1 Aufgabe DGL der Emotionen

Schliesslich wollen wir noch abschliessend klären, wie und warum sich Beziehungen zwischen Mann und Frau entwickeln. Hierzu bedarf es keiner Wahrsager sondern nur die richtige Formulierung der Differentialgleichungen, die in diesem Fall die Reaktionen beschreiben.

Hierzu betrachten wir zwei gesuchte Funktionen der Emotionen von Mann und Frau und bezeichnen diese mit $M(t)$ und $F(t)$.

Dabei beschreiben positive Werte der Funktionen Zuneigung, negative Abneigung.

Zunächst sind die aktuellen Werte hierzu die Startwerte unseres Systems, also

$$\begin{aligned} M_0 &= M(0) \\ F_0 &= F(0) \end{aligned}$$

Um die Funktion mit Leben zu füllen, betrachten wir im Moment mal die Werte

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ F_0 &= 2 \end{aligned}$$

Nun beschreiben wir die Reaktion auf die Emotion des Anderen als Änderungsrate. Modellieren wir mal zunächst die Vergesslichkeit, so wäre ein erster Ansatz, dass in jedem Zeitschritt beispielsweise 10% vergessen werden. Also

$$\begin{aligned} \Delta M &= -0,1 \cdot M \\ \Delta F &= -0,1 \cdot F \end{aligned}$$

Zum Anderen wird die Reaktion auf die Emotion des Anderen wie folgt modelliert

Bei der Frau bewirkt sowohl Zuneigung als auch Abneigung eine Verstärkung der eigenen Gefühle, beispielsweise zu 25% wird der Wert vom Mann zum eigenen Status hinzuaddiert.

Beim Mann ist dies umgekehrt: Zu grosse Nähe bewirkt Distanz, Streit bewirkt Bemühen die Emotionen in die andere Richtung zu lenken, sagn wir zu 50%. Es entsteht das System

$$\begin{aligned} \Delta M &= -0,1 \cdot M - 0,5 \cdot F \\ \Delta F &= 0,25 \cdot M - 0,1 \cdot F \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Das Modell und das homogene System: Berechnen Sie aus diesen Differenzengleichungenden die Änderungen und damit zeitlichen Verlauf der beiden Funktionen M_n und F_n iterativ und zeichnen Sie diesen. Überführen Sie anschliessend die Differenzengleichungen in Differentialgleichungen und lösen das System exakt. Was wird der langfristige zeitiche Verlauf ergeben?

Aufgabe 2: Das inhomogene System mit konstanter Störfunktion: Um nun hier einen Ausweg zu schaffen, geben wir dem System wie folgt einen Impuls: Beide Funktionen werden um einen festen Wert erhöht (z.B. durch Hochzeitstag, Urlaub, Blumen ....) und wir erhalten z.B. für eine Erhöhung um 1

$$\begin{aligned} M' &= -0,1 \cdot M - 0,5 \cdot F + 1 \\ F' &= 0,25 \cdot M - 0,1 \cdot F + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ F_0 &= 2 \end{aligned}$$

Wie sind nun die partikulären Lösungen? Werden beide Werte langfristig positiv oder wo liegen diese? Berechnen Sie nun für die Differenzengleichugnen wiederum die Funktionsverläufe iterativ.

Aufgabe 3: Das inhomogene System mit beliebiger Störfunktion: Damit wir die kontinuierlichen Funktionen ermitteln können, betrachten wir nun allgemein das System

$$\begin{aligned} M' &= a \cdot M + b \cdot F + g_1(t) \\ F' &= c \cdot M + d \cdot F + g_2(t) \end{aligned}$$

M_0, F_0 geg.

Überführen Sie dieses in eine DGL 2. Ordnung. Lösen Sie hier die homogene DGL. (Die Partikulären Lösungen setzen sie als gefundene Funktionen $M_p(t), F_p(t)$ ein)

Aufgabe 4: Bestimmen Sie nun die exakte Lösung des Systems

$$\begin{aligned} M' &= -0,1 \cdot M - 0,5 \cdot F + 1 \\ F' &= 0,25 \cdot M - 0,1 \cdot F + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ F_0 &= 2 \end{aligned}$$

und zeichnen Sie die Funktionsverläufe. Fassen Sie den Algorithmus nochmals zusammen.

