PACES – UE4 : Évaluation des méthodes d'analyses appliquées aux sciences de la vie et de la santé

Chapitre Biomathématique – Première partie

- Cours 1 : Fonctions d'une variable réelle
- Cours 2 : Calcul intégral et équations différentielles
- Cours 3 : Fonctions de plusieurs variables

Cours 1 : Fonction d'une variable réelle

Équipe pédagogique BPS
(Biomathématique, Probabilité et Statistiques)

PACES UE 4
Évaluation des méthodes d'analyses appliquées aux sciences de la vie et de la santé

Université Paris Descartes
Année 2015-2016

Objectif

Donner les outils mathématiques nécessaires pour pouvoir traiter les données issues des sciences médicales, pharmaceutiques ou biologiques.

Chimie
$pH = -\log_{10}[H_3O^+]$
$[H_3O^+] = 10^{-pH}$

Chimie/redox
Équation de Nernst
$E = E^0 + \frac{RT}{nF}\ln\left(\frac{[Ox]}{[Red]}\right)$

Statistiques
Loi de Poisson
$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Physique
Loi de Beer-Lambert
$\frac{I}{I_0} = \exp(-Kl)$

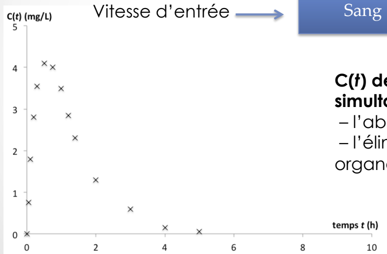
Biophysique
1ere loi de Fick
$j = -D\frac{dC}{dx}$

Électricité
Charge d'un condensateur
$q(t) = q_0 \exp(\frac{-t}{RC})$

Biologie
Élimination d'un médicament
Croissance bactérienne

Exemple introductif

- **Exemple pharmaceutique :** Suivi de l'évolution de la concentration plasmatique C(t) d'un médicament ingéré par voie orale en fonction du temps t



Vitesse d'entrée → Sang → Vitesse de sortie

C(t) dépend de deux mécanismes simultanés et opposés :
– l'absorption d'origine intestinale
– l'élimination vers les tissus ou les organes d'excrétion

Remarque : on peut utiliser n'importe quelle lettre pour la variable et la fonction

Exemple introductif

Modélisation de l'évolution de la concentration plasmatique C(t) d'un médicament ingéré par voie orale

Modèle mathématique : $C(t) = A\,(e^{-st} - e^{-nt})$

L'absorption est modélisée par une exponentielle exp($-nt$) avec n la constante de vitesse d'entrée.

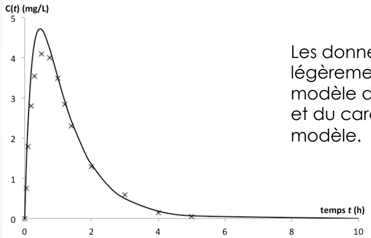
L'élimination est modélisée par une exponentielle exp($-st$) avec s la constante de vitesse de sortie.

Remarques :
– le facteur A est un coefficient de proportionnalité positif qui prend en compte la dose administrée ;
– on suppose ici que l'absorption est plus rapide que l'élimination ($n > s$).

Exemple introductif

Étude de la fonction modèle C(*t*)

– Détermination des conditions d'administration
– Comportement quand $t \rightarrow +\infty$ (Calcul de limite)
– Calcul du C_{max} (tableau de variation, calcul de dérivée)



Les données expérimentales (x) sont légèrement différentes de la courbe modèle du fait de l'erreur expérimentale et du caractère simplificateur du modèle.

Remarque
C'est sur la base de modèles similaires, quoique plus complexes, que le devenir d'un médicament dans l'organisme est étudié.

Calcul de dérivées et calcul différentiel

Outil permettant d'étudier le taux de variation d'une fonction *f* au voisinage d'une valeur

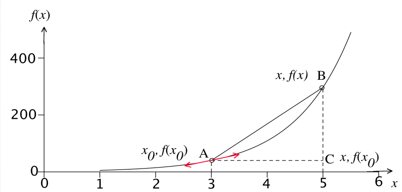
Applications :

– Calcul d'incertitude
– Calcul de vitesse de variation
– Calcul du travail d'une force de rappel d'un ressort
– …

Remarque
Propriétés de base des fonctions réelles (domaine de définition D, comportement aux bornes de D, parité …) : voir rappels en fin de cours.

Dérivée d'une fonction (1/4)

Le taux d'accroissement de *f* en x_0 : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CA}}$



On reconnaît ici la pente de la droite (AB)

Les points A, B, C ont respectivement pour coordonnées $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$ et $(x, f(x_0))$.

Pour $\Delta x = x - x_0$ très petit, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ (continuité en x_0) et donc la sécante (AB) et la tangente en A à la courbe sont presque confondues.

Dérivée d'une fonction (2/4)

La dérivée en un point x_0 d'une fonction *f* est la valeur limite du taux d'accroissement de *f* en x_0 :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

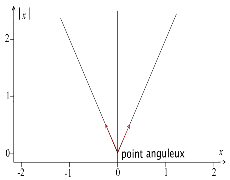
Cette limite est une forme indéterminée 0/0 : elle n'existe pas toujours. Lorsqu'elle existe, on dit que *f* est dérivable en x_0.

La dérivée en x_0 est la pente de la tangente en x_0.

Dérivée d'une fonction (3/4)

Si une fonction *f* est dérivable en x_0, alors *f* est continue en x_0. Attention la réciproque est fausse.

Contre-exemple : $f(x)=|x|$ (cas de point anguleux)



Dérivées successives : $\boxed{f''(x)=\left(f'(x)\right)'}$ (quand c'est possible)

Exemple de dérivées successives (cas de fonctions trigonométriques) :

$$f(x)=\sin x, f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, f'''(x)=f^{(3)}(x)=-\cos x$$

Dérivée d'une fonction (4/4)

Signe et zéros de la dérivée première

f'(x) > 0 ➔ *f* croissante
f'(x) < 0 ➔ *f* décroissante

Si *f'*(x) s'annule en changeant de signe autour d'un point x = *a* (i.e. *f'*(*a*)=0) alors *a* est un extremum de *f* (maximum ou minimum selon le signe de *f'*).

Signe et zéros de la dérivée seconde

$f''(x)>0$ ➔ concavité tournée vers le haut, la fonction *f* est convexe. S'il y a un extremum dans ce domaine, ce sera un minimum.

$f''(x)<0$ ➔ concavité tournée vers le bas, la fonction *f* est concave. S'il y a un extremum dans ce domaine, ce sera un maximum.

Si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en x = *a*, cela signifie que la dérivée première passe par un extremum. La courbe représentative de *f* présente en x = *a* un point d'inflexion (en x = *a*, la courbe change de concavité et la tangente traverse la courbe).

