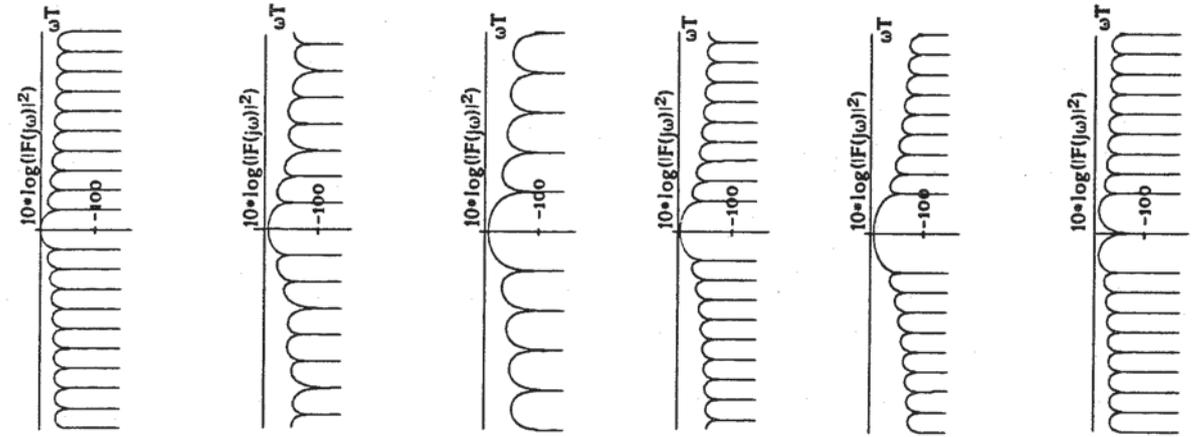
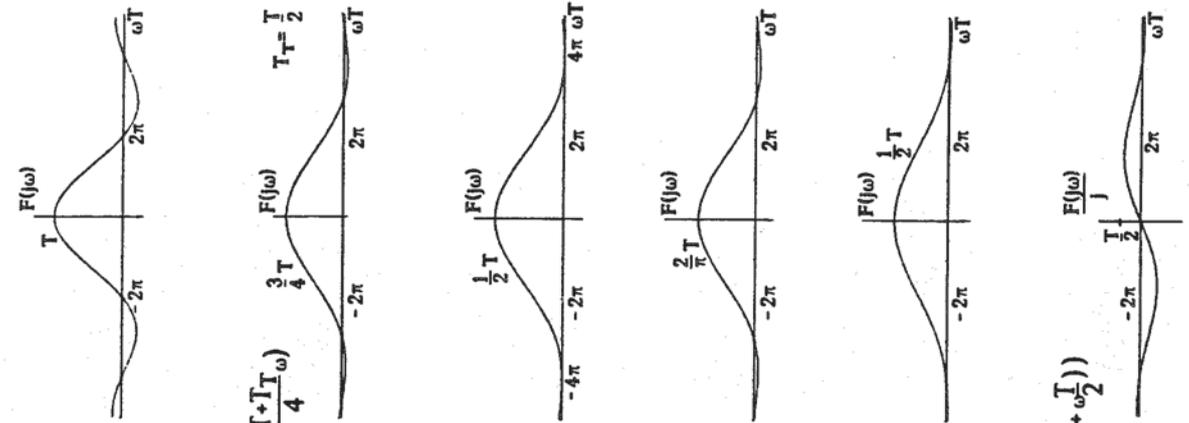


Impulse der Nachrichtentechnik und ihre
Fourier-Transformierten

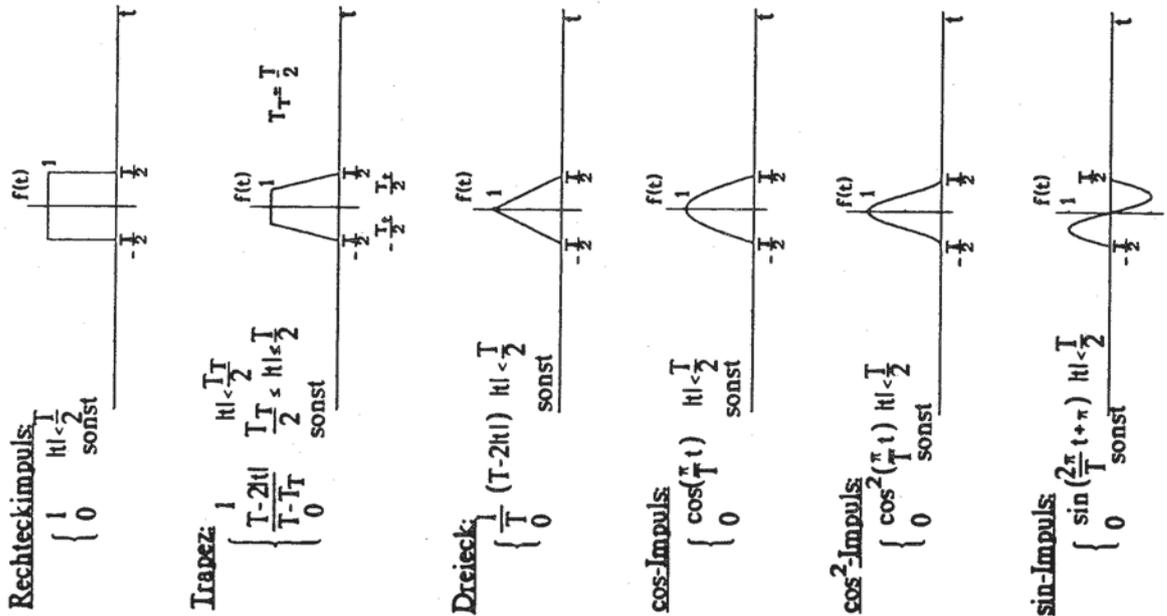
$10 \cdot \log(|F(j\omega)|^2)$



$F(j\omega)$



$f(t)$



Rechteckimpuls:
 $\begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Trapez:
 $\begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ \frac{T-2|t|}{T-T} & \frac{T}{2} < |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dreieck:
 $\begin{cases} \frac{T-2|t|}{T} & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

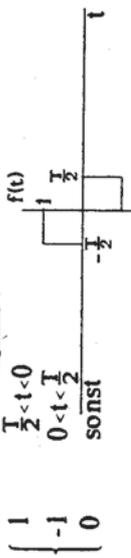
cos-Impuls:
 $\begin{cases} \cos^2(\frac{\pi}{T}t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

cos²-Impuls:
 $\begin{cases} \cos^2(\frac{\pi}{T}t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

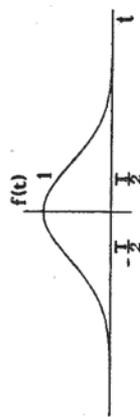
sin-Impuls:
 $\begin{cases} \sin(\frac{2\pi}{T}t + \pi) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f(t)$

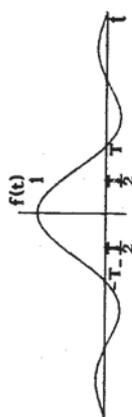
Doppelter Rechteckimpuls:



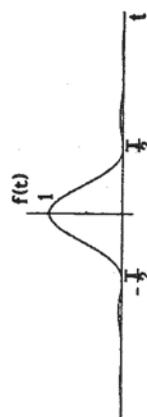
Gauss-Impuls:
 $e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{T})^2}$



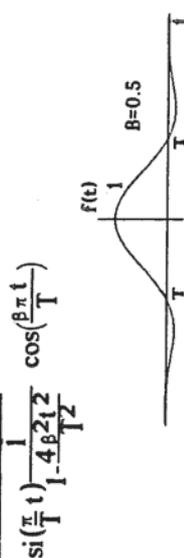
si-Impuls:
 $\text{si}(\frac{\pi}{T}t)$



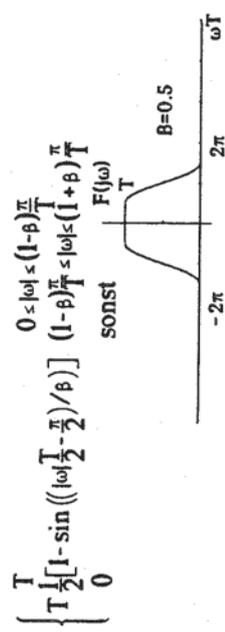
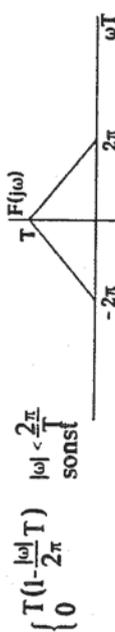
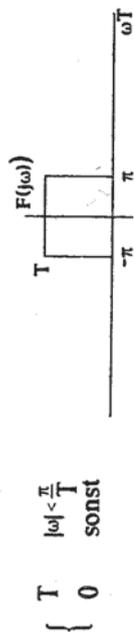
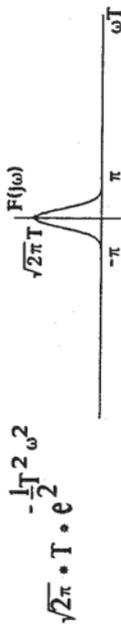
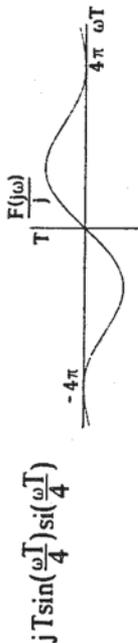
si²-Impuls:
 $\text{si}^2(\frac{\pi}{T}t)$



