

Studio di funzioni

Disequazioni schema:

$F(x)$ Δ	$F(x) > 0$	$F(x) < 0$
$\Delta > 0$	Valori esterni	Valori interni
$\Delta = 0$	$\mathbb{R} - (x)$	\emptyset
$\Delta < 0$	\mathbb{R}	\emptyset

$$ax^2 + bx + c \geq/\leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Studio di funzione

Funzione razionale intera $y = f(x)$

Funzione razionale fratta $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

Funzione irrazionale $y = \sqrt{f(x)}$

Funzione irrazionale fratta $y = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$

Schema dei passaggi

- Ricerca del dominio
- Intersezione con gli assi
- Positività della funzione
- Ricerca degli asintoti (limiti)
(Derivate)
- Crescenza e decrescenza
 - Massimi e minimi

Ricerca del dominio

Intera $y = f(x)$ Dominio $D: \mathbb{R}$

Fratta $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ Dominio $\forall x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0$

Irrazionali

Se la radice è un numero pari (Esempio: $\sqrt{\quad}$ $\sqrt[4]{\quad}$)

Irrazionale intera:

$$y = \sqrt[n]{f(x)} \quad D: \forall x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0$$

Irrazionale fratta:

$$y = \sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}} \quad D: \forall x \in \mathbb{R} \mid \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

Se la radice è un numero dispari (Esempio: $\sqrt[3]{\quad}$ $\sqrt[5]{\quad}$)

Irrazionale intera:

$$y = \sqrt[n]{f(x)} \quad D: R$$

Irrazionale fratta:

$$y = \sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}} \quad D: \forall x \in R \mid g(x) \neq 0$$

INTERSEZIONE CON GLI ASSI

Intersezione con l'asse delle ordinate

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

Intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

POSITIVITA'

$$y > 0$$

ASINTOTI

Asintoti verticali

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad x = x_0$$

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \quad y = l$$

Asintoti obliqui

Se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Allora bisogna trovare il $y = mx + n$ in cui

$$m \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \times \frac{1}{x}$$

$$n \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$$

Esempi:

Intera:

$$y = 5x^2 - 2x \quad D: \mathbb{R}$$

Fratta:

$$y = \frac{3x+5}{x^2-1} \quad D: \forall x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1; x \neq -1$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4}}{2} \quad x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

Irrazionali Pari

$$y = \sqrt[2]{x-5} \quad D: \forall x \in \mathbb{R} \mid x - 5 \geq 0$$

$$D: \forall x \in R \mid x \geq 5$$

$$y = \frac{\sqrt[2]{x+3}}{\sqrt{x-2}} \quad D: \forall x \in R \mid \frac{x+3}{x-2} \geq 0$$

$$x \geq -3 ; x > 2$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}$$

Irrazionali Dispari fratte:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}} \quad D: \forall x \in R \mid x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

INTERSEZIONE CON GLI ASSI:

$$y = 4x - 9$$

$$\begin{cases} y = 4x - 9 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -9 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$A \equiv (0 ; -9)$$

$$\begin{cases} y = 4x - 9 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 9 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = 0 \end{cases}$$

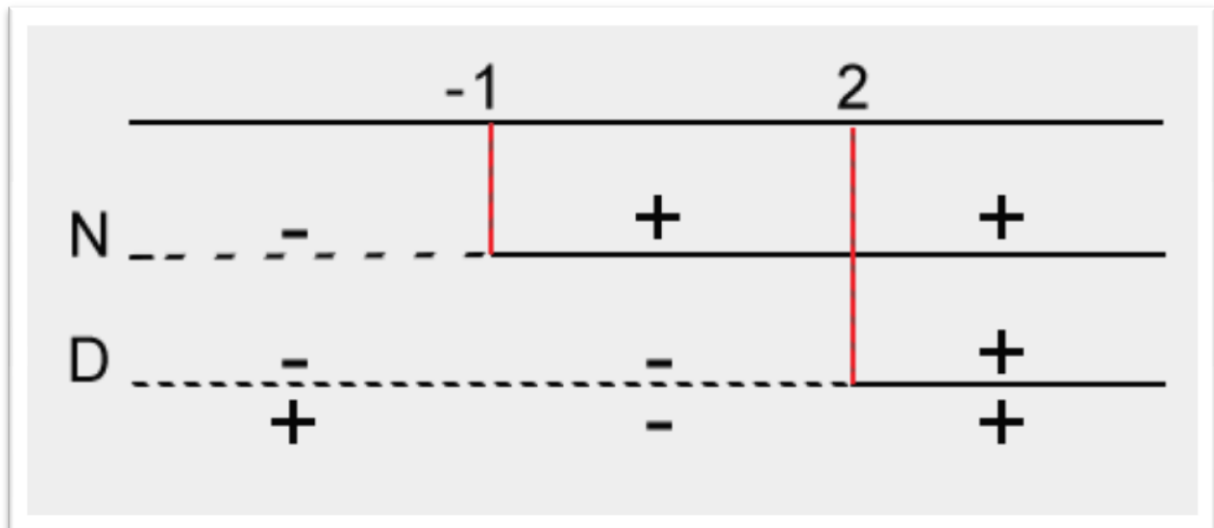
$$B \equiv \left(\frac{9}{4}; 0\right)$$