Applications

Calcul de la dérivée de la fonction $S(r)=\pi r^2$

On pose $r = r_0 + h$

$$S(r_0)=\pi r_0^2$$

$$S(r_0+h)=\pi(r_0+h)^2=\pi(r_0^2+h^2+2r_0h)$$

$$\frac{S(r_0+h)-S(r_0)}{r-r_0}=\frac{\pi(h^2+2r_0h)}{h}=2\pi r_0+\pi h$$

$$S'(r_0)=\lim_{h\to 0}\frac{S(r_0+h)-S(r_0)}{r-r_0}=2\pi r_0$$

Remarque

Par le calcul, on obtient S'(r) = $2\pi r$ donc on retrouve S'(r_0) = $2\pi r_0$. Cette dérivée existe $\forall\, r \in \mathbb{R}$

Applications

Étude du point d'inflexion de la fonction *y* = x³

$$D_y=D_{y'}=D_{y''}=\mathbb{R},\quad y'=3x^2,\quad y''=6x$$

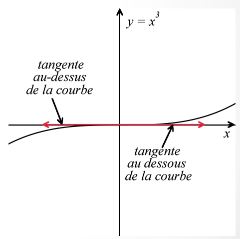
La dérivée y' est positive donc y est croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction y ne présente aucun extremum.

En x = 0, la tangente est horizontale (y'(0) = 0)

Pour tout x < 0, on a y(x) < 0, la tangente est au-dessus de la courbe.

Pour tout x > 0, on a y(x) > 0, la tangente est au-dessous de la courbe.

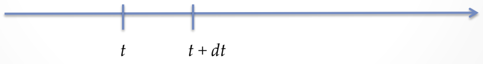
En x = 0, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. Il y a un point d'inflexion.



Notion d'élément différentiel

Soit une variable *t*.

Si t passe de la valeur *t* à la valeur *t* + d*t* infiniment proche de *t*, **l'élément différentiel d*t*** apparaît ainsi comme un élément infiniment petit devant *t*, tellement petit que l'on peut à la rigueur le supposer négligeable, mais assez grand cependant pour ne pas le considérer comme nul.



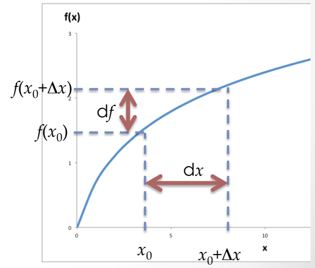
Différentielle de fonction

Soit une fonction *f* dérivable en x_0.

— La petite variation de *f* au point x_0 s'écrit d*f*(x_0) ou plus généralement d*f*(x) ou plus simplement d*f*.

— La petite variation de x sera écrite dx.

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$



Remarque : dérivée seconde

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

Notations différentielles (1/2)

Soit *u* et *v* deux fonctions de x.

Différentielle d'une somme ou d'une différence :

d(*u* + *v*)=(*u* + *v*)'dx = *u*'dx + *v*'dx = d*u* + d*v*

d(*u* - *v*)= d*u* – d*v*

Différentielle d'un produit d(uv) :

On pose f(x) = u(x)v(x) ➔ *f'(x) = u'(x)v(x) +u(x)v'(x)*

On a alors df =f'(x)dx=(*u'(x)v(x) +u(x)v'(x)*)dx

d'ou df = *v*(x)d*u*+*u*(x)d*v*

On a donc **d(*uv*) = *u*d*v*+*v*d*u***

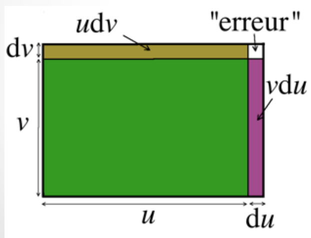
Différentielle d'un quotient :

On montre de même que $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$

Notations différentielles (2/2)

Interprétation géométrique de la différentielle d'un produit d(uv)

Variation de l'aire d'un rectangle de dimensions u et v



Aire = *uv*

d(Aire) =(*u*+d*u*)(*v*+d*v*)- *uv*

d(Aire) = *u*d*v* + *v*d*u* + d*u*.d*v*

On retrouve que si d*u* et d*v* sont très petits :

d*(Aire)* ≈ *u*d*v* + *v*d*u*

On en déduit que :

d(*uv*) = *u*d*v*+*v*d*u*

Applications

- Calcul de la différentielle de la fonction $S(r) = \pi r^2$
  $dS = S'(r) \times dr = 2\pi r dr$

- Pour un gaz parfait, on a l'équation PV = *n* R T. On cherche à exprimer l'élément différentiel dP en fonction de dV dans le cas où *n*, R et T constantes.

$$dP = nRT(-\frac{1}{V^2})dV = -\frac{nRT}{V^2}dV = -\frac{PV}{V^2}dV = -\frac{P}{V}dV$$

Dérivée et différentielle de fonctions composées

Soit *g* une fonction composée définie par *g(x) = f(u(x))*

Dérivée : **g'(x) = f'(u(x)) × u'(x)**

Notation différentielle : **dg = g'(x)dx = f'(u) × u'(x)dx**

Exemple : $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

En posant $u = 1+x^2$ et $f(u)=1/u$, on a $g(x) = f(u(x))$.

Comme $u'(x) = 2x$ et $f'(u) = \frac{-1}{u^2}$, on obtient :

$$g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad dg = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx$$

Différentielle logarithmique (1/2)

Pour la fonction y=*f*(x) (avec y ≠ 0), la différentielle logarithmique est égale à :

$$\boxed{d(\ln|y|) = \frac{1}{y}dy = \frac{dy}{y}}$$

Remarque : $d\ln|u| = \frac{1}{u}du$

C'est toujours vrai car :

$$Si\ u > 0, \quad d\ln|u| = d\ln u = \frac{1}{u}du$$

$$Si\ u < 0, \quad d\ln|u| = d\ln(-u) = -\left(\frac{1}{-u}\right)du = \frac{1}{u}du$$

Différentielle logarithmique (2/2)

Utile quand on doit calculer la différentielle de produits, de quotients ou de racines de fonctions.

Principe : On calcule le logarithme népérien de la valeur absolue de la fonction à dériver puis sa différentielle et on en déduit la différentielle de la fonction.