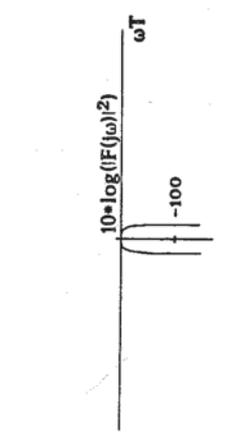
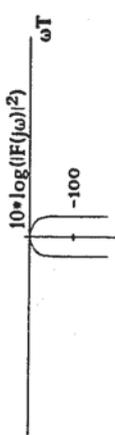
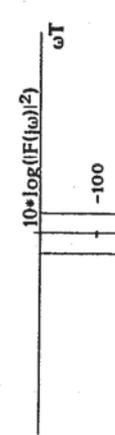
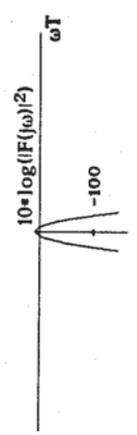
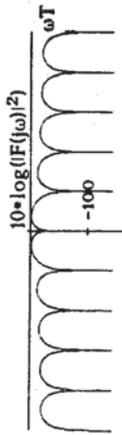
cos-Roll-Off-Impuls:



$F(j\omega)$



$10 \cdot \log(|F(j\omega)|^2)$



1. Modell des additiven weißen gaußverteilten Rauschen

Rauschen kann in der Praxis häufig als einem Nutzsignal $m(t)$ additiv überlagert angenommen werden (eine Ausnahme hiervon ist z.B. Phasenrauschen). Ein rauschbehaftetes System - z.B. eine Antenne oder ein Eingangsverstärker in einem Empfänger - ist dann zerlegbar in eine Rauschquelle und ein ideales nichtrauschendes System, Abbildung 1:



Abb. 1: Darstellung eines rauschenden Systems

Das Rauschsignal $n(t)$ ist ein Zufallsprozeß, dessen statistische Parameter in der Regel als zeitunabhängig angenommen werden können. Damit ist $n(t)$ ein stationärer Prozeß. Weiterhin kann $n(t)$ häufig als gaußverteilt und mittelwertfrei betrachtet werden, so daß sich für die Dichtefunktion $f_n(x)$ ergibt:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}} \quad (1)$$

Hierbei ist $\sigma_n^2 = E[n^2]$ die Varianz und damit die Leistung des mittelwertfreien Rauschsignals. Für die wichtigsten Rauschursachen ist $n(t)$ näherungsweise weiß, die spektrale Leistungsdichte (SLD) $\Phi_{nn}(j\omega)$ also konstant:

$$\Phi_{nn}(j\omega) = N_0 \quad \forall \omega \quad (2)$$

Somit ergibt sich für die Autokorrelationsfunktion (AKF) $\varphi_{nn}(\tau)$:

$$\varphi_{nn}(\tau) = \text{IFT}\{\Phi_{nn}(j\omega)\} = N_0 \delta(\tau) \quad (3)$$

Damit folgt formal eine unbegrenzte mittlere Rauschleistung $E[n^2]$:

$$E[n^2] = \sigma_n^2 = \varphi_{nn}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{nn}(j\omega) d\omega = \infty \quad (4)$$

Tatsächlich ist die (Rausch-) Bandbreite aller realen Systeme z.B. durch Filter beschränkt, so daß auch die Rauschleistung stets endliche Werte annimmt.

Rauschen (noise), das die hier skizzierten Eigenschaften (additiv, weiß, gaußverteilt) aufweist, wird häufig als AWGN abgekürzt, [1].

2. AWGN im Bandpaßbereich

Betrachtet wird im folgenden weißes gaußverteiltes Rauschen mit der SLD $\Phi_{nn}(j\omega) = N_0$. Durch Filterung mit einem reellen Bandpaßsystem mit der Mittenfrequenz f_c entsteht ein gaußverteilter Bandpaß-Rauschprozeß mit konstanter SLD innerhalb des Durchlaßbereiches mit der Bandbreite B, Abbildung 2.

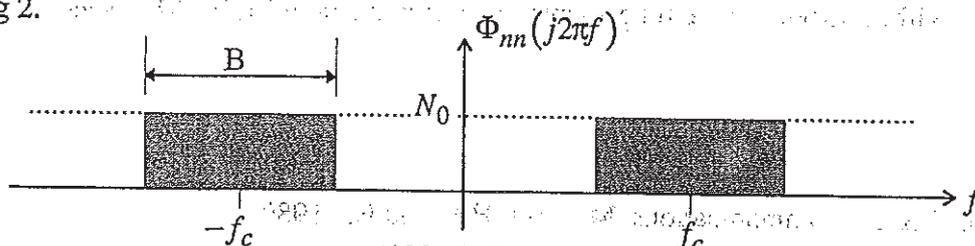


Abb. 2: Bandpaßrauschen

Für die Rauschleistung S_n des Bandpaß-Prozesses ergibt sich dann:

$$S_n = \sigma_n^2 = 2BN_0 \quad (5)$$

Zu beachten ist hierbei, daß einige Quellen wie z.B. [1] die Angaben für $\Phi_{nn}(j\omega)$ und S_n auf einseitige Spektren beziehen, so daß dann die Werte für zweiseitige Spektren mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden müssen.

3. AWGN in äquivalenten Tiefpaßbereich

Es sollen nun die Eigenschaften des äquivalenten Tiefpaß-Prozesses von weißem, nicht bandbegrenztem Rauschen dargestellt werden. Dieser ist gegeben durch:

$$n_T(t) = n_{TR}(t) + jn_{TI}(t) = [n(t) + j\hat{n}(t)] e^{-j\omega_c t} \quad (6)$$

mit $\hat{n}(t)$ der Hilbert-Transformierten von $n(t)$, [2] und $n_{TR}(t), n_{TI}(t)$ den reellen Komponenten des Rausch-Prozesses $n_T(t)$.

Für die SLD $\Phi_{n_T n_T}(j\omega)$ gilt mit [3], Gl. (26), (27):

$$\Phi_{n_T n_T}(j\omega) = 2\Phi_{n_{TR} n_{TR}}(j\omega) + j2\Phi_{n_{TR} n_{TI}}(j\omega) \quad (7)$$

Für den geraden und ungeraden Anteil von $\Phi_{n_T n_T}(j\omega)$ gilt damit:

$$\Phi_{n_{TR} n_{TR}}(j\omega) = \frac{1}{4} [\Phi_{n_T n_T}(j\omega) + \Phi_{n_T n_T}(-j\omega)] \quad (8)$$

$$\Phi_{n_{TR} n_{TI}}(j\omega) = \frac{-j}{4} [\Phi_{n_T n_T}(j\omega) - \Phi_{n_T n_T}(-j\omega)] \quad (9)$$

Mit [3] ergibt sich für die SLD von $n_T(t)$:

$$\Phi_{n_T n_T}(j\omega) = \begin{cases} 4N_0 & \text{für } \omega > -\omega_c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (10)$$

Entsprechend ergibt sich für den geraden und ungeraden Anteil, [3]:

$$\Phi_{n_{TR} n_{TR}}(j\omega) = \begin{cases} 2N_0 & \text{für } |\omega| < \omega_c \\ N_0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (11)$$

$$\Phi_{n_{TR} n_{TI}}(j\omega) = \begin{cases} jN_0 & \text{für } \omega < -\omega_c \\ 0 & \text{für } |\omega| < \omega_c \\ -jN_0 & \text{für } \omega > \omega_c \end{cases} \quad (12)$$

Diese Verhältnisse veranschaulicht Abbildung 3:

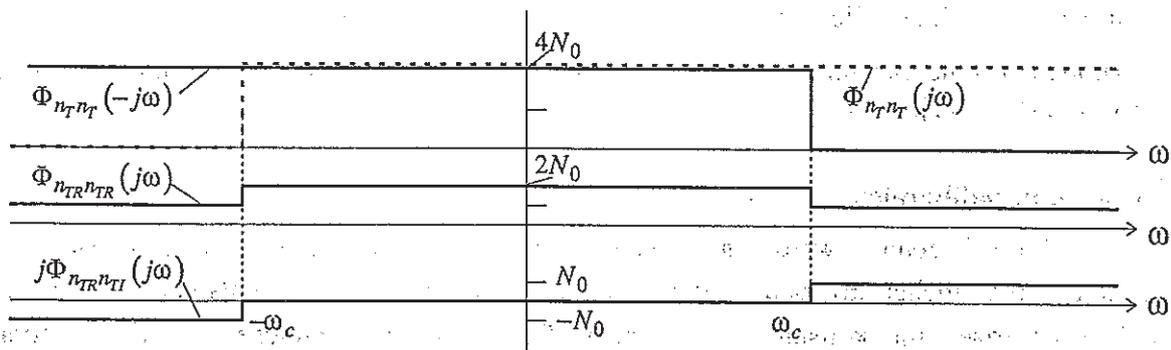


Abb. 3: Spektrale Leistungsdichten von äquivalentem Tiefpaß-Rauschen

Literatur:

[1] Proakis, J.G., Digital Communications, McGraw-Hill, 2nd Ed. 1989

[2] Arbeitsblatt 186, Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik, Universität Hannover

[3] Arbeitsblatt 187, Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik, Universität Hannover

1. Rauschursachen

Rauschen entsteht in aktiven und passiven Elementen z.B. von Übertragungssystemen. Besonders empfindlich dagegen sind Eingangsverstärkerstufen, da hier üblicherweise die Nutzsignale sehr schwach sind und entsprechend stark gestört werden können. Die wichtigsten Rauschursachen, die ein Übertragungssystem beeinträchtigen, sind Widerstands- oder thermisches Rauschen sowie Schrot-rauschen.