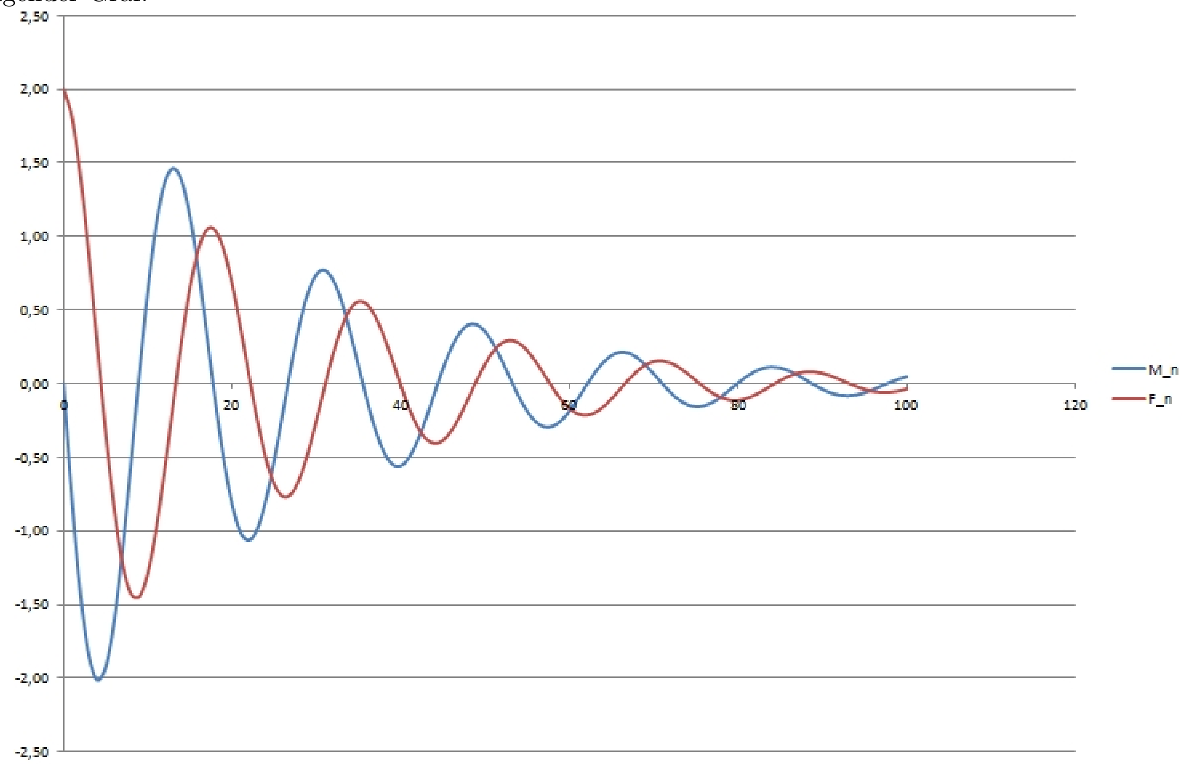
Aufgabe 5: Schreiben Sie ein Programm zur Lösung beliebiger linearer Systeme mit konstanter Störfunktion, also zu

$$\begin{aligned} y' &= ay + bz + e \\ z' &= cy + dz + f \end{aligned}$$

$$y_0, z_0 \text{ geg.}$$

Lösung:

Berechnen wir die (diskrete) zeitliche Entwicklung nun einmal so ergibt sich folgender Graf:



1.1 Die analytische Lösung des homogenen Systems

Um die Funktionen exakt zu ermitteln, verwenden wir zunächst statt der Differenzengleichung das DGL-System mit den Anfangswerten M_0, F_0:

$$\begin{aligned} M' &= -0,1 \cdot M - 0,5 \cdot F \\ F' &= 0,25 \cdot M - 0,1 \cdot F \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ergibt für den Anfangswert

$$M'(0) = -0,1 \cdot M(0) - 0,5 \cdot F(0)$$

und allgemein nach F aufgelöst

$$F = -0,2M - 2M'$$

Differenzieren der ersten Gleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
M'' &= -0,1M' - 0,5F' \\
&= -0,1M' - 0,5\left(-0,1 \cdot F + 0,25 \cdot M\right) \\
&= -0,1M' + 0,05F - 0,125M \\
&= -0,1M' + 0,05\left(-0,2M - 2M'\right) - 0,125M \\
&= -0,2M' - 0,01M - 0,125M
\end{aligned}
$$

$$M'' + 0,2M' + 0,135M = 0$$

Dies ergibt die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + 0,2\alpha + 0,135 = 0$$

Für die Diskriminante gilt:

$$D = 0,01 - 0,135 = -0,125$$

Damit haben wir zwei konjugiert komplexe Nullstellen und dies liefert

$$M = e^{-0,1t}\left(\lambda_1 \cos\sqrt{0,125}t + \lambda_2 \sin\sqrt{0,125}t\right)$$

Die Startwerte liefern

$$M(0) = \lambda_1 = M_0$$

$$
\begin{aligned}
M' &= -0,1 \cdot e^{-0,1t}\left(\lambda_1 \cos\sqrt{0,125}t + \lambda_2 \sin\sqrt{0,125}t\right) \\
&\quad + \sqrt{0,125} \cdot e^{-0,1t}\left(-\lambda_1 \sin\sqrt{0,125}t + \lambda_2 \cos\sqrt{0,125}t\right) \\
M'(0) &= -0,1\lambda_1 + \sqrt{0,125}\lambda_2 \\
&= -0,1M_0 + \sqrt{0,125}\lambda_2 \\
\sqrt{0,125}\lambda_2 &= M'(0) + 0,1M_0 \\
&= \left(-0,1 \cdot M_0 - 0,5 \cdot F_0\right) + 0,1M_0 \\
\sqrt{0,125}\lambda_2 &= -0,5 \cdot F_0 \\
\lambda_2 &= \frac{-0,5 \cdot F_0}{\sqrt{0,125}}
\end{aligned}
$$