Exemple : $C_a = \frac{C_b \times V_b}{V_a}$ avec C_a, C_b, V_a, $V_b > 0$

$$\ln C_a = \ln C_b + \ln V_b - \ln V_a$$

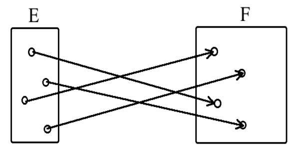
$$\frac{dC_a}{C_a} = \frac{dC_b}{C_b} + \frac{dV_b}{V_b} - \frac{dV_a}{V_a} \Rightarrow dC_a = C_a \times \left(\frac{dC_b}{C_b} + \frac{dV_b}{V_b} - \frac{dV_a}{V_a}\right)$$

(notion utilisée pour le calcul d'incertitude)

Fonctions bijectives et réciproques

Fonction bijective (1/2)

Une fonction *f* est **bijective** si, sur son domaine de définition D, tout élément de l'ensemble d'arrivée (F) est image d'un et d'un seul élément de l'ensemble de départ (E). Tout élément de F a un et un seul antécédent dans E.



Chaque élément de E a son unique image dans F et chaque élément de F a son unique antécédent dans E.

Exemple : $f(x) = 3x + 1$

Pour tout image $f(x)$, on trouvera un antécédent unique $x = \frac{f(x)-1}{3}$

La fonction affine *f* est bijective

Fonction bijective (2/2)

Contre-exemple : $f(x) = x^2$

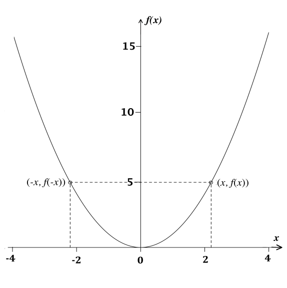
Si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$, x^2 est image de x et de $-x$

La fonction f n'est pas bijective.

Pour définir une fonction bijective, il faut limiter l'ensemble de départ E.

Si $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}^+$, x^2 est image de x seulement

La fonction f restreinte à $\mathbb{R}^+$ est bijective.



Fonction réciproque (1/2)

Si une fonction *f* est bijective de E dans F alors il existe une fonction f^{-1} bijective de F dans E telle que :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = identité$$

Cette fonction f^{-1} est la fonction **réciproque** de *f*.

$$Si \quad y = f(x), f \text{ bijective alors } x = f^{-1}(y) = g(y)$$

$$\text{Attention } f^{-1}(y) \neq f(y)^{-1} = \frac{1}{f(y)}$$

Les graphes de *f* et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite *y* = *x*). En effet, soit C_f la courbe représentative de f, ensemble des points M(x, *f*(x))et C_{f-1} la courbe représentative de f^{-1}, ensemble des points M'(*f*(x), f^{-1}(*f*(x)). Les coordonnées de M' s'écrivent aussi (*f*(x),x) donc M' est le symétrique de M par rapport à la première bissectrice.

Fonction réciproque (2/2)

- **Exemple** : x^2 et $\sqrt{x}$

$f(x) = x^2$

f est une application $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$bijective

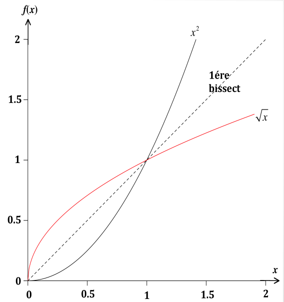
$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

En effet on peut écrire :

$f \circ f^{-1}(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = x$

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{\left(x^2\right)} = x$ car $x > 0$

Donc $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = identité$



Dérivée de fonction réciproque (1/3)

Soit y=$f(x)$ une bijection, et on note sa fonction réciproque $g = f^{-1}$

On rappelle que $f^{-1}(f(x)) = g(f(x)) = x$ par définition

En utilisant la propriété de dérivation des fonctions composées, on obtient

$g'(f(x)) \times f'(x) = 1$

On a donc : $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Remarque

Il faut que cette division soit possible : une fonction bijective dérivable, de fonction réciproque dérivable, ne peut donc avoir de dérivée nulle, elle est strictement monotone (soit croissante soit décroissante)

Dérivée de fonction réciproque (2/3)

- **Exemple : fonctions trigonométriques**

Illustration avec tg x et Arc tg x

$f(x) = \text{tg } x$; f est impaire, toujours croissante

f est π-périodique (tg(x)=tg(x + kπ))

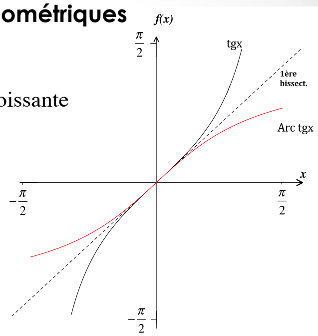
On limite le domaine de

définition de f à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Sur cet intervalle, f est bijective

et admet une fonction réciproque

$x = f^{-1}(y) = \text{tg}^{-1}(y) = \text{Arc tg}(y)$



Remarque

Les deux asymptotes verticales x = ± π/2 de la fonction tg deviennent deux asymptotes horizontales en y = ± π/2 pour la fonction Arc tg.

Dérivée de fonction réciproque (2/2)

- **Dérivée de x = Arc tg(y)**

$y = \text{tg}(x) \Rightarrow y' = 1 + \text{tg}^2(x)$

$x' = \left(\text{Arc tg}(y)\right)' = \left(\dfrac{1}{(\text{tg}(x))'}\right) = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2(x)} = \dfrac{1}{1+y^2}$

Remarque :

Les fonctions trigonométriques dont les domaines de définition sont correctement restreints présentent des fonctions réciproques intéressantes notamment pour résoudre des intégrales.

Étude des fonctions exponentielle et logarithme

Remarque
Propriétés de base des fonctions exponentielle et logarithme : voir rappels en fin de cours

Fonction exponentielle (1/4)

Définition
La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = f'(0)=1$

$$f(x)=\exp(x)=e^x \text{ avec } \exp(0)=1 \text{ et } (\exp x)' = \exp x$$

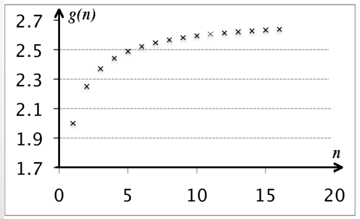
La fonction exponentielle est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$, toujours strictement positive et qui « transforme une somme en produit »

$$\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$$

Fonction exponentielle (2/4)

Valeur de la constante e
Soit la constante e définie comme :

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty} g(n)$$



On peut constater grâce à ce graphe que e ≈ 2,7

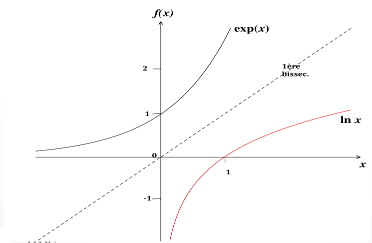
Cette constante e est le seul nombre tel que exp(1)=e

Fonction exponentielle (3/4)

Fonction réciproque
La fonction exponentielle est bijective, on lui associe donc une fonction réciproque, c'est la fonction logarithme népérien.