2. Thermisches Rauschen

Thermisches Rauschen entsteht z.B. durch die Wechselwirkung freier Elektronen in Leitern mit den schwingenden Molekülen des Leitermaterials. Es läßt sich zeigen, daß thermisches Rauschen eine Eigenschaft aller passiven Systeme ist, also z.B. von Widerständen, elektromechanischen Filtern, Antennen usw. (das Rauschen an Antenneneingängen infolge von Schwarzkörperstrahlung ist thermisches Rauschen).

Bis zu einer Frequenz von etwa 10^{13} Hz kann thermisches Rauschen als weiß betrachtet werden. 1928 fanden Johnson und Nyquist für die Rauschleistung innerhalb einer Bandbreite $|f| < \Delta f$ an einem Widerstand R :

$$E[u^2(t)] = \overline{u^2} = 4kTR\Delta f \tag{1}$$

mit der Boltzmann-Konstanten $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K und der absoluten Temperatur T in Kelvin. Für die spektrale Leistungsdichte (SLD) der Spannung $u(t)$ am Widerstand ergibt sich somit:

$$\Phi_{uu}(j2\pi f) = \frac{E[u^2(t)]}{2\Delta f} = 2kTR = N_0 \tag{2}$$

Oberhalb von 10^{13} Hz - optische Nachrichtentechnik - müssen quantenmechanische Effekte berücksichtigt werden, so daß allgemein für die SLD $\Phi_{uu}(j\omega)$ gilt:

$$\Phi_{uu}(j2\pi f) = 2 \left[\frac{hf}{2} + \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \right] R \tag{3}$$

mit dem Planckschen Wirkungsquantum $h = 6,6257 \cdot 10^{-34}$ J/s. Der Term $\frac{hf}{2}$ ist für $f \ll kT/h \approx 10^{13}$ Hz vernachlässigbar, woraus sich dann (2) ergibt.

Für einen rauschenden Widerstand entsprechend (1) lassen sich die Ersatzschaltungen in Abbildung 1 angeben:

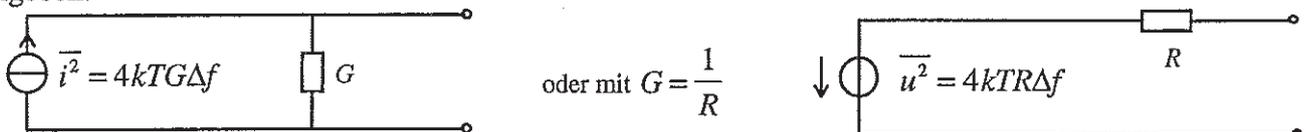


Abb. 1: Ersatzschaltbilder für einen rauschenden Widerstand

Hieraus folgt die maximal innerhalb einer Bandbreite $|f| < \Delta f$ entnehmbare physikalische Rauschleistung P_{Nmax} . Diese ergibt sich bei Leistungsanpassung gemäß Abbildung 2:

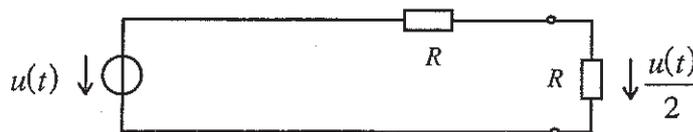


Abb. 2: Leistungsanpassung an einem rauschenden Widerstand

$$P_{N\max}(\Delta f) = \frac{E\left[\left(\frac{u}{2}\right)^2\right]}{R} = \frac{E[u^2]}{4R} = kT\Delta f \quad (4)$$

3. Schrotrauschen

Schrotrauschen ist generell mit einem Teilchenfluß verbunden. Es entsteht durch zufällige Fluktuation innerhalb eines mittleren Partikelstromes. Beispiele finden sich in allen aktiven Bauelementen, etwa pn-Übergängen in Dioden oder Transistoren oder Anoden-Kathoden-Strecken in Röhren.

Schrotrauschen kann i.a. für Frequenzen $f < \Delta f$ als weiß angenommen werden. Werden einer Schrotrauschquelle nachgeschaltete Systeme betrachtet (z.B. Filter oder Verstärker), so gilt die Annahme weißen Rauschens, solange deren Bandbreite $B < \Delta f$ ist. Hierbei ist Δf ein Frequenzbereich, der sich durch

$$\Delta f \ll \frac{1}{\tau} \quad (7)$$

ergibt, mit τ der Zeitdauer, die ein Elektron zum Durchgang durch den pn-Übergang (entsprechend bei Röhren zum Überwinden der Kathoden-Anoden-Strecke) benötigt.

Für einen mittleren (Gleich-) Strom I_{DC} , z.B. an einem pn-Übergang, ergibt sich die Rauschleistung des Rauschstromes $i(t)$ in einem Frequenzintervall $|f| < B$:

$$E[i^2(t)] = \overline{i^2} = 2eI_{DC}B \quad (5)$$

mit der Elementarladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ As. Hieraus folgt die SLD des Rauschstromes:

$$\Phi_{ii}(j\omega) = \frac{E[i^2(t)]}{2B} = eI_{DC} = N_0 \quad (6)$$

Für ein nachgeschaltetes lineares System mit der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ ergibt sich also für die SLD des Ausgangssignals $\tilde{i}(t)$:

$$\Phi_{\tilde{i}\tilde{i}}(j\omega) = \Phi_{ii}(j\omega) \cdot |H(j\omega)|^2 = eI_{DC} |H(j\omega)|^2 \quad (8)$$

Für die Gesamt-Rauschleistung am Systemausgang ergibt sich entsprechend:

$$E[\tilde{i}^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\tilde{i}\tilde{i}}(j\omega) d\omega = \frac{eI_{DC}}{\pi} \int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (9)$$

Literatur

- [1] Schwartz, M.: Information Transmission, Modulation and Noise, 2nd Ed, McGraw-Hill, 1970

1 Voraussetzungen

Im Empfänger für ein lineares Modulationsverfahren wird ein einzelner Impuls betrachtet. Alle Störungen werden als im weiteren Sinne stationäres (WSS), additives weißes gaußsches Rauschen (AWGN) mit der spektralen Leistungsdichte

$$\Phi_{nn}(j\omega) = N_0 \tag{1}$$

angenommen. Das entsprechende Blockschaltbild zeigt Bild 1. Das Nutzsignal $m(t)$ wird dabei zusammen mit dem additiven Rauschen $n(t)$ einem Empfangsfilter $h_E(t)$ zugeführt. Am Filterausgang wird das Summensignal $y(t)$ an den Zeitpunkten $t_a + kT$ abgetastet und anschließend in einem Entscheider ausgewertet. Die verwendete Sendeimpulsform sei $s(t)$. Da die einfache Abtastung des Impulses aufgrund des additiven Rauschens kritisch ist (Bild 2), soll der Impuls im Empfänger zunächst gefiltert werden, um möglichst die gesamte Impulsenergie zu erfassen und den Einfluss des Rauschens zu vermindern. Gesucht ist die Stoßantwort $h_E(t)$ bzw. die Systemfunktion $H_E(j\omega)$ des Filters, das diese Forderungen optimal erfüllt. Aus Gründen der Allgemeinheit werden $s(t)$ und $h_E(t)$ als komplex angenommen.