Für unsere Startwerte

$$
\begin{aligned}
M_0 &= 0 \\
F_0 &= 2
\end{aligned}
$$

ergibt sich

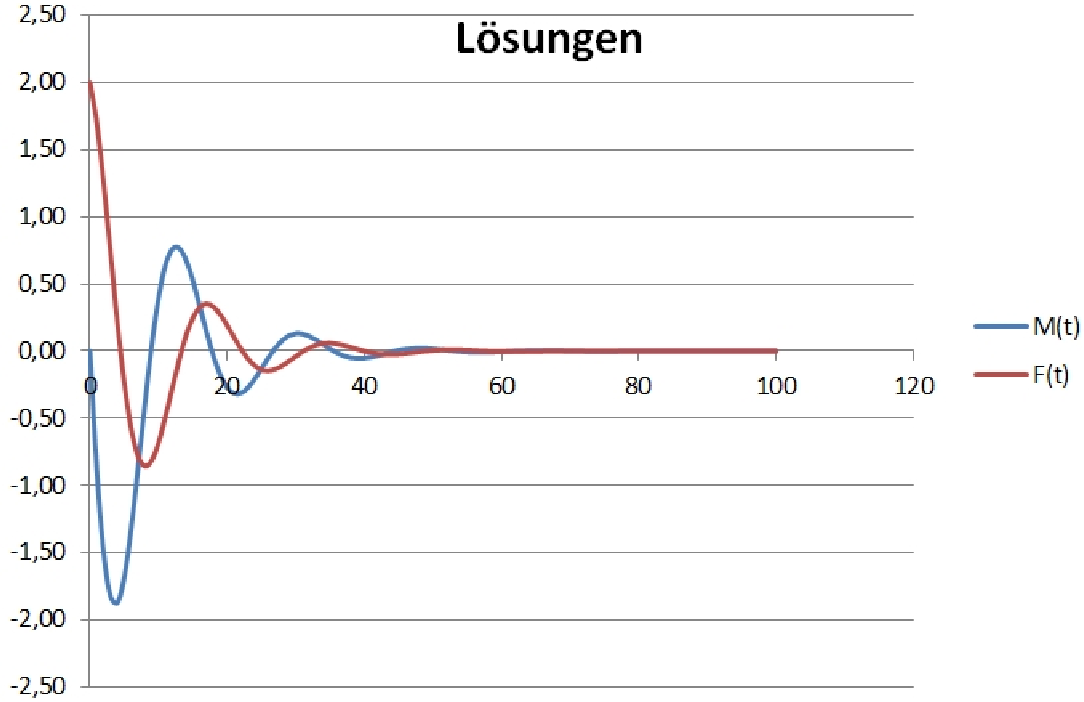
$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= \frac{-1}{\sqrt{0,125}} = -\sqrt{8}
\end{aligned}
$$

und damit

$$M(t) = -\sqrt{8}e^{-0,1t} \sin \sqrt{0,125}t$$

und wegen

$$
\begin{aligned}
F &= -0,2M - 2M' \\
&= 0,2 \cdot \sqrt{8}e^{-0,1t} \sin \sqrt{0,125}t \\
&\quad -2\left(0,1 \cdot \sqrt{8}e^{-0,1t} \sin \sqrt{0,125}t - \sqrt{8}\sqrt{0,125}e^{-0,1t} \cos \sqrt{0,125}t\right) \\
&= 2e^{-0,1t} \cos \sqrt{0,125}t
\end{aligned}
$$



Wir sehen, sowohl im diskreten als auch im kontinuerlichen Modell endet das System in Lethargie.

1.2 Aufgabe 2: Das inhomogene System mit konstanter Störfunktion

Um nun hier einen Ausweg zu schaffen, geben wir dem System wie folgt einen Impuls: Beide Funktionen werden um einen festen Wert erhöht (z.B. durch

Hochzeitstag, Urlaub, Blumen ....) und wir erhalten z.B. für eine Erhöhung um 1

$$\begin{aligned} M' &= -0,1 \cdot M - 0,5 \cdot F + 1 \\ F' &= 0,25 \cdot M - 0,1 \cdot F + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ F_0 &= 2 \end{aligned}$$

