

Mathematik für Ingenieure I

Gruppenübung 8

Aufgabe 8.1 Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad a_n &= \frac{n - \sin(n)}{3n - 4} & \text{(b)} \quad a_n &= \sqrt[n]{2^n + 5^n + 8^n} & \text{(c)} \quad a_n &= \frac{7n^2 + 2n + 1}{3n^2 - 2} \\ \text{(d)} \quad a_n &= \frac{2^n}{n} & \text{(e)} \quad a_n &= \frac{n}{3^n} & \text{(f)} \quad a_n &= \frac{(n+2)! - n!}{(n^2 - 1)n!} \end{aligned}$$

Aufgabe 8.2 Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie ggf. ihren Grenzwert.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad a_n &= \frac{\sqrt{4n^4 + 5n^3 - 2n^2 + 1}}{7n^2 + 3n + 2} + i \cdot ((-i)^{4n} + i^{2+8n}) & \text{(b)} \quad a_n &= \left(\frac{i + \frac{3}{4}}{3 + 4i} \right)^n \\ \text{(c)} \quad a_n &= \frac{8n^2 + 7n + 14}{-8n^3 + 9n^2 + 5n + 11} + e^{\pi \cdot n(n+1)i} & \text{(d)} \quad a_n &= \frac{(3 + 4i)^{2n}}{26^{2n}} \cdot (-3 + 4i)^{2n} \end{aligned}$$

Aufgabe 8.3 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= |x - 5| & \text{(b)} \quad f(x) &= \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \\ \text{(c)} \quad f(x) &= \frac{2^n x^2 + 3^n x + 5^n}{7^n} \text{ für ein beliebiges,} & \text{(d)} \quad f(x) &= \frac{x^2 - 4}{x + 2} \\ &\text{aber festes } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Aufgabe 8.4 Bestimmen Sie Nullstellen, Pole und maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x}{x^4 - 6x^3 + 8x^2}.$$

Wie ist das Verhalten der Funktion an den Polstellen?

Aufgabe 8.5 Bestimmen Sie eine gebrochenrationale Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit maximalem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$, so dass die folgenden Bedingungen (A), (B) und (C) erfüllt sind:

- f hat nur einfache Nullstellen. Diese sind $x_0 = -2$ und $x_1 = 0$. (A)
- f hat Pole in $x_2 = 1$ und $x_3 = -3$. (B)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f = \frac{3}{2}$. (C)

Geben Sie sowohl eine allgemeine als auch eine Lösung minimalen Grades an. Bestimmen Sie für die Funktion minimalen Grades das Verhalten der links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Funktion an den Polstellen.