqrt{3}z + i = 0$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.7.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$\overline{z}(\Im z + \Re z) = z$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.8.** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$\left(\frac{\overline{z} - i}{1 - i}\right)^3 = 2\sqrt{2}i$$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.9.** *Disegnare nel piano di Gauss i seguenti insiemi:*

(a) $\{z + i : z \in E\}$
(b) $\{z - 2i : z \in E\}$
(c) $\{-iz : z \in E\}$
(d) $\{iz : z \in E\}$
(e) $\{-z : z \in E\}$
(f) $\{-z + i : z \in E\}$
(g) $\{z^2 : z \in E\}$
(h) $\{z^3 : z \in E\}$
(i) $\{\sqrt{z} : z \in E\}$

dove E di volta in volta è l'insieme
1) $E = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq 1,\ \ 0 \leq \arg(z) \leq \pi\}$
2) $E = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z| \leq 3,\ \ \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3}{2}\pi\}$
3) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\ \ 0 \leq \arg(z) \leq \pi\}$
4) $E = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \pi\}$

➻ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.10.** *Trovare modulo e argomento del numero complesso* $-3 + i\sqrt{3}$ *ed esprimere poi in forma algebrica il numero complesso di modulo 5 ed argomento* $7\pi/4$.

➼ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.11.** *Calcolare* $z^3 - iz^5 + z^7$ *dove* $z = (1+i)/\sqrt{2}$ *e calcolare poi* $\dfrac{z^3 - i\overline{z}}{z - |z|}$ *dove* $z = (1-i)/\sqrt{2}$.

➼ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.12.** *Sostituite* $z = 1 - 2i$ *nell'espressione*

$$\frac{(\overline{z})^2 + iz - 2}{i|z|^2 - z}$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica.

➼ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.13.** *Scrivete in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \frac{z - i\overline{z}}{z^2 - 2i|z|^2}$$

ove $z = 1 + 2i$.

➼ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.14.** *Sostituite* $z = 1 - 2i$ *nell'espressione*

$$\frac{(\overline{z})^2 + iz - 2}{i|z|^2 - z}$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica.

➼ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.15.** *Determinare le eventuali soluzioni* $z, w \in \mathbb{C}$ *del seguente sistema di equazioni*

$$\begin{cases} i + z + w = \pi \\ izw = \pi. \end{cases}$$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.16.** *Sostituite* $z = -3 - 4i$ *nell'espressione*

$$\frac{z|z| + i\overline{z}}{2i + \overline{z}},$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica. Fate la stessa cosa con $z = 4 - 3i$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.17.** *Determinate le soluzioni* (z, w), *con* $z, w \in \mathbb{C}$, *del sistema*

$$\begin{cases} (z - |w|)(iz + \overline{z}) = 0 \\ 2|w| - z - 2i = 2 + i(w - \overline{w}) \\ |z| = |w|. \end{cases}$$

➼ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.18.** *Determinate le soluzioni* (z, w)*, con* $z, w \in \mathbb{C}$*, del sistema*

$$\begin{cases} (w + |z|)(i\overline{w} + w) = 0 \\ 2|z| + w + 3i = 3 + z + \overline{z} \\ |z| = |w|. \end{cases}$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.19.** *Ridurre nella forma* $z = a+ib$ *e disegnare nel piano di Gauss i seguenti numeri complessi*

$$(a)(-1 - i)^3 \qquad (b)(1 + \sqrt{3}i)^3 \qquad (c)(-1 + i)^3 \qquad (d)(\sqrt{3} + i)^3$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.20.** *a) Trovare le radici quadrate di* $8 + i$ *e disegnarle nel piano di Gauss.*

b) Trovare le radici cubiche dei seguenti numeri complessi e disegnarle nel piano di Gauss

$$\begin{array}{llll} 1) z = 1 & 2) z = i & 3) z = -1 & 4) z = -i \\ 5) z = -1 + i & 6) z = 1 + i & 7) z = 1 - i & 8) z = -1 - i \end{array}$$

c) Trovare le radici quarte dei seguenti numeri complessi e disegnarle nel piano di Gauss

$$\begin{array}{llll} 1) z = 1 & 2) z = i & 3) z = -1 & 4) z = -i \\ 5) z = 2 + i & 6) z = \sqrt{3} + 3i & & 7) z = 9 + i \end{array}$$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.21.** *Ridurre nella forma* $z = a+ib$ *e disegnare nel piano di Gauss il numero complesso* $(-1 - i)^5$

➾ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.22.** *Trovate i tre numeri complessi soluzione dell'equazione* $(z-1)^3 = 1$ *(suggerimento: risolvete prima* $w^3 = 1$*)*

➽ **R.**

✍ **Esercizio 3.6.23.** *Sia* E *il sottoinsieme del piano complesso* $\mathbb{C}$ *definito da*

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$$

Disegnate l'insieme E *e anche l'insieme* F *definito da*

$$F = \{z \in \mathbb{C} : iz \in E\}$$

➽ **R.**