Analog wird die DGL 2. Ordnung aufgestellt und wir erhalten eine linear inhomogene DGL 2. Ordnung mit einer Konstanten als Störfunktion:

$$M'' + 0,2M' + 0,135M = -0,4$$

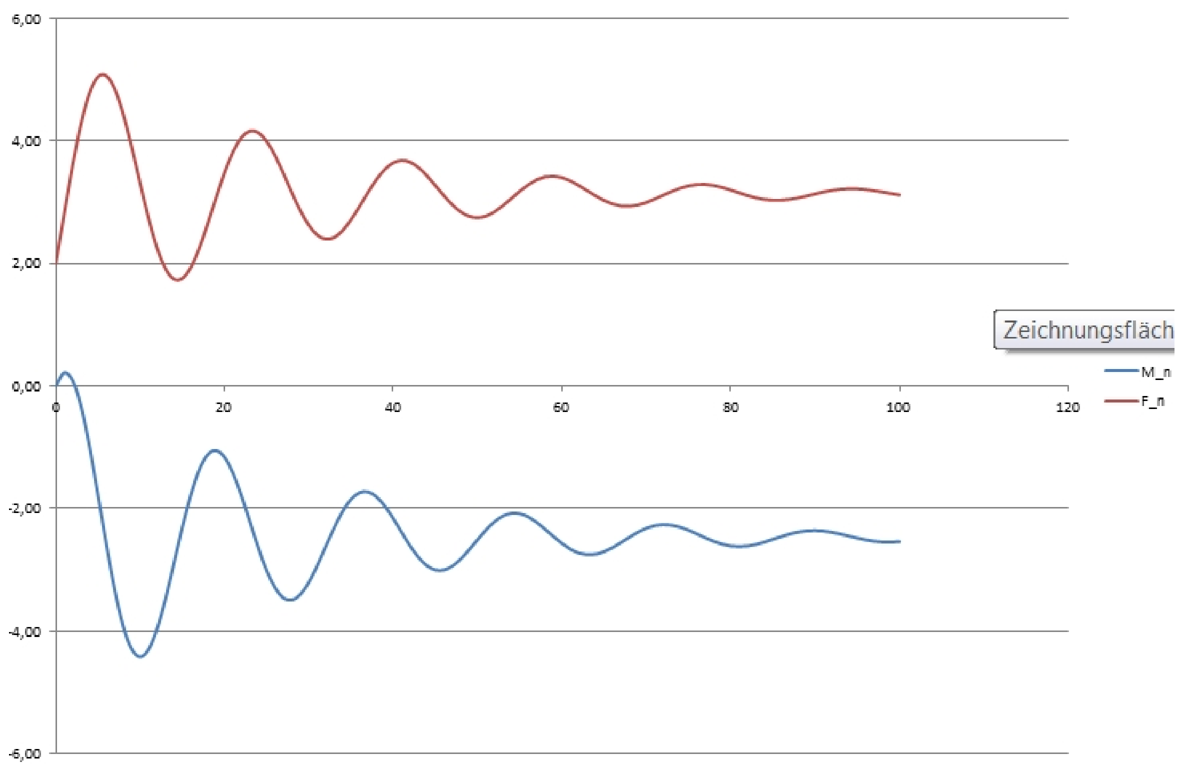
und hieraus die partikuläre Lösung

$$M_p = \frac{-0,4}{0,135} = -2,963$$

Durch Vertauschen der Variablen erhalten wir auch

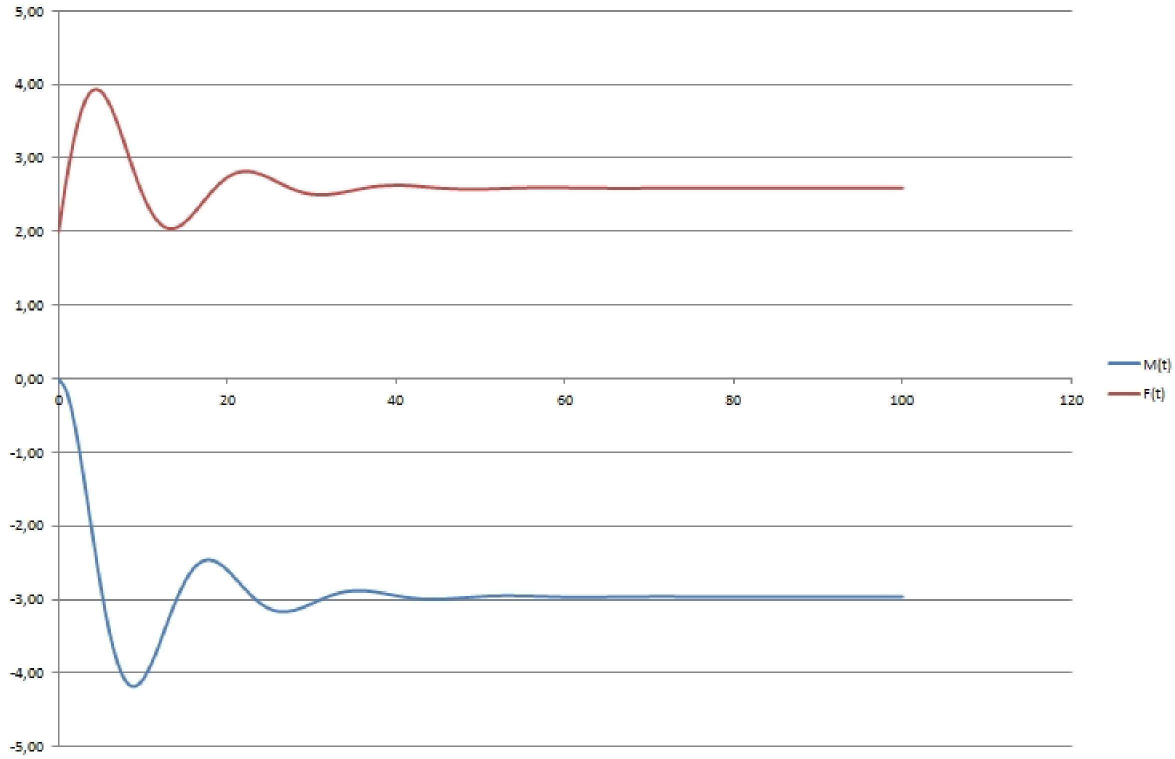
$$F_p = 2,593$$

Der Plot der Funktionen sieht hierbei im diskreten Fall wie folgt aus:



und wir sehen auch hier, dass dieses Szenarion nur bei den Frauen zu positiven Emotionen führt.

Kontinuierlich erhalten wir hier (Herleitung folgt weiter unten):



1.3 Aufgabe 3: Das inhomogene System mit beliebiger Störfunktion

Damit wir die kontinuierlichen Funktionen ermitteln können, betrachten wir nun allgemein das System

$$\begin{aligned} M' &= a \cdot M + b \cdot F + g_1(t) \\ F' &= c \cdot M + d \cdot F + g_2(t) \end{aligned}$$

M_0, F_0 geg.

Es ist:

$$bF = M' - aM - g_1(t)$$

$$
\begin{aligned}
M'' &= a \cdot M' + b \cdot F' + g_1'(t) \\
&= a \cdot M' + b \cdot (c \cdot M + d \cdot F + g_2(t)) + g_1'(t) \\
&= a \cdot M' + b \cdot c \cdot M + d \cdot b \cdot F + b \cdot g_2(t) + g_1'(t) \\
&= a \cdot M' + b \cdot c \cdot M + d \cdot (M' - aM - g_1(t)) + b \cdot g_2(t) + g_1'(t) \\
&= a \cdot M' + b \cdot c \cdot M + dM' - adM - dg_1(t) + b \cdot g_2(t) + g_1'(t) \\
M'' - (a+d)M' + (ad-bc)M &= -dg_1(t) + b \cdot g_2(t) + g_1'(t)
\end{aligned}
$$

Vertauschen wir die ersten beiden Gleichungen, so liesse sich ebenso eine DGL 2. Ordnung für $F(t)$ aufstellen:

$$F'' - (a+d)F' + (ad-bc)F = -ag_2(t) + c \cdot g_1(t) + g_2'(t)$$