$\exp^{-1} = \ln$

$$y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$$



Fonction exponentielle (4/4)

Généralisation

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$) positive est la fonction non nulle définie sur $\mathbb{R}$ et continue qui « transforme une somme en produit » :

$$f(x) = a^x, f(x+y) = f(x) \times f(y) \text{ et } f(1) = a$$

a ($a > 0$) est la base de l'exponentielle (a =10 pour le pH, a = 2 pour la numération binaire en informatique).

Changement de base : $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$

Fonction logarithme (1/2)

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

$$x = \ln y \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^x$$

La fonction logarithme népérien « transforme un produit en somme » (propriété réciproque de celle de l'exponentielle).

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Remarque sur le nombre e :

$x = \ln y$ et $y = \exp(x)$ donc $x = \ln(\exp(x)) \Leftrightarrow x = \ln(\mathrm{e}^x) \Leftrightarrow x = x \ln \mathrm{e}$

On retrouve ln e = 1

Fonction logarithme (2/2)

Généralisation:

Il existe des fonctions logarithme exprimées avec d'autres bases que e, ce sont pour tout $a > 0$ la fonction $\log_a x$ telle que :

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Bases courantes : bases 2,10, e (par convention $\log_{10}$ = log)

Changement de base :

$$y = a^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln a$$

$$\text{Comme } x = \log_a y \text{ alors } \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

Remarque :

Il est conseillé de revenir en base e pour effectuer des calculs différentiels et des calculs d'intégrales.

Exercice d'application

Étude de la fonction de Gauss

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$$

La fonction g représente la densité de probabilité d'une variable normale U de moyenne (ou d'espérance) $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

Exercice d'application

- **Domaine de définition** : $D_g = \mathbb{R}$
- **Continuité** : *g* est continue car c'est une fonction composée de fonctions continues
- **Parité** : $g(-u)=g(u)$ donc *g* est une fonction paire.

La représentation graphique de *g* sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- **Périodicité :** *g* est non périodique
- **Comportement aux bornes** :

$$\lim_{u\to+\infty} g(u) = \lim_{u\to-\infty} g(u) = 0$$

Exercice d'application

- **Dérivée première** : $g'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(-u)e^{-u^2/2}$

g' s'annule en changeant de signe en $u = 0$.
$g' > 0$ pour $u < 0$; $g' < 0$ pour $u > 0$.
La représentation graphique de *f* présente un maximum en $u = 0$ et $g(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

- **Dérivée seconde :** $g''(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{u^2}{2}} + (-u)(-u)e^{-\frac{u^2}{2}}\right) = \dfrac{(u^2-1)e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$

La dérivée g'' est du signe de u^2-1 et s'annule en changeant de signe en $u = \pm 1$ ($g'' > 0$ pour $u < -1$ et $u > 1$; $g'' < 0$ pour $-1 < u < 1$).
La représentation graphique de *g* présente donc deux points d'inflexion :

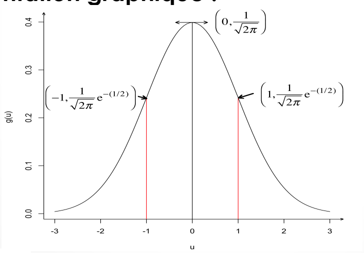
en $u = 1$ avec $g(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2} \approx 0{,}242$ et en $u = -1$ avec $g(-1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2} \approx 0{,}242$

Exercice d'application

- **Tableau de variation** :

Domaine définition de u	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$g''(u)$	+	0	–	–	–	0	+
$g'(u)$	+	+	+	0	–	–	–
$g(u)$	0 ↗			$1/\sqrt{2\pi}$	↘ 0		

- **Représentation graphique :**



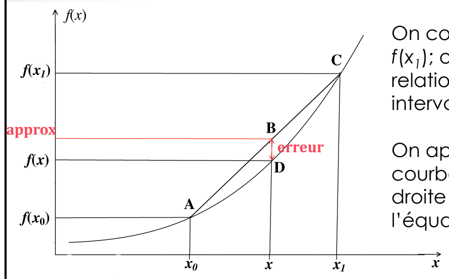
Approximation d'une fonction

L'approximation d'une fonction donnée par une fonction plus simple, le plus souvent un polynôme, est très utilisée en mathématiques appliquées.

Interpolation linéaire (1/2)

Cas où on ne connaît pas l'expression analytique de la fonction *f* mais seulement quelques points expérimentaux

On cherche la valeur de f(x) pour $x \in [x_0, x_1]$ avec $x_1 = x_0 + \Delta x$



On connaît les valeurs $f(x_0)$ et $f(x_1)$; on approche f(x) par une relation affine dans cet intervalle

On approxime l'arc de la courbe ADC par le segment de droite [AC] dont on établit l'équation *y = ax + b*

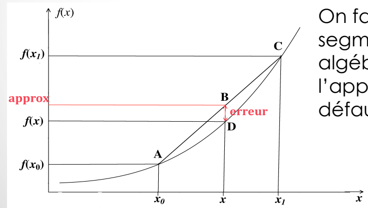
Interpolation linéaire (2/2)

Étape1 : Détermination de la pente *a* et de l'ordonnée à l'origine *b*

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ et } b = f(x_1) - ax_1 \quad ou \quad b = f(x_0) - ax_0$$

Étape 2 : Approximation de f(x)

Pour une abscisse x, on assimile f(x) à *y = ax + b* (point B)



On fait l'erreur représentée par le segment [BD]. Le signe de sa mesure algébrique renseigne sur la nature de l'approximation par excès ou par défaut.

Exemple :

x_0=2 $f(x_0)$= 4 ; x_1 = 4 $f(x_1)$ = 6

Que vaut f(x) pour x = 3

a = 1 b = 2

Donc f(3)≈ 5

Approximation affine (1/2)

Cas où on connaît l'expression analytique de la fonction *f*

On a vu précédemment que si f est continue en x_0 et que f'(x) existe :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

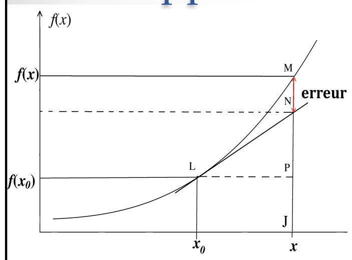
On peut réécrire cette relation pour Δx = x - x_0 suffisamment petit :

$$\Delta f = (f(x) - f(x_0)) \approx \Delta x \times f'(x_0) \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + \Delta x \times f'(x_0)$$

La droite qui en x_0 a pour pente $f'(x_0)$ est la tangente.

Si on connaît la valeur de *f* en un point x_0, on peut déduire approximativement sa valeur au point $x = x_0 + \Delta x$ à condition que Δx soit assez petit.