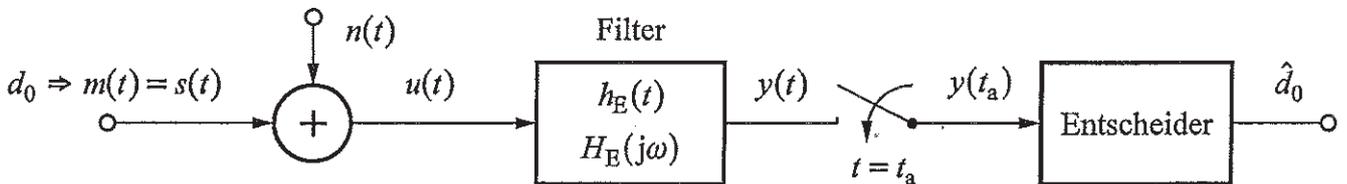


Bild 1: AWGN-Kanal und Empfänger

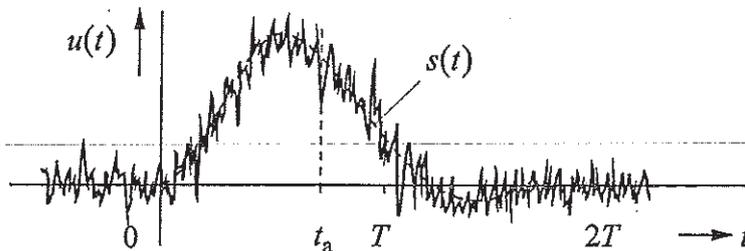


Bild 2: Abtastung eines durch Rauschen gestörten Impulses

2 Signaldarstellung

Für das Sendesignal gilt bei Vernachlässigung von Dämpfung oder Verstärkung:

$$m(t) = \sum_k d_k s(t - kT) . \tag{2}$$

Am Filterausgang werden die Größen $g(t)$ und $n_E(t)$ definiert als

$$m(t) \rightarrow g(t) = m(t) * h_E(t) , \tag{3}$$

$$n(t) \rightarrow n_E(t) = n(t) * h_E(t) . \tag{4}$$

Damit gilt:

$$y(t) = g(t) + n_E(t) . \tag{5}$$

Als Kriterium für die Optimierung werden die Augenblicksleistungen S bzw. N von Signal $g(t)$ und Rauschen $n_E(t)$ am Filterausgang zum Zeitpunkt t_a verwendet. Es gilt dann für ein einzelnes Symbol, also z.B. mit $d_k = 0$ für $k \neq 0$ und $d_0 = 1$:

$$S = |g(t_a)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_E(\tau) s(t_a - \tau) d\tau \right|^2 . \tag{6}$$

Mit
$$\Phi_{n_E n_E}(j\omega) = \Phi_{nn}(j\omega) |H_E(j\omega)|^2 = N_0 |H_E(j\omega)|^2 \quad (7)$$

folgt
$$N = E[|n_E(t_a)|^2] = E[|n_E|^2] = \varphi_{n_E n_E}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n_E n_E}(j\omega) d\omega \quad (8)$$

und damit
$$N = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_E(j\omega)|^2 d\omega \stackrel{\text{Parseval}}{=} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |h_E(t)|^2 dt. \quad (9)$$

3 Das Optimalfilter

Die Stoßantwort ist optimal, wenn das Verhältnis der Augenblicksleistungen von Signal und Rauschen zum Abtastzeitpunkt maximal wird. Es ist also zu fordern:

$$\frac{S}{N} = \frac{|g(t_a)|^2}{E[|n_E|^2]} \stackrel{!}{=} \max. \quad (10)$$

Mit (6) und (9) folgt
$$\frac{S}{N} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} h_E(t) s(t_a - t) dt \right|^2}{N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |h_E(t)|^2 dt} \quad (11)$$

Die Erweiterung von (11) mit der Energie E_G des Grundimpulses $s(t)$,

$$E_G = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t_a - t)|^2 dt, \quad (12)$$

führt auf
$$\frac{S}{N} = \frac{E_G}{N_0} \cdot \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} h_E(t) s(t_a - t) dt \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |h_E(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s(t_a - t)|^2 dt} \quad (13)$$

Darauf wird die Schwarzsche Ungleichung in der Form

$$\frac{|(x, y)|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \leq 1 \quad (14)$$

angewandt, wobei Skalarprodukt (x, y) und Norm $\|x\|$ komplexer Funktionen $x(t), y(t)$ erklärt sind durch

$$(x, y) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt, \quad \|x\|^2 := (x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (15)$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen, also maximales Verhältnis von Zähler zu Nenner, für

$$x(t) = K y(t) \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Mit $x(t) \hat{=} h_E(t)$ und $y^*(t) \hat{=} s(t_a - t)$ folgt aus (13), (14) und (16) unmittelbar

$$\boxed{h_E(t) = K s^*(t_a - t)}. \quad (17)$$

Das Filter mit der Stoßantwort $h_E(t)$ nach (17) heißt Optimalfilter, angepasstes Filter oder englisch matched filter. Entsprechende Empfänger heißen Korrelationsempfänger. Der Abtastzeitpunkt t_a ist beliebig wählbar, beeinflusst aber die Kausalität des Filters. $h_E(t)$ ist an die am Empfänger anliegende Impulsform anzupassen, d.h. eine mögliche Einwirkung des Übertragungskanal ist zu berücksichtigen.

Damit gilt
$$\boxed{\frac{S}{N} \Big|_{\max} = \frac{E_G}{N_0}}. \quad (18)$$

4 Literatur

[1] Schwartz, M.: Information Transmission, Modulation and Noise, 4th ed. 1990, McGraw-Hill.

1 Zur Kausalität

Für das Optimalfilter einer nur durch additives weißes Rauschen gestörten Übertragung mit der Grundimpulsform $s(t)$ und dem Abtastzeitpunkt t_a gilt [1]:

$$h_E(t) = K s^*(t_a - t) . \tag{1}$$

Das Filter kann *nichtkausal* werden (Bild 1). Es ist nur dann *kausal*, wenn $s(t) \equiv 0$ für $t > t_a$ gilt.

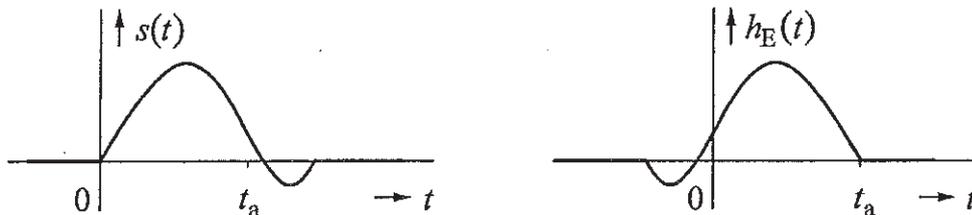


Bild 1: Zur Kausalität des Optimalfilters

Die aus der Nichtkausalität theoretisch resultierende Nichtrealisierbarkeit spielt aber in der Praxis keine Rolle, da entweder das Optimalfilter kausal approximiert wird oder aber durch entsprechendes Verzögern des Eingangssignals das Filter kausal gemacht werden kann. Daher wird in der Literatur häufig auch das Optimalfilter in nichtkausaler Form für $t_a = 0$ angegeben:

$$h_E(t) = K s^*(-t) . \tag{2}$$

2 Zur Bezeichnung „Korrelationsempfänger“

Bei Erregung des Optimalfilters mit dem Grundimpuls $s(t)$ ohne Berücksichtigung des Rauschens ergibt sich mit (1)

$$s(t) \rightarrow g(t) = s(t) * K s^*(t_a - t) = K \int_{-\infty}^{\infty} s(u) s^*(t_a - t + u) du = K \tilde{\varphi}_{ss}^*(t_a - t) . \tag{3}$$

Hierbei ist
$$\tilde{\varphi}_{ss}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(u) s(u+t) du \tag{4}$$

die Autokorrelationsfunktion (AKF) für Signale mit beschränkter Energie, auch *Impuls-AKF* oder *Energie-AKF* genannt. Wegen der Eigenschaft $\tilde{\varphi}_{ss}^*(t) = \tilde{\varphi}_{ss}(-t)$ erhält man

$$g(t) = K \tilde{\varphi}_{ss}(t - t_a) . \tag{5}$$

Für das Ausgangssignal $g(t)$ zum Zeitpunkt t_a ergibt sich

$$g(t_a) = K \tilde{\varphi}_{ss}(0) . \tag{6}$$

Das optimale Empfangsfilter (Matched Filter) wirkt also wie ein *Korrelator*. Aus (5) bzw. (6) leitet sich die Bezeichnung *Korrelationsempfänger* ab.

Die Gleichungen (5) und (6) gelten für jede beliebige Lage des Abtastzeitpunktes t_a , also auch für den in (2) angenommenen nichtkausalen Fall $t_a = 0$. Dann ist

$$g(t) = K \tilde{\varphi}_{ss}(t) \tag{7}$$

und

$$g(0) = K \tilde{\varphi}_{ss}(0) . \tag{8}$$

$\tilde{\varphi}_{ss}(0)$ ist das Maximum von $|\tilde{\varphi}_{ss}(t)|$ mit

$$\tilde{\varphi}_{ss}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = E_G . \tag{9}$$

Damit ergibt sich für das Korrelator-Ausgangssignal $g(t)$ für $t = t_a$:

$$g(t_a) = K E_G = \sqrt{S} . \quad (10)$$

Für das maximale Verhältnis von Signal- zu Rauschleistung ergibt sich [1]

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\max} = \frac{E_G}{N_0} . \quad (11)$$

In der Regel verändert der Kanal die Form des Sendeimpulses. In diesem Fall ist statt der Energie E_G des Grundimpulses die tatsächlich am Empfänger eintreffende Symbolenergie E_S einzusetzen:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\max} = \frac{E_S}{N_0} . \quad (12)$$