Wir sehen. dass auch hier die partikuläre Lösung von der rechten Seite abhängt, die allgemeine Lösung der homogenen DGL jedoch wieder auf die gleiche DGL 2. Ordnung führt. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist aber bei F und M die gleiche. Die Funktionen unterscheiden sich nur in der partikulären Lösung und beim AWP in den Parametern.

Die Schritte zum Auffinden der Lösung sind wie gehabt für die Funktion $M(t)$:

1. Allgemeine Lösung der homogenen DGL:

Betrachte

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc \\
&= \frac{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc}{4} \\
&= \frac{(a-d)^2 + 4bc}{4}
\end{aligned}
$$

a) ist $D > 0, d.h. (a-d)^2 > -4bc$, so ist

$$\alpha_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{D}$$

und

$$
\begin{aligned}
M_h &= \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t} \\
&= \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t}
\end{aligned}
$$

b) für D=0 ist

$$M_h = (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{\frac{a+d}{2} t}$$

c) für D<0 ist

$$M_h = e^{\frac{a+d}{2}t}(\lambda_1 \cos\sqrt{-D}t + \lambda_2 \sin\sqrt{-D}t)$$

2. Aus der rechten Seite ergibt sich

$$M_p(t)$$

3. Die Gesamtlösung ist

$$M(t) = M_h(t) + M_p(t)$$

4. Das AWP ergibt noch

$$M_0 = M_h(0) + M_p(0)$$

und

$$M'(0) = a \cdot M_0 + b \cdot F_0 + g_1(0)$$

also in a)

$$\begin{aligned} M_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 + M_p(0) \\ M_0 - M_p(0) &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

und für die Ableitung

$$\begin{aligned} M'(t) &= \alpha_1\lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2\lambda_2 e^{\alpha_2 t} + M_p'(t) \\ M'(0) &= \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + M_p'(0) \\ M'(0) - M_p'(0) &= \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 \end{aligned}$$

Dieses System ergibt

$$\begin{aligned} M_0 - M_p(0) - \lambda_1 &= \lambda_2 \\ M'(0) - M_p'(0) &= \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\left(M_0 - M_p(0) - \lambda_1\right) \\ M'(0) - M_p'(0) &= \alpha_2\left(M_0 - M_p(0)\right) + \left(\alpha_1 - \alpha_2\right)\lambda_1 \\ &= \alpha_2\left(M_0 - M_p(0)\right) + 2\sqrt{D}\lambda_1 \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2\sqrt{D}}\big(M'(0) - M_p'(0) - \alpha_2\left(M_0 - M_p(0)\right)\big) \\ \lambda_2 &= M_0 - M_p(0) - \lambda_1 \end{aligned}$$

in b)

$$\begin{aligned} M_0 &= \lambda_1 + M_p(0) \\ \lambda_1 &= M_0 - M_p(0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
M'(t) &= \alpha_1\left(\lambda_1+\lambda_2 t\right)e^{\alpha_1 t}+\lambda_2 e^{\alpha_1 t}+M_p'(t)\\
M'(0) &= \alpha_1\lambda_1+\lambda_2+M_p'(0)\\
M'(0)-M_p'(0) &= \alpha_1\lambda_1+\lambda_2\\
\lambda_2 &= M'(0)-M_p'(0)-\alpha_1\lambda_1
\end{aligned}$$

in c)

$$\begin{aligned}
M_0 &= \lambda_1+M_p(0)\\
\lambda_1 &= M_0-M_p(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M'(t) &= \frac{a+d}{2}e^{\frac{a+d}{2}t}(\lambda_1\cos\sqrt{-D}t+\lambda_2\sin\sqrt{-D}t)\\
&\quad+\sqrt{-D}e^{\frac{a+d}{2}t}(-\lambda_1\sin\sqrt{-D}t+\lambda_2\cos\sqrt{-D}t)+M_p'(t)\\
M'(0) &= \frac{a+d}{2}\lambda_1+\sqrt{-D}\lambda_2+M_p'(0)\\
M'(0)-M_p'(0) &= \frac{a+d}{2}\lambda_1+\sqrt{-D}\lambda_2\\
\lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{-D}}\left(M'(0)-M_p'(0)-\frac{a+d}{2}\lambda_1\right)
\end{aligned}$$

In allen drei Fällen ist ein Lineares Gleichungssystem für λ_i zu lösen.

1.4 Zusammenfassung der Gleichungssysteme

D>0

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(M'(0)-M_p'(0)-\alpha_2\left(M_0-M_p(0)\right)\right)\\
\lambda_2 &= M_0-M_p(0)-\lambda_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(F'(0)-F_p'(0)-\alpha_2\left(F_0-F_p(0)\right)\right)\\
\mu_2 &= F_0-F_p(0)-\mu_1
\end{aligned}$$

D=0

$$\lambda_1 = M_0 - M_p(0)$$
$$\lambda_2 = M'(0) - M_p'(0) - \tfrac{a+d}{2}\lambda_1$$

$$\mu_1 = F_0 - F_p(0)$$
$$\mu_2 = F'(0) - F_p'(0) - \tfrac{a+d}{2}\mu_1$$

D<0

$$\lambda_1 = M_0 - M_p(0)$$
$$\lambda_2 = \tfrac{1}{\sqrt{-D}}\left(M'(0) - M_p'(0) - \tfrac{a+d}{2}\lambda_1\right)$$

$$\mu_1 = F_0 - F_p(0)$$
$$\mu = \tfrac{1}{\sqrt{-D}}\left(F'(0) - F_p'(0) - \tfrac{a+d}{2}\mu_1\right)$$

1.5 Aufgabe 4: Die exakte Lösung des inhomogenen Systems

$$\begin{aligned} M' &= -0,1 \cdot M - 0,5 \cdot F + 1 \\ F' &= 0,25 \cdot M - 0,1 \cdot F + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ F_0 &= 2 \end{aligned}$$

bzw. analog als DGL zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} M''(t) - 0.2M'(t) + 0.135M(t) &= -0.4 \\ M(0) &= 0 \\ M'(0) &= 0 \\ M_p(0) &= \frac{-0.4}{0.135} = -2.963 \end{aligned}$$

Bem.: Für die Funktion $F(t)$ vertauschen wir einfach die Rollen und stellen analog die DGL 2. Ordnung auf und erhalten:

$$\begin{aligned} F''(t) - 0.2M'(t) + 0.135M(t) &= 0.1 + 0.25 = 0.35 \\ F(0) &= 2 \\ F'(0) &= -0.1 \cdot 2 + 1 = 0.8 \\ F_p(t) &= \frac{0.35}{0.135} \end{aligned}$$

Also zurück zu den Männern:

$$\begin{aligned} a &= d = -0,1 \\ b &= -0,5 \\ c &= 0,25 \\ g_1(t) &= 1 = g_2(t) \end{aligned}$$

Damit ist

$$D = bc = -0,125 < 0$$

und die Lösungsfunktion lautet s.o. :

$$M_H = e^{-0,1t}(\lambda_1 \cos \sqrt{0,125}t + \lambda_2 \sin \sqrt{0,125}t)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} (ad - bc)M_p &= -dg_1(t) + b \cdot g_2(t) + g_1'(t) \\ &= -d + b \\ M_p &= \frac{b - d}{ad - bc} = \frac{-0.4}{0.135} = -2,96 \end{aligned}$$

und damit die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

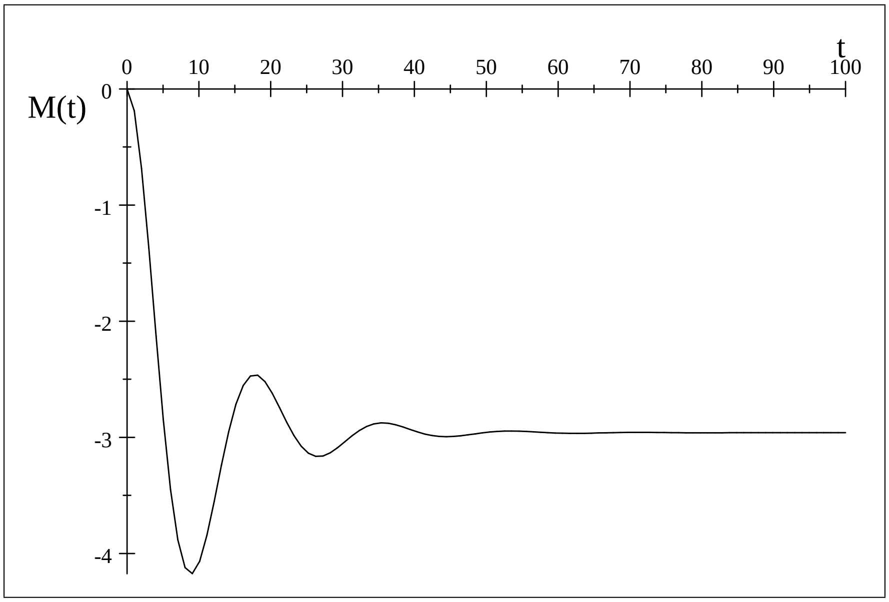
$$M = e^{-0,1t}(\lambda_1 \cos \sqrt{0,125}t + \lambda_2 \sin \sqrt{0,125}t) - 2,96$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= M_0 - M_p(0) \\ &= 2,96 \\ \lambda_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{-D}} \left(M'(0) - M_p'(0) - \tfrac{a+d}{2}\left(M_0 - M_p(0)\right)\right) \\ &= -\sqrt{8} \cdot (0.296) \\ &= 0.837 \end{aligned}$$

und damit die Funktion

$$M(t) = e^{-0.1t}\left(2.96 \cos\left(\sqrt{0.125}t\right) + 0.837 \sin\left(\sqrt{0.125}t\right)\right) - 2.96$$



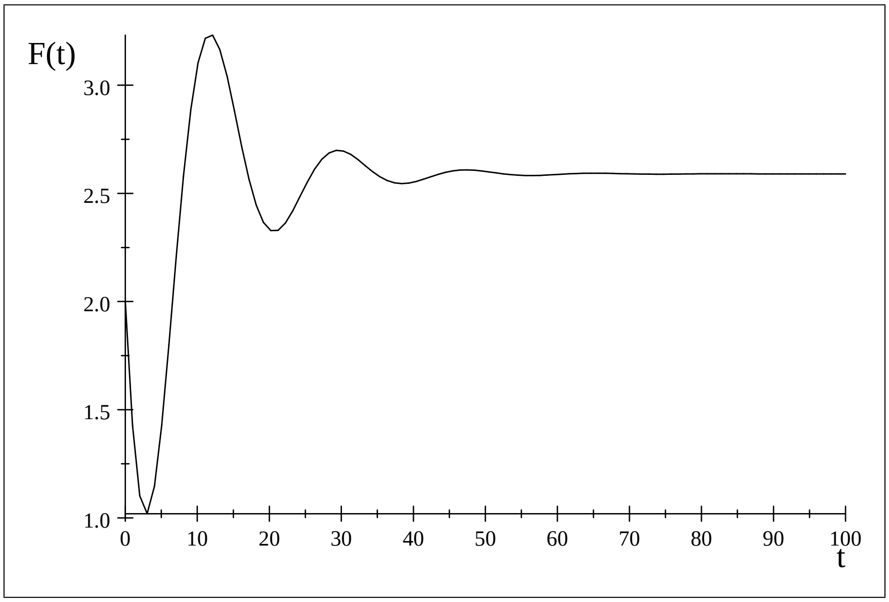
Für die Frauen gilt mit analoger Rechnung (wir nennen die freien Parameter nun μ):

$$F(t) = e^{-0.1t}\left(\mu_1 \cos\left(\sqrt{0.125}t\right) + \mu_2 \sin\left(\sqrt{0.125}t\right)\right) + 2.59$$

Mit

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= F_0 - F_p(0) \\
&= 2 - 2.59 = -0.59 \\
\mu_2 &= \frac{1}{\sqrt{-D}}\left(F'(0) - F_p'(0) - \frac{a+d}{2}\left(F_0 - F_p(0)\right)\right) \\
&= \sqrt{8} \cdot (0.8 - 0.1 \cdot 0.59) \\
&= 2.1
\end{aligned}$$

$$F(t) = e^{-0.1t}\left((-2.1)\sin\sqrt{0.125}t - 0.59\cos\left(\sqrt{0.125}t\right)\right) + 2.59$$



In dem Fall, dass die Störfunktionen nur aus Konstanten bestehen, vereinfacht sich der Algorithmus generell wie folgt:

Die Funktion $M_p(t)$ wird zu einer Konstanten $M_p = \frac{bf-de}{ad-bc}$bzw. $F_p = \frac{cf-ae}{ad-bc}$und ihre Ableitung Null und damit

D>0

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(M'(0) - \alpha_2\left(M_0 - M_p\right)\right)\\ \lambda_2 &= M_0 - M_p - \lambda_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(F'(0) - \alpha_2\left(F_0 - F_p\right)\right)\\ \mu_2 &= F_0 - F_p - \mu_1\end{aligned}$$

D=0

$$\lambda_1 = M_0 - M_p$$
$$\lambda_2 = M'(0) - \frac{a+d}{2}\lambda_1$$

$$\mu_1 = F_0 - F_p$$
$$\mu_2 = F'(0) - \frac{a+d}{2}\mu_1$$

D<0

$$\lambda_1 = M_0 - M_p$$
$$\lambda_2 = \tfrac{1}{\sqrt{-D}}\left(M'(0) - \tfrac{a+d}{2}\lambda_1\right)$$

$$\mu_1 = F_0 - F_p$$
$$\mu_2 = \tfrac{1}{\sqrt{-D}}\left(F'(0) - \tfrac{a+d}{2}\mu_1\right)$$

1.6 Aufgabe 5: Der Algorithmus

Geg.: a,b,c,d,e,f,y_0,z_0 aus

$$\begin{aligned} y' &= ay + bz + e \\ z' &= cy + dz + f \\ & y_0, z_0 \text{ geg.} \end{aligned}$$

Berechne:

$$\begin{aligned} D &= \frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc \\ y_p &= \frac{bf - de}{ad - bc} \\ z_p &= \frac{cf - ae}{ad - bc} \\ z'(0) &= cy_0 + dz_0 + f \end{aligned}$$

	$y(t)/z(t)$	λ_1/μ_1	λ_2/μ_2
D<0	$y = e^{(a+d)/2\cdot t}(\lambda_1 \cos(\sqrt{-D}t) + \lambda_2 \sin(\sqrt{-D}t)) + y_p$	$\lambda_1 = y_0 - y_p$	$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{-D}}\left(y'(0) - \frac{a+d}{2}\lambda_1\right)$
	$z = e^{(a+d)/2\cdot t}(\mu_1 \cos(\sqrt{-D}t) + \mu_2 \sin(\sqrt{-D}t)) + z_p$	$\mu_1 = z_0 - z_p$	$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{-D}}\left(z'(0) - \frac{a+d}{2}\mu_1\right)$
D=0	$y = e^{(a+d)/2\cdot t}(\lambda_1 + \lambda_2 t) + y_p$	$\lambda_1 = y_0 - y_p$	$\lambda_2 = y'(0) - \frac{a+d}{2}\lambda_1$
	$z = e^{(a+d)/2\cdot t}(\mu_1 + \mu_2 t) + z_p$	$\mu_1 = z_0 - z_p$	$\mu_2 = z'(0) - \frac{a+d}{2}\mu_1$
D>0	$y = \lambda_1 e^{\left((a+d)/2+\sqrt{D}\right)\cdot t} + \lambda_2 e^{\left((a+d)/2-\sqrt{D}\right)\cdot t} + y_p$	$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(y'(0) - \left((a+d)/2 - \sqrt{D}\right)(y_0 - y_p)\right)$	$\lambda_2 = y_0 - y_p - \lambda_1$
	$y = \mu_1 e^{\left((a+d)/2+\sqrt{D}\right)\cdot t} + \mu_2 e^{\left((a+d)/2-\sqrt{D}\right)\cdot t} + z_p$	$\mu_1 = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left(z'(0) - \left((a+d)/2 - \sqrt{D}\right)(z_0 - z_p)\right)$	$\mu_2 = z_0 - z_p - \lambda_1$