Approximation affine (2/2)



On fera une étude locale de *f* au voisinage de x_0 en remplaçant la courbe représentative de *f* par la tangente en $f(x_0)$ à cette courbe : c'est une approximation linéaire (d'ordre 1)

$$f(x) = \overline{JM} = \overline{JP} + \overline{PM} \approx \overline{JP} + \overline{PN}$$

$$\text{avec } \overline{PN} = f'(x_0) \times (x - x_0) \text{ ; erreur} = \overline{MN}$$

Plus Δx est petit, plus l'erreur sera faible

Exemple : f(x)=sin x

On connaît $\sin(30°) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$ et on cherche à approximer $\sin(36°) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On admet que $\frac{\pi}{5}$ est proche de $\frac{\pi}{6}$ et donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin'\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{5}\right) \approx 0{,}591$$

Valeur exacte : 0,588

Approximation par développement limité d'ordre n

On peut montrer que pour toute fonction f continue et n fois dérivable, il est possible d'approcher sa valeur en x au voisinage de x_0 ($x = x_0 + \Delta x$ avec $\Delta x \approx 0$) par un développement limité d'ordre n :

Formule de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \times f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \times f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \times f^{(n)}(x_0) + reste$$

Et le reste tend vers 0 quand n augmente

Cas particulier où $x_0 = 0$: Formule de Mac Laurin :

$$f(x) = f(0) + x \times f'(0) + \frac{x^2}{2!} \times f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} \times f^{(n)}(0) + reste$$

Et le reste tend vers 0 quand n augmente

Approximation par développement limité d'ordre n

Amélioration de l'approximation linéaire d'ordre 1

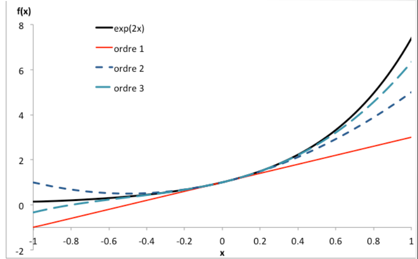
Approximation de $f(x) = e^{2x}$ au voisinage de 0

Ordre 1 : on remplace la courbe représentative de f par une droite (sa tangente)

Ordre 2 : on remplace la courbe représentative de f par un arc de parabole

$$f(x) \approx f(0) + x \times f'(0) + \frac{x^2}{2!} \times f''(0)$$

Ordre 3 : …



Remarque : on montre que ces DL sont uniques et d'autant plus exacts que x est proche de x_0

Applications

Formule de Mac Laurin :

$$f(x) = f(0) + x \times f'(0) + \frac{x^2}{2!} \times f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} \times f^{(n)}(0) + reste$$

Exemple 1 : DL de sin x au voisinage de 0 à l'ordre 3

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x$$
$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -1$$
$$\sin x = 0 + x \times 1 + 0 \times \frac{x^2}{2} + (-1) \times \frac{x^3}{3!} + \ldots = x - \frac{x^3}{6} + \ldots$$

On trouve de même $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$ (ici pas de terme en x^3)

Remarques : - On retrouve bien les parités des fonctions sin x et cos x.
- La dérivée du DL de sin x est le DL de cos x

Applications

Exemple 2 : DL de exp x au voisinage de 0 à l'ordre 3

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x \quad f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(x) = 1$$
$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

A.N. : x=0,1 ; exp(0,1)=1,1051709 (avec la calculatrice) ; DL à 5 décimales

ordre	1	2	3	4	5
DL	1,10000	1,10500	1,10516	1,10517	1,10517

Remarque : À l'ordre 4, on a atteint la « vraie » valeur.

A.N. : x=10 ; exp(10)=22026,46 (avec la calculatrice) ; DL à 2 décimales

ordre	1	2	3	4	…	29
DL	11,00	61,00	227,66	644,33	…	22026,46

Remarque : Quand on s'éloigne de l'origine, l'erreur augmente. On peut ici la compenser en augmentant l'ordre.

Développements limités utiles au voisinage de zéro

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + reste$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + reste$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + reste$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + reste$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + reste$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES BPS

Applications des DL au calcul des limites

- Calcul de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{0}{0}$ c'est une forme indéterminée

A l'aide de la formule de Taylor appliquée à sin x au voisinage de 0 (DL d'ordre 3),

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \approx \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES BPS

Annexe

Quelques rappels non traités en cours

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES BPS

Généralités sur les fonctions réelles

- **Domaine de définition**

C'est l'ensemble D_f des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer une valeur *f*(x) de la fonction *f*.

Exemples : $f(x) = 2x + 1 \quad D_f = \mathbb{R}$

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad D_g =]-1;1[$$

Dans le cas du traitement de données biologiques, le domaine d'étude de la fonction peut être différent du domaine de définition, mais il est inclus dans D.

Exemple :
Modèle mathématique du suivi de la concentration plasmatique d'un médicament : $C(t) = A\,(e^{-st} - e^{-nt})$

Domaine de Définition : $D_C = \mathbb{R}$ Domaine d'étude : $D = \mathbb{R}^+$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES BPS

Généralités sur les fonctions réelles

- **Comportement aux bornes de D**

Recherche des valeurs limites de f(x) aux bornes de D

Une droite est asymptote à la courbe représentative C de *f* si elle se rapproche infiniment de C.

— Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A$ alors la droite d'équation y = A est une asymptote horizontale en ±∞, à C.

— Si $\lim_{x\to A} f(x) = \pm\infty$ alors la droite verticale d'équation x = *a* est asymptote verticale en A, à C

— Si $\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x)-(ax+b)\right) = 0$ alors la droite y = *ax* + *b* est asymptote oblique en ±∞, à C

Généralités sur les fonctions réelles

- **Continuité**

La fonction *f* est continue sur une partie de D si et seulement si pour toute valeur de x_0 de cette partie de D, on a $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

La fonction *f* est continue en x_0 si « sur le graphe, il n'y a pas de saut en x_0 ».