POSITIVITA'

$$y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\frac{x+1}{x-2} > 0$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \end{cases}$$



ASINTOTI VERTICALI:

$$y = \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$$

$$D: \forall x \in \mathbb{R} | x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$$
$$\frac{18 - 1}{0} = \infty$$

Asintoti orizzontali:

$$y = \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$$

$$\frac{\infty - 1}{\infty - 3} = \frac{\infty}{\infty} = 2$$

Asintoti obliqui:

$$y = \frac{x^2 - 1}{2 - x}$$

$$D: \forall x \in \mathbb{R} | 2 - x \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2 - x} = \frac{\infty - 1}{2 - \infty} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$$

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2 - x} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\frac{x^2 - 1}{2 - x^2} = \frac{\infty - 1}{2 - \infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2 - x} + 1x$$

$$\frac{x^2 - 1 + 2x - x^2}{2 - x} = \frac{2x - 1}{2 - x} = \frac{\infty - 1}{2 - \infty} = \frac{\infty}{\infty} = 2$$

$$y = -1x - 2$$

x	Y
0	-2
1	-3

ESERCIZIO COMPLETO:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x}$$

Dominio

$$D: \forall x \in \mathbb{R} | x \neq 0$$

Intersezione con gli assi

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x} \\ x = 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{0} = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x} \\ y = 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2 - 2x + 3}{x} = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

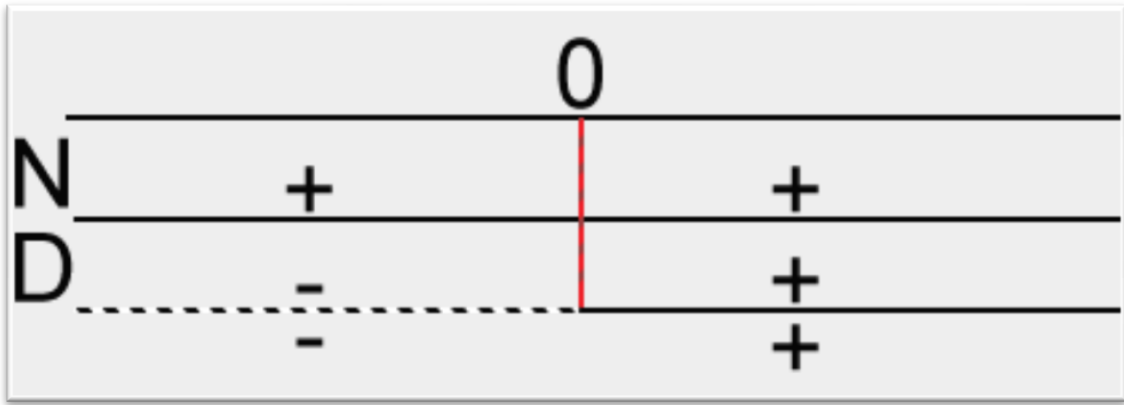
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 4 - 4(1)(3) = 4 - 12 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \Delta < 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \emptyset$$

La funzione interseca con gli assi solo nel punto (0; 0)

Positività

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x} > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 3 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ x > 0 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \mathbb{R} \\ x > 0 \end{array} \right.$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x} = \frac{0 - 0 + 3}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x} = \frac{\infty - \infty + 3}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$$

$$m \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

$$n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x} - 1x = \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2}{x}$$

$$= \frac{-\infty + 3}{\infty} = -2$$

$$y = 1x - 2$$

x	Y
0	-2
1	-1

Grafico