3 Korrelationsempfänger im Frequenzbereich

Aus den beiden Beziehungen der Fourier-Transformation

$$f^*(-t) \circ \rightarrow F^*(j\omega) \quad (13)$$

und

$$f(t-\tau) \circ \rightarrow F(j\omega)e^{-j\omega\tau} \quad (14)$$

sowie mit (1)

$$h_E(t) = K s^*(t_a - t) = s^*(-[t - t_a]) \quad (15)$$

folgt unmittelbar

$$h_E(t) \circ \rightarrow H_E(j\omega) = K S^*(j\omega) e^{-j\omega t_a} . \quad (16)$$

Insbesondere ergibt sich für den nichtkausalen Fall $t_a = 0$

$$H_E(j\omega) = K S^*(j\omega) . \quad (17)$$

4 Literatur

[1] AB 181, Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik, Universität Hannover

Eine in der Praxis - zumindest näherungsweise - sehr häufig beobachtete Dichtefunktion für Zufallsvariablen und -prozesse ist die Gaußsche Dichtefunktion (auch als Normalverteilung bezeichnet). Mit der Varianz σ_ξ^2 und dem Erwartungswert $\bar{x} = E[\xi]$ der Zufallsvariablen ξ lautet sie:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\xi} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_\xi^2}} \quad (1)$$

Im folgenden wird eine mittelwertfreie Normalverteilung ($\bar{x} = 0$) mit der Varianz $\sigma_\xi^2 = 1$ betrachtet. $f_\xi(x)$ vereinfacht sich also zu:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2)$$

Die Fläche unter dieser sogenannten Gaußkurve ist 1, wobei 99,7 % dieser Fläche im Intervall [-3,3] liegen (Bild 1):

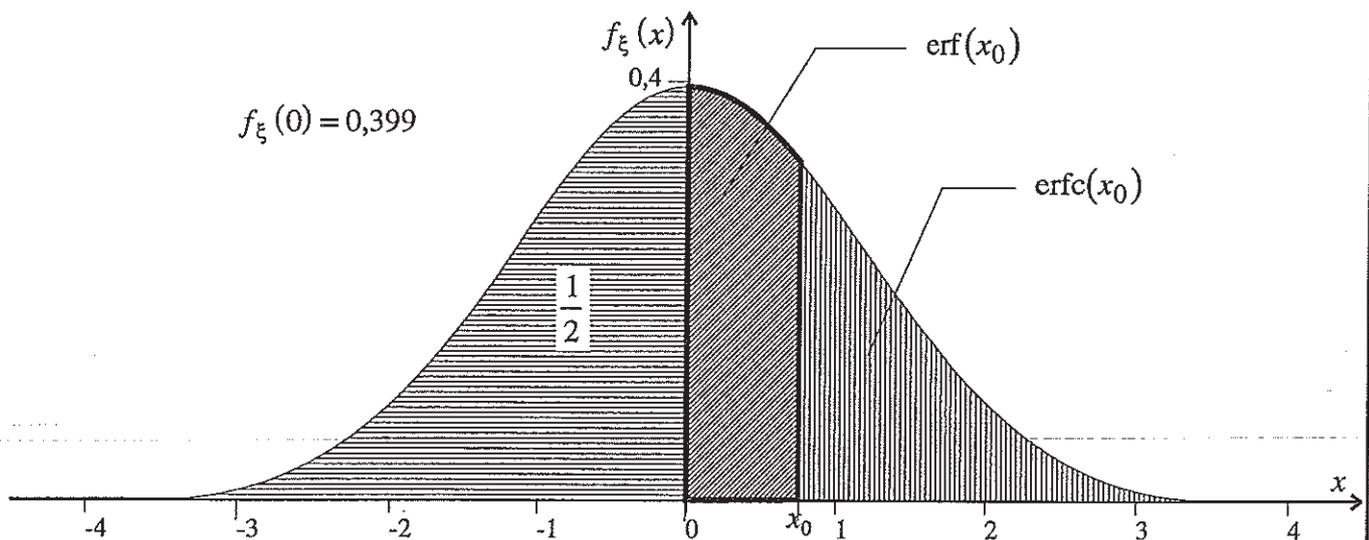


Bild 1: Zentrierte Normalverteilung mit $\sigma^2 = 1$

Die zu $f_\xi(x)$ gehörige Verteilungsfunktion $F_\xi(x)$ lautet:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (3)$$

Das Integral ist nicht analytisch lösbar. Daher werden die Fehlerfunktion $\text{erf}(x)$ und die Komplementäre Fehlerfunktion $\text{erfc}(x)$ eingeführt, die aus Tabellenwerken entnommen oder numerisch approximiert werden können. Dabei wird in [2] $\text{erf}(x)$ mit $\Phi_0(x)$ bezeichnet. Es gilt:

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} + \text{erf}(x) = \text{erfc}(-x) \quad (5)$$

$$= 1 - \text{erfc}(x) \quad (6)$$

Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x)$ (ERrorFunction) und Komplementäre Fehlerfunktion $\operatorname{erfc}(x)$ (ERrorFunction Complementary) sind dabei definiert als:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (7)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2} - \operatorname{erf}(x) \quad (8)$$

Die Funktionswerte sind als Flächen in Bild 1 für einen Wert x_0 dargestellt. Den Zusammenhang zwischen $F_{\xi}(x)$, $\operatorname{erf}(x)$ und $\operatorname{erfc}(x)$ verdeutlicht nochmals Bild 2:

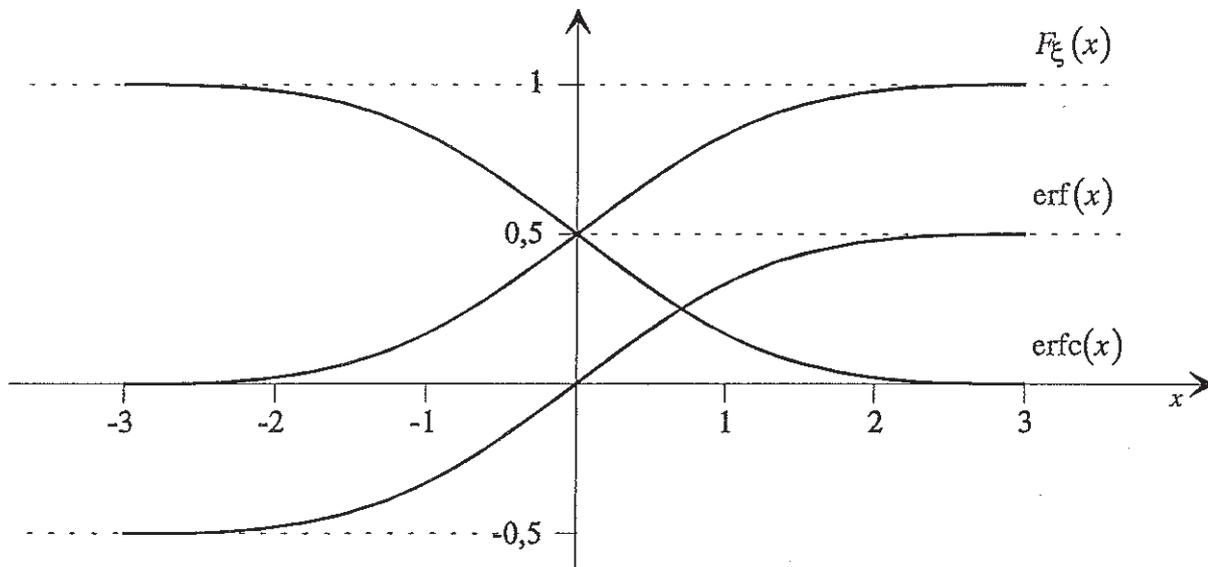


Bild 2: Verteilungsfunktion zur zentrierten Normalverteilung, Fehlerfunktion und kompl. Fehlerfunktion

Offensichtlich gilt auch stets der Zusammenhang (vergleiche (8) und Bild 1):

$$\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{2} \quad (9)$$

Verschiedene Autoren [3, 4] definieren die Fehlerfunktion anders:

$$\operatorname{ERF}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \quad (10)$$

$$\operatorname{ERFC}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy \quad (11)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\operatorname{ERF}(x) + \operatorname{ERFC}(x) = 1 \quad (12)$$

$$\operatorname{ERF}(x) = 2 \operatorname{erf}(\sqrt{2} x) \quad (13)$$

$$\operatorname{ERFC}(x) = 2 \operatorname{erfc}(\sqrt{2} x) \quad (14)$$

- Lit.:** [1] Papoulis, A.: Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill, 1965
 [2] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 21. Auflage. Teubner, 1985
 [3] Abramowitz, M., Segun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions. Dover, 1965
 [4] Schwartz, M.: Information Transmission, Modulation and Noise. 2nd Ed. McGraw-Hill, 1970

1 Reelles Bandpass-Signal

Betrachtet wird ein reelles Bandpass-Signal $x(t)$, dessen Spektrum $X(j\omega)$ bei Frequenzen $\omega = \pm\omega_c$ mit $\omega_c \neq 0$ konzentriert ist. Abb. 1 zeigt ein Beispiel.

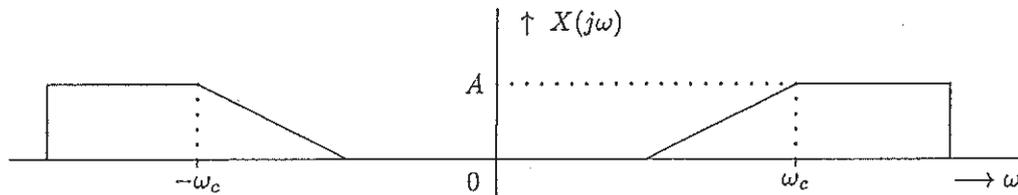


Abb. 1: Fourier-Transformierte eines Bandpass-Signals

2 Analytisches Signal

Aus dem reellen Bandpass-Signal $x(t)$ lässt sich in einem ersten Schritt mit Hilfe der Hilbert-Transformation das analytische Signal $x_+(t)$ gewinnen [1, 2]:

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (1)$$

mit

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)}{t-s} ds = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (2)$$

der Hilbert-Transformierten von $x(t)$ und $1/\pi t = h_{HT}(t)$ der Stoßantwort des Hilbert-Transformators. Damit gilt offenbar:

$$x(t) = \text{Re} \{x_+(t)\} \quad (3)$$

Aus $h_{HT}(t)$ lässt sich mit Hilfe der Korrespondenz

$$\varepsilon(t) \circ \bullet \pi\delta(\omega) - \frac{j}{\omega} \quad (4)$$

sowie der allgemeinen Beziehung

$$f(t) \circ \bullet F(j\omega) \implies f(\omega) \bullet \circ \frac{1}{2\pi} F(-jt) \quad (5)$$

die Systemfunktion des Hilbert-Transformators $H_{HT}(j\omega)$ ableiten:

$$\varepsilon(\omega) \bullet \circ \frac{1}{2}\delta(-t) + \frac{j}{2\pi t} \quad (6)$$

$$\implies \frac{j}{2\pi t} \bullet \circ \varepsilon(\omega) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{sgn}(\omega) \quad (7)$$

oder

$$h_{HT}(t) = \frac{1}{\pi t} \bullet \circ H_{HT}(j\omega) = -j \text{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & \text{fr } \omega > 0 \\ j & \text{fr } \omega < 0 \end{cases} \quad (8)$$

mit $\text{sgn}(\omega)$ der Signum-Funktion. Somit lässt sich die Hilbert-Transformation im Spektralbereich beschreiben durch:

$$\hat{X}(j\omega) = X(j\omega) \cdot H_{HT}(j\omega) = \begin{cases} -jX(j\omega) & \text{fr } \omega > 0 \\ jX(j\omega) & \text{fr } \omega < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Die Systemfunktion des Hilbert-Transformators ist in Abb. 2 dargestellt, die resultierenden Spektren der Hilbert-Transformierten $\hat{X}(j\omega)$ und des analytischen Signals $X_+(j\omega)$ zeigt Abb. 3.

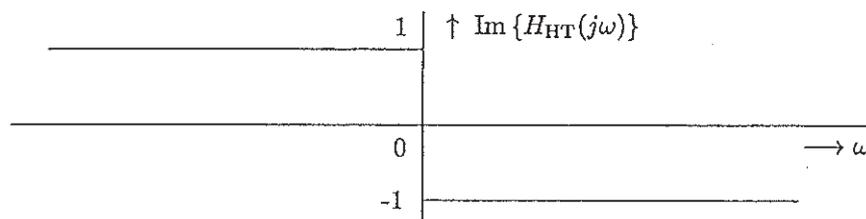


Abb. 2: Systemfunktion des Hilbert-Transformators

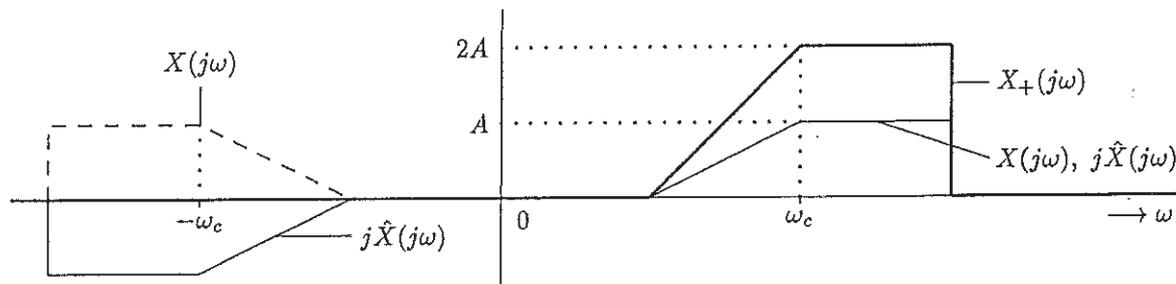


Abb. 3: Hilbert-Transformierte und analytisches Signal im Frequenzbereich

3 Äquivalentes Tiefpass-Signal oder komplexe Einhüllende

Durch Verschiebung des analytischen Signals aus dem Bandpass- in den Tiefpass-Bereich erhält man das äquivalente Tiefpass-Signal bzw. die komplexe Einhüllende $x_T(t)$:

$$x_T(t) = x_+(t)e^{-j\omega_c t} = [x(t) + j\hat{x}(t)]e^{-j\omega_c t} \quad (10)$$

Umgekehrt kann das Bandpass-Signal $x(t)$ durch Realteilbildung aus dem analytischen Signal gewonnen werden, so dass folgt:

$$x(t) = \text{Re}\{x_+(t)\} = \text{Re}\{x_T(t)e^{j\omega_c t}\} \quad (11)$$

Mit der Zerlegung der komplexen Einhüllenden $x_T(t)$ in die reellen Komponenten

$$x_T(t) = x_{\text{TR}}(t) + jx_{\text{TI}}(t), \quad x_{\text{TR}}(t), x_{\text{TI}}(t) \text{ reell} \quad (12)$$

ergibt sich für das Bandpass-Signal $x(t)$:

$$x(t) = \text{Re}\{[x_{\text{TR}}(t) + jx_{\text{TI}}(t)] \cdot [\cos \omega_c t + j \sin \omega_c t]\} \quad (13)$$

$$= x_{\text{TR}}(t) \cos \omega_c t - x_{\text{TI}}(t) \sin \omega_c t \quad (14)$$

Entsprechend zu Gl. (10) ergibt sich im Spektralbereich:

$$X_T(j\omega) = X_{\text{TR}}(j\omega) + jX_{\text{TI}}(j\omega) = X_+(j\omega + j\omega_c t) \quad (15)$$

$$X_+(j\omega) = X_T(j\omega - j\omega_c) \quad (16)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} [X_+(j\omega) + X_+^*(-j\omega)] = \frac{1}{2} [X_T(j\omega - j\omega_c) + X_T^*(-j\omega - j\omega_c)] \quad (17)$$

Hierbei ergeben sich die Komponenten $X_{\text{TR}}(j\omega)$, $X_{\text{TI}}(j\omega)$ als Fourier-Transformierte von $x_{\text{TR}}(t)$, $x_{\text{TI}}(t)$:

$$x_{\text{TR}}(t) \text{ } \circ \bullet \text{ } X_{\text{TR}}(j\omega), \quad x_{\text{TI}}(t) \text{ } \circ \bullet \text{ } X_{\text{TI}}(j\omega) \quad (18)$$

$X_{\text{TR}}(j\omega)$, $X_{\text{TI}}(j\omega)$ sind also i.a. komplex. Abb. 4 zeigt das Spektrum des äquivalenten Tiefpass-Signals.

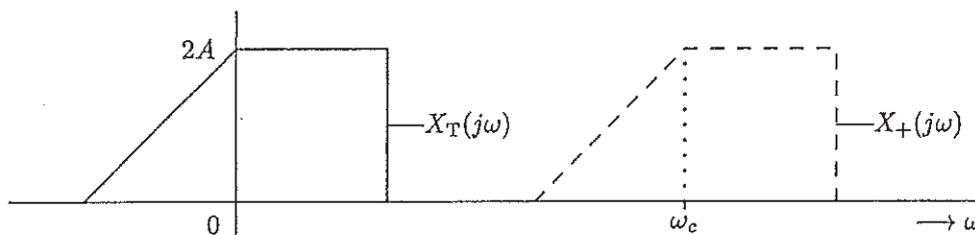


Abb. 4: Spektrum der komplexen Einhüllenden

4 Einhüllende

Den Betrag der komplexen Einhüllenden $x_T(t)$ bezeichnet man als Einhüllende (envelope) $x_E(t)$:

$$x_E(t) = |x_T(t)| = |x_+(t)| \quad (19)$$

Entsprechend gilt:

$$x_T(t) = x_E(t)e^{j\text{arc}\{x_T(t)\}} \quad (20)$$

Literatur:

- [1] Franks, L.E., *Signal Theory*, Prentice Hall, 1969
- [2] Kammeyer, K.D., *Nachrichtenübertragung*, 2. Aufl., Teubner, 1996

Korrelationsempfänger

Betrachtet wird ein Korrelationsempfänger für binäre unipolare Übertragung im Basisband. Störungen des Sendesignals $m(t)$ entstehen hier nur durch additives, weißes, gaußverteiltes Rauschen (AWGN) $n(t)$. Die Empfängerstruktur für das gestörte Signal $u(t)$ zeigt Abb. 1, hierbei ist der Block E der Entscheider.

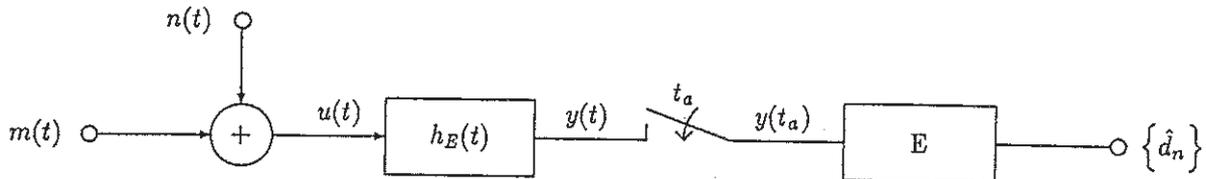


Abb. 1: Korrelationsempfänger im Basisband

Das Optimalfilter $h_E(t)$ für den Sendepuls $s(t)$ lautet [1]:

$$h_E(t) = K \cdot s(t_a - t) \quad (1)$$

Die spektrale Leistungsdichte $\Phi_{nn}(j\omega)$ des additiven weißen Rauschens ist gegeben durch [2]:

$$\Phi_{nn}(j\omega) = N_0 \quad (2)$$

Betrachtet wird im folgenden die Übertragung eines einzelnen Symbols d_0 mit $d_0 = A$. Dann gilt

$$y_A = y(t_a) = [u(t) * h_E(t)]_{t=t_a} = g(t_a) + n_E(t_a), \quad (3)$$

wobei $g(t_a)$ den Nutzanteil und $n_E(t_a)$ den Störanteil beschreiben. Für die Augenblicksleistung S_A am Filterausgang zum Abtastzeitpunkt T folgt:

$$S_A = g^2(t_a)|_{d_0=A} \quad (4)$$

Somit erhält man für den Erwartungswert des abgetasteten Filter-Ausgangssignals:

$$E[y_A] = E[g(t_a) + n_E(t_a)] = g(t_a) = \sqrt{S_A} \quad (5)$$

sofern mittelwertfreies Rauschen angenommen wird. Für die Varianz $\sigma_{y_A}^2$ des gestörten empfangenen Symbols folgt:

$$\sigma_{y_A}^2 = E[(y_A - E[y_A])^2] = E[n_E^2(t_a)] = N \quad (6)$$

y_A ist ebenfalls gaußverteilt, und die Dichtefunktion $f_{y_A}(x)$ lautet [3]:

$$f_{y_A}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-(x - \sqrt{S_A})^2 / 2N} \quad (7)$$

Hieraus ergibt sich durch Integration die Verteilungsfunktion $F_{y_A}(x)$ des rauschgestörten empfangenen Signals y_A :

$$F_{y_A}(x) = \int_{-\infty}^x f_{y_A}(\tau) d\tau = \text{erfc} \left(\frac{\sqrt{S_A} - x}{\sqrt{N}} \right) \quad (8)$$

mit der komplementären Fehlerfunktion $\text{erfc}(x)$ entsprechend [3].

Unipolare Übertragung

Bei unipolarer Übertragung kann A die (normierten) Werte 0 und 1 annehmen. Dann muß aufgrund der Varianz (6) eine Entscheiderregel für das Symbol d_0 bzw. das gestörte Empfangssignal y_A eingeführt werden:

$$\hat{d}_0 = \begin{cases} 1 & \text{für } y_A > C \\ 0 & \text{für } y_A \leq C \end{cases} \quad (9)$$

mit der Entscheiderschwelle C . Fehler treten immer dann auf, wenn auf 0 entschieden wird, *obwohl* eine 1 gesendet wurde und wenn auf 1 entschieden wird, *obwohl* eine 0 gesendet wurde. Die Wahrscheinlichkeiten für diese beiden Fehler ergeben sich also aus den Verteilungsfunktionen (8) zu:

$$P_{E1} = P(y_1 \leq C) = \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{S_1} - C}{\sqrt{N}} \right) \quad (10)$$

$$P_{E0} = P(y_0 > C) = \operatorname{erfc} \left(\frac{C}{\sqrt{N}} \right) \quad (11)$$

P_{E1}, P_{E0} sind die bedingten Fehlerwahrscheinlichkeiten, die unter der Bedingung des Sendens einer 1 bzw. 0 entstehen. Diese Wahrscheinlichkeiten sind als schraffierte Flächen unter den Dichtefunktionen $f_{y_1}(x)$ bzw. $f_{y_0}(x)$ in Abb. 2 dargestellt.

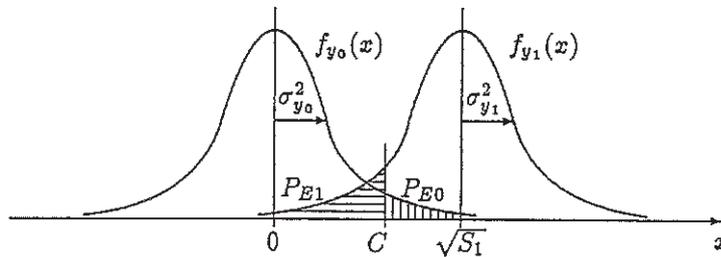


Abb. 2: Dichtefunktionen der beiden Symbolzustände

Die Gesamt-Fehlerwahrscheinlichkeit folgt durch die Gewichtung der bedingten Fehlerwahrscheinlichkeiten (10), (11) mit den Auftretenswahrscheinlichkeiten der beiden verschiedenen Symbole:

$$P_E = P(A = 1) \cdot P_{E1} + P(A = 0) \cdot P_{E0} \quad (12)$$

Für gleichwahrscheinliche Symbole, $P(A = 1) = P(A = 0) = 0,5$, ergibt sich:

$$P_E = \frac{1}{2} (P_{E1} + P_{E0}) \quad (13)$$

P_E entspricht in diesem Fall der mit dem Faktor 0,5 gewichteten gesamten schraffierten Fläche in Abb. 2. Diese Fläche wird minimal, wenn die Entscheiderschwelle C im Schnittpunkt der Dichtefunktionen $f_{y_1}(x)$ und $f_{y_0}(x)$ liegt. Für gleichwahrscheinliche Symbole folgt dann:

$$C_{\text{opt}} = \sqrt{S_1}/2 \quad (14)$$

Hieraus folgt mit (10), (11) die minimale Fehlerwahrscheinlichkeit $P_{E\text{min}}$ bei unipolarer Basisband-Übertragung:

$$P_{E\text{min}} = \operatorname{erfc} \sqrt{S_1/4N} \quad (15)$$

Mit [1] und der Empfangsenergie E_S des 1-Symbols folgt hieraus weiterhin die Beziehung

$$P_{E\text{min}} = \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_S}{N_0}} \right) \quad (16)$$

Literatur

- [1] Inst. f. Allgemeine Nachrichtentechnik, Universität Hannover, AB 182
- [2] Inst. f. Allgemeine Nachrichtentechnik, Universität Hannover, AB 179
- [3] Inst. f. Allgemeine Nachrichtentechnik, Universität Hannover, AB 183

Bipolare Übertragung

Betrachtet wird die bipolare Übertragung im Basisband. Empfangsstruktur, Optimalfilter und spektrale Leistungsdichte des additiven, weißen, gaußverteilten Rauschens ergeben sich entsprechend [1]. Das (betragsmäßig normierte) Symbol d_0 kann hier jedoch die Werte $A = \pm 1$ annehmen. Erwartungswert $E[y_1]$ und Dichtefunktion $f_{y_1}(x)$ für das Symbol $y_1 = y(t_a)|_{A=1}$ ergeben sich dann ebenfalls entsprechend [1]:

$$E[y_1] = E[g(t_a) + n_E(t_a)]_{A=1} = +\sqrt{S_1} \tag{1}$$

$$f_{y_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-(x-\sqrt{S_1})^2/2N} \tag{2}$$

Analog hierzu folgt für den Symbolwert $A = -1$:

$$E[y_{-1}] = E[g(t_a) + n_E(t_a)]_{A=-1} = -\sqrt{S_1} \tag{3}$$

$$f_{y_{-1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-(x+\sqrt{S_1})^2/2N} \tag{4}$$

Für die Varianz $\sigma_{y_{-1}}^2$ gilt wiederum:

$$\sigma_{y_{-1}}^2 = E[(y_{-1} - E[y_{-1}])^2] = N \tag{5}$$

Die Dichtefunktionen $f_{y_1}(x)$ und $f_{y_{-1}}(x)$ sind für die hier betrachtete bipolare Übertragung bei gaußverteiltem Rauschen in Abb. 1 dargestellt.

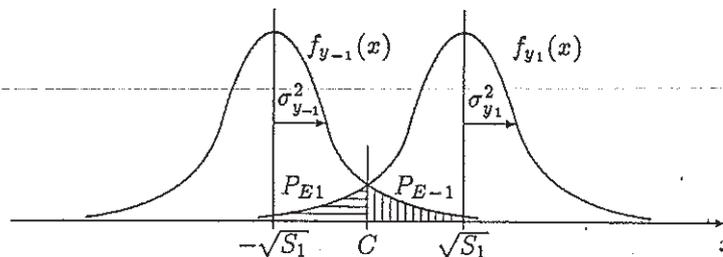


Abb. 1: Dichtefunktionen der beiden Symbolzustände

Entsprechend [1] werden auch hier Fehler verursacht, wenn bei einer gesendeten 1 auf -1 entschieden wird und umgekehrt. Diese bedingten Fehlerwahrscheinlichkeiten folgen dann aus den zu den Dichtefunktionen (2) und (4) gehörenden Verteilungsfunktionen der beiden Symbolzustände:

$$P_{E1} = P(y_1 \leq C) = \text{erfc} \left(\frac{\sqrt{S_1} - C}{\sqrt{N}} \right) \tag{6}$$

$$P_{E-1} = P(y_{-1} > C) = \text{erfc} \left(\frac{\sqrt{S_1} + C}{\sqrt{N}} \right) \tag{7}$$

Die Gesamt-Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich wiederum aus der Gewichtung der bedingten Fehlerwahrscheinlichkeiten (6), (7) mit den Auftretenswahrscheinlichkeiten der Symbole. Auch hier folgt dann die minimale Gesamt-Fehlerwahrscheinlichkeit, wenn die Entscheidungsschwelle C im Schnittpunkt der Dichtefunktionen $f_{y_1}(x)$ und $f_{y_{-1}}(x)$ der beiden Symbolzustände liegt. Dieser Fall ist in Abb.1 bereits skizziert. Bei bipolarer Übertragung folgt also:

$$C_{\text{opt}} = 0 \tag{8}$$

Für die Gesamt-Fehlerwahrscheinlichkeit bei gleichwahrscheinlichen Symbolen $P_E = 0,5(P_{E1} + P_{E-1})$ ergibt sich dann:

$$P_E = P_{E1} = P_{E-1} = \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{S_1}{N}} = \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_S}{N_0}} \quad (9)$$

Im Vergleich mit der unipolaren Übertragung [1] ergibt sich ein Faktor 4 in der Abzisse. Dies entspricht einer Verschiebung der Kurve der Fehlerwahrscheinlichkeit $P_E(E_S/N_0)$ für bipolare Übertragung um 6 dB gegenüber dem unipolaren Fall, und zwar zu niedrigerem Signal/Rausch-Leistungsverhältnis hin. Die Fehlerwahrscheinlichkeiten für unipolare und bipolare Übertragung im Basisband zeigt Abb. 2.

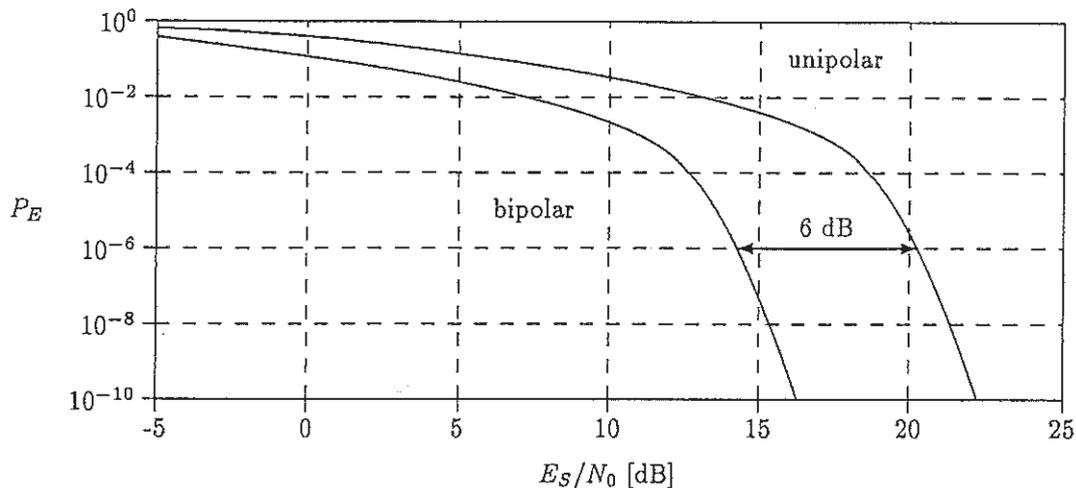


Abb. 2: Dichtefunktionen der beiden Symbolzustände

Anmerkungen zur Fehlerwahrscheinlichkeit

E_S ist die am Empfänger eintreffende Symbolenergie. Eine etwaige Dämpfung des Kanals muß darin berücksichtigt werden.

P_E hängt von E_S/N_0 ab und ist somit unabhängig von der Form des Grundimpulses $s(t)$. P_E ist ebenfalls unabhängig von der belegten Bandbreite.

Es wurde die *zweiseitige* Rauschleistungsdichte N_0 verwendet. Häufig wird jedoch die *einseitige* Rauschleistungsdichte betrachtet. Unterbleibt hier eine Anpassung der Rauschleistungsdichte durch $N_{0,\text{ein}} = 0,5N_{0,\text{zwei}}$, so folgt eine Verschiebung um 3 dB zu niedrigeren Werten von E_S/N_0 .

Bei unipolarer Übertragung wird P_E häufig auch über der *mittleren* Symbolenergie aufgetragen, also über $(E_S+0)/2$ bei gleichwahrscheinlichen Symbolen. Dies führt nochmals zu einer Verschiebung von $P_E(E_S/N_0)$ um 3 dB zu niedrigeren Werten von E_S/N_0 .

Insgesamt können also in der Literatur zwei unterschiedliche Darstellungen für identische bipolare und vier unterschiedliche Darstellungen für identische unipolare Übertragungen im Basisband angegeben werden. Dies ist beim Vergleich von Bitfehlerwahrscheinlichkeiten anhand von Literaturdaten zu berücksichtigen.

Literatur

[1] Inst. f. Allgemeine Nachrichtentechnik, Universität Hannover, AB 189

1 Grundlagen

Bei der Winkelmodulation (WM) ist die zu übertragende Information $f(t)$ im Winkel $\varphi(t)$ der Träger-schwingung enthalten. Damit lautet die Zuordnungsvorschrift für ein WM-System

$$f(t) \rightarrow g^{\text{WM}}(t) = A \cos \varphi^{\text{WM}}(t) . \tag{1}$$

Bei genügender Bandbegrenzung von $g^{\text{WM}}(t)$, die in der Regel gegeben ist, lautet das analytische Signal von $g^{\text{WM}}(t)$

$$g_+^{\text{WM}}(t) = A e^{j\varphi^{\text{WM}}(t)} \tag{2}$$

und das äquivalente Tiefpass-Signal (oder die komplexe Einhüllende)

$$g_T^{\text{WM}}(t) = g_+^{\text{WM}}(t) e^{-j\omega_0 t} = A e^{j\varphi_T^{\text{WM}}(t)} \tag{3}$$

mit der Trägerfrequenz $f_0 = \omega_0/2\pi$ und

$$\varphi_T^{\text{WM}}(t) := \varphi^{\text{WM}}(t) - \omega_0 t . \tag{4}$$

Praktisch werden zwei Formen der WM verwendet, nämlich Phasenmodulation (PM) und Frequenzmo-dulation (FM).

2 Phasenmodulation

Es wird definiert:

$$\varphi_T^{\text{PM}}(t) := \alpha_P f(t) \tag{5}$$

mit der Modulationskonstanten α_P . Mit (3) ergeben sich die komplexe Einhüllende

$$g_T^{\text{PM}}(t) = A e^{j\alpha_P f(t)} \tag{6}$$

und das reelle Bandpass-Signal

$$g^{\text{PM}}(t) = \text{Re} \{ g_T^{\text{PM}}(t) e^{j\omega_0 t} \} = A \cos [\omega_0 t + \alpha_P f(t)] . \tag{7}$$

3 Frequenzmodulation (FM)

Basisgröße ist die Augenblickskreisfrequenz

$$\Omega(t) := \frac{d\varphi(t)}{dt} . \tag{8}$$

Mit der Modulationskonstanten α_F wird damit definiert:

$$\Omega_T^{\text{FM}}(t) := \alpha_F f(t) , \tag{9}$$

und man erhält

$$\varphi_T^{\text{FM}}(t) = \alpha_F \int_0^t f(\tau) d\tau + \varphi_0 \tag{10}$$

sowie

$$g_T^{\text{FM}}(t) = A e^{j\varphi_0} e^{j\alpha_F \int_0^t f(\tau) d\tau} . \tag{11}$$

Für das reelle Bandpass-Signal ergibt sich

$$\Omega^{\text{FM}}(t) = \omega_0 + \alpha_F f(t) , \tag{12}$$

$$\varphi^{\text{FM}}(t) = \omega_0 t + \alpha_F \int_0^t f(\tau) d\tau + \varphi_0 \tag{13}$$

und damit

$$g^{\text{FM}}(t) = A \cos \left[\omega_0 t + \varphi_0 + \alpha_F \int_0^t f(\tau) d\tau \right] . \tag{14}$$

Hier wird also das Basisbandsignal integriert!