Remarque
Il peut arriver qu'on observe des propriétés de continuité différentes selon qu'on tend vers x_0 par valeurs supérieures à x_0, notées x_0^+ ou inférieures à à x_0, notées x_0^- (cas des graphes en escalier)

Généralités sur les fonctions réelles

- **Tableau des principales dérivées**

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$ (ici x > 0)	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$1+\mathrm{tg}^2 x$

- **Opérations sur les dérivées**

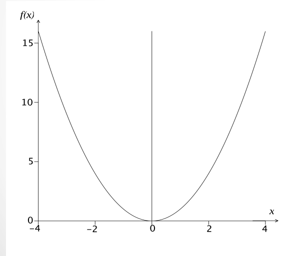
Avec $u(x)$ et $v(x)$ dérivables ($v(x) \neq 0$)

$$(u+v)' = u'+v' \qquad (uv)' = u'v+uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Généralités sur les fonctions réelles

- **Parité et périodicité**

f est paire : $\forall\, x \in \mathrm{D}\ et -x \in \mathrm{D}, f(x) = f(-x)$

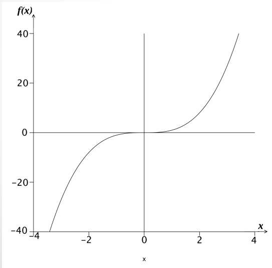


La représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Exemple : *f*(x) = x²

Généralités sur les fonctions réelles

- **Parité et périodicité**

f est impaire : $\forall\, x \in \mathrm{D}\ et\ -x \in \mathrm{D}, f(x) = -f(-x)$



La représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine des axes.
Exemple : *f*(x) = x^3

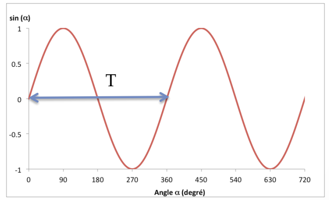
Généralités sur les fonctions réelles

- **Parité et périodicité**

f est périodique s'il existe T ≠ 0 tel que

$$\forall\, x \in \mathrm{D}, x + \mathrm{T} \in \mathrm{D} \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

Exemples : fonctions trigonométriques



Remarque :
— la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire;
— la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire;
— la dérivée d'une fonction périodique est une fonction périodique de même période T.

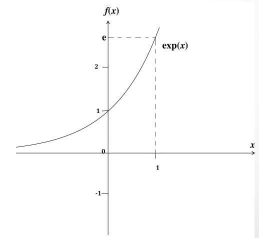
Généralités sur les fonctions réelles

- **Fonction exponentielle :** f(x)=exp(x)=e^x $D_f = \mathbb{R}$

Dérivée : $(e^x)' = e^x$ $(e^u)' = u' \times e^u$ si u est une fonction

Cette dérivée est toujours >0 donc cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$



Généralités sur les fonctions réelles

- **Fonction logarithme népérien:** f(x) = ln(x) $D_f = \mathbb{R}^{+*}$

Propriétés : $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

(ln 1 = 0 car e^0 =1)

Dérivée :

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ si u est une fonction non nulle

Cette dérivée est toujours > 0 donc cette fonction est croissante sur D_f

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^+} e^x = -\infty$$

Mathématiques Cours 2
Calcul intégral et équations différentielles

PAES – UE4

Équipe pédagogique BPS (Biomathématique, Probabilité et Statistique) Université Paris Descartes

$y' = f(x)$ ou Calcul intégral

Dans ce contexte, on ne connaît pas y mais on connaît sa dérivée c'est-à-dire la vitesse de changement de y par rapport à x ; on cherche y.
Situation très fréquente en biologie : par exemple on connaît la vitesse de croissance d'une population d'insectes en fonction du temps $p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ et on cherche la fonction $p(t)$.
Par exemple on connaît la vitesse de déplacement d'un animal en fonction du temps $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et on veut en déduire la fonction $x(t)$ décrivant la distance parcourue au cours du temps.
L'intégration est donc l'opération inverse de la dérivation.

Comment « anti-dériver » ?

Tout d'abord une condition : on « anti-dérive » sur un intervalle où la fonction est continue ; soit $[a, b]$ cet intervalle ($a < b$).
Ensuite on appliquera le théorème fondamental du calcul intégral

Théorème

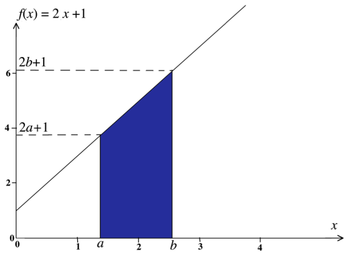
Calculer une aire sous la courbe représentative de la fonction $f(x)$ continue ou calculer une primitive de $f(x)$ sont deux façons d' « anti-dériver »qui conduisent au même résultat.

Exemple introductif

Soit une fonction affine $y = 2x + 1$. Attention, ici y c'est une dérivée et on veut « anti-dériver » y.
On vérifie le théorème précédent sur un intervalle $[a, b]$.

- Calculer l'aire délimitée par l'axe des x, la droite $y = 2x + 1$ et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Aire du trapèze : Demi-somme des bases multipliée par la hauteur
$A = 1/2[(2a + 1) + (2b + 1)](b - a) = (a + b + 1)(b - a)$



: Aire sous une droite

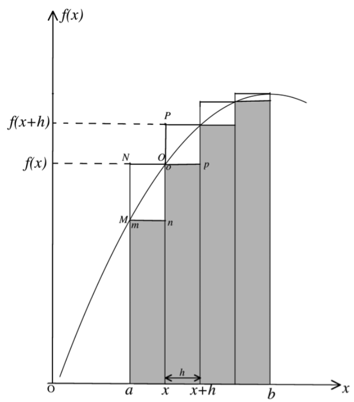
Exemple introductif suite

- Calculer une primitive $\mathrm{F}(x)$ de y :
  $\mathrm{F}(x) = x^2 + x + \mathrm{Cte}$
  $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = (b^2 + b + \mathrm{Cte}) - (a^2 + a + \mathrm{Cte}) = (a + b + 1)(b - a)$
  La Cte s'élimine car c'est la même puisque c'est la même primitive.

Donc $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{Aire sous la courbe} = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$
Autre présentation :
$\mathrm{F}(x)$ est l'ensemble des fonctions $\mathrm{F}(x) = x^2 + x + \mathrm{Cte}$
On choisit la fonction $\mathrm{S}(x)$ dont la Cte est telle que
$\mathrm{S}(a) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{S}(a) = a^2 + a + \mathrm{Cte} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Cte} = -a^2 - a$
Donc $\mathrm{S}(x) = x^2 + x - a^2 - a$
Alors $\mathrm{S}(b) = b^2 + b - a^2 - a = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

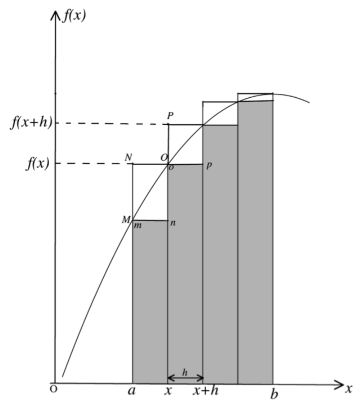
Comment calculer l'aire sous la courbe quand $f(x)$ est quelconque

Comment généraliser cette propriété si la courbe représentative de $f(x)$ n'est pas une droite ?
On décompose cette aire en aires élémentaires que l'on somme (le S du signe intégral).
On décrit des sommes d'aires de rectangles de largeur h (« pas ») constante > 0 et de hauteurs $f(x + h)$ (chemin M, N, O, P ...) sommes majorantes ou $f(x)$ (chemin m, n, o, p ...) sommes minorantes qui encadrent l'aire cherchée.



: Aire sous la courbe

Comment calculer l'aire sous la courbe quand $f(x)$ est quelconque (suite)



: Aire sous la courbe

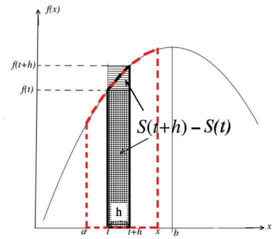
Si $h \to 0$ c'est-à-dire si le nombre de rectangles de décomposition devient infini, alors cette somme d'aires de rectangles a pour valeur limite l'aire sous la courbe (nous nous placerons dans les cas où cette limite existe, on dit alors que la fonction est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ qui sont les bornes d'intégration).

Quelle relation existe-t-il entre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et les primitives de $f(x)$? (I)

- Soit un point x variable de l'intervalle $[a, b]$ et la fonction « aire » $S(x)$
- t est la variable selon laquelle on fera la décomposition en rectangles élémentaires
- L'aire $S(x)$ est délimitée (tracé en rouge) par la droite verticale passant par $x = a$ et par celle passant par x variable (qui appartient à $[a, b]$), par l'axe des abscisses et par le tracé de la courbe.
- On va montrer que $S(x)$ est la primitive de $f(x)$ (c'est-à-dire que $S'(x) = f(x)$) qui s'annule en a.

Quelle relation existe-t-il entre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et les primitives de $f(x)$? (II)

Les aires quadrillées sont les aires $h\,f(t)$ et $h\,f(t+h)$. On observe que :
$hf(t) \leq S(t+h) - S(t) \leq hf(t+h)$ (avec $h > 0$)
$f(t) \leq \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leq f(t+h)$
$\lim_{h\to 0} f(t+h) = f(t)$ car f est continue sur $[a, b]$
Donc $lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$
Or $lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$ est la dérivée de S
Donc $S'(t) = f(t)$.



: Aire sous la courbe

Quelle relation existe-t-il entre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et les primitives de $f(x)$? (III)

- Cette relation est vraie pour toute valeur t de $[a, b]$:
  $S'(x) = f(x)$ et donc $S(x)$ est **une** primitive de $f(x)$.
- $S(a) = 0$ donc $S(x)$ est **la** primitive de $f(x)$ qui s'annule en a. Donc :
  $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = S(x)$
- D'autres lettres que t peuvent être employées sous le signe intégral, par exemple :
  $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(u)\mathrm{d}u = S(x)$
  On dit que la variable d'intégration est une variable muette.
- Que se passe-t-il en $x = b$?
  $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = S(b)$

Quel est le lien avec la famille de primitives $F(x)$?

On sait que toute fonction $f(x)$ admet un ensemble de primitives définies à une constante additive près puisque la dérivée d'une constante est nulle.
Donc $f(x)$ a une infinité de primitives qui diffèrent d'une constante arbitraire. On en connaît déjà une $S(x)$, il en existe d'autres qu'on note $F(x)$ qui différent par cette constante arbitraire Cte.
$F(x) = S(x) + Cte = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + Cte \quad Cte = ?$
en $x = a \quad F(a) = S(a) + Cte = 0 + Cte$
Donc $Cte = F(a)$
en $x = b \quad F(b) = S(b) + F(a)$
$S(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
La fonction aire en $x = b$ c'est bien la différence des deux primitives $F(b) - F(a)$ comme on l'avait vu dans l'exemple de la fonction affine.

Quelques remarques sur le signe $\int$

Attention avec le même symbole $\int$ on représente :

1. soit une intégrale qui est un nombre (intégrale définie)
   $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
   et qui peut se calculer
   - de façon approchée en évaluant l'aire sous la courbe : quand on ne connaît pas la fonction $f(x)$ ou quand on n'en connaît pas de primitive (intégration numérique).
   - ou à partir d'une primitive
     $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

   Par exemple : $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$
   Les primitives de x^2 sont $F(x) = x^3/3 + Cte$
   $F(2) = 8/3 + Cte$ et $F(1) = 1/3 + Cte$
   Ici aussi la Cte s'élimine.
   Donc $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \left[x^3/3\right]_1^2 = 8/3 - 1/3 = 7/3$

Quelques remarques sur le signe $\int$ (suite)

Attention avec le même symbole $\int$ on représente :

2. soit l'ensemble des primitives ou intégrale indéfinie
   On note $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$ cette intégrale indéfinie Par exemple :
   $\int x^2\mathrm{d}x = x^3/3 + Cte$
   $\forall$ « Cte d'intégration », la dérivée de $F(x)$ vaut x^2.
   On dit qu'on calcule l'intégrale *indéfinie* de $f(x)$, celle-ci inclut toutes les primitives possibles de $f(x)$ liées à cette Cte arbitraire.
3. soit une primitive précise de f : $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ qui s'annule en $x = a$ et qui est une fonction de x.

Quelques méthodes de calcul d'une intégrale

- Par changement de variables
- Par parties.
- Le cas des intégrations de fractions rationnelles (cas où le polynôme quotient $Q(x)$ est de degré inférieur ou égal à 2 et à racines réelles distinctes) : traité au second semestre.

On utilisera la notation différentielle
$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$
$F'(x) = f(x)$

Changement de variable

Les formules sont données pour les intégrales indéfinies mais s'appliquent aux intégrales définies à condition que la fonction soit définie sur l'intervalle d'intégration et que les bornes soient adaptées à cette nouvelle variable (ce passage aux intégrales définies peut être délicat).
On ne sait pas calculer l'intégrale $I = \int f(x)\mathrm{d}x$ On passe à la variable t telle que
$x = \phi(t) \quad \mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t \quad I = \int f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\mathrm{d}t = \int g(t)\mathrm{d}t$
et on connaît $G(t)$ une primitive de $g(t)$
En plus des primitives vues au lycée (voir les rappels) connaître ce résultat très utile : $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \mathrm{Arctg}u + Cte$ ici u peut être une fonction de x

Changement de variable – Exemple

Exemple

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$t = \frac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} \quad I = \frac{1}{4}\int \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Arctg}t + Cte = \frac{1}{2}\mathrm{Arctg}\frac{x}{2} + Cte$$

D'autres exemples sont présentés avec les rappels en annexe

Intégration par parties

On utilise cette méthode quand la fonction à intégrer est un produit de 2 fonctions dont l'une est facile à intégrer.
$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$
$u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u$

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

$\int v\mathrm{d}u$ doit être plus facile à intégrer que $\int u\mathrm{d}v$
Le résultat final s'exprimera avec une constante arbitraire.
En général :

- on choisit les polynômes, les logarithmes comme fonction u car ces fonctions sont faciles à dériver ;
- on choisit les exponentielles, les fonctions trigonométriques comme élément $\mathrm{d}v$ car ces fonctions sont faciles à intégrer.

Intégration par parties – Exemples

Exemples

- $\int_a^b P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$ où P_n est un polynôme de degré n
  on pose $u = P_n(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = P_n'(x)\mathrm{d}x = P_{n-1}(x)\mathrm{d}x$
  $\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \Rightarrow v = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$
  $\int_a^b P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{k}P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\right]_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b P_{n-1}(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$
  L'intégrale du membre de droite est plus simple car le polynôme est de degré $n-1$; on continue par récurrence.
- Intégrer des produits de fonctions sinus ou cosinus de x avec une exponentielle : Ici on a le choix entre ce qu'on appellera u et ce qu'on appellera $\mathrm{d}v$.
  Soit : $\int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x = I$
  On pose $u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x$
  On pose $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x$
  $I = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)/2 + Cte$
  (détail des étapes dans les Rappels en annexe)
  Le choix inverse $u = \mathrm{e}^x$ et $\mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x$ aurait conduit au même résultat.

Application : valeur moyenne d'une fonction

Soit

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

On appelle valeur moyenne m de la fonction sur l'intervalle $[a,b]$ une valeur de $f(x)$ telle que

$$m \times (b-a) = I$$

Ou encore :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Application : valeur moyenne d'une fonction – Exemple

Exemple

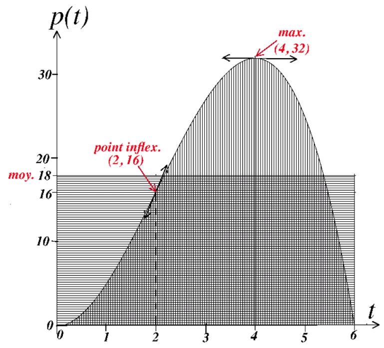
Le nombre p de patients présents dans un service hospitalier, en fonction du temps (exprimé en mois), suit la relation :
$p(t) = 6t^2 - t^3 = t^2(6-t)$
Sur la période des 6 premiers mois ($0 \leq t \leq 6$), quel est le nombre moyen de patients présents dans ce service ?
Bien que ce polynôme soit défini sur $\Re$ le domaine d'étude doit être limité aux valeurs de t qui rendent $p(t) \geq 0$, donc $t \in [0, 6]$

$$p_{moy} = \frac{1}{6-0}\int_0^6 (6t^2 - t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left[\frac{6t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^6 = 18\text{patients}$$

Valeur moyenne d'une fonction – Exemple – suite

Exemple

On remarque un maximum le 4^e mois avec 32 patients, et un point d'inflexion traduisant un changement de concavité de la courbe au point (2, 16).
L'aire du rectangle de hauteur 18 et de largeur 6 (traits horizontaux), est égale à l'aire sous la courbe de la fonction $p(t)$ (traits verticaux) entre 0 et 6 mois : elle vaut 108 patients$\times$mois.



: Calcul d'une moyenne

Le contexte (I)

Beaucoup de problèmes en relation avec le monde du vivant impliquent des vitesses de changement.
Mathématiquement, ces vitesses de changement s'expriment par des dérivées, ainsi les équations qui traduisent ces changements contiennent la fonction étudiée $y(x)$, sa dérivée $y'(x)$ et la variable dont elle dépend x :

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

Résoudre une équation différentielle c'est trouver la fonction $y(x)$ qui satisfait cette équation.

Le contexte (II)

Une telle équation qui contient une dérivée d'ordre 1 s'appelle équation différentielle d'ordre 1 ; si les dérivées vont jusqu'à l'ordre n de dérivation, on dit qu'on a une équation différentielle d'ordre n.
Si l'équation se rapporte à une seule variable x c'est une équation différentielle ordinaire.
Dans des cas plus compliqués la fonction étudiée peut être une fonction de plusieurs variables ; les dérivées sont alors des dérivées partielles (voir cours 3) et les équations sont des équations aux dérivées partielles.

Le contexte (III)

Dans le cadre de notre programme, on étudiera seulement les équations différentielles ordinaires d'ordre 1 et certaines équations différentielles ordinaires d'ordre 2 de résolution « simple ».
Pour ces équations on pourra trouver des solutions analytiques, ce n'est pas le cas général, et lorsque ces solutions analytiques n'existent pas on utilise des méthodes numériques mises en œuvre sur ordinateur.

Exemples introductifs

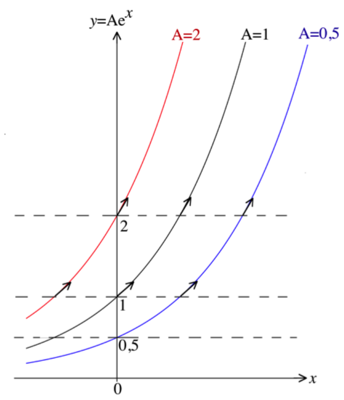
$$y' = y \tag{1}$$

C'est l'équation la plus simple, on l'a déjà introduite dans la définition de la fonction exponentielle. On a vu que e^x est la solution de cette équation qui prend la valeur 1 en $x = 0$.
La solution générale de cette équation (1) est $A\mathrm{e}^x$ puisque quelle que soit la valeur de A, l'équation (1) est vérifiée. À chaque valeur de la constante correspond une solution particulière qu'on notera Y.
L'équation (1) est d'ordre 1, sa solution générale s'exprime avec une constante arbitraire. On peut généraliser :

La solution générale d'une équation différentielle d'ordre n s'exprime avec n constantes arbitraires.

Exemples introductifs. I : $y' = y$

Ci-contre 3 solutions particulières de l'équation (1) avec trois valeurs de A.
En $y = 1$ et $y = 2$ on a représenté les tangentes qui vérifient l'équation (1).
L'ensemble de ces courbes forme la représentation de la solution générale de cette équation (1).

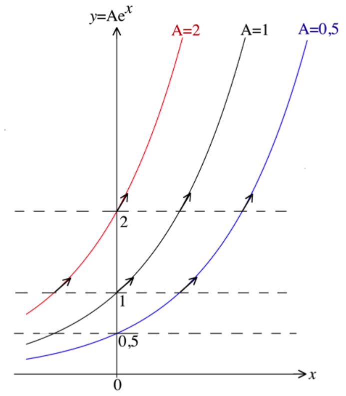


: Solutions de l'équation (1)

Exemples introductifs. I : $y' = y$

Ci-contre 3 solutions particulières de l'équation (1) avec trois valeurs de A. En $y = 1$ et $y = 2$ on a représenté les tangentes qui vérifient l'équation (1). L'ensemble de ces courbes forme la représentation de la solution générale de cette équation (1).

Ces solutions sont valables sur l'intervalle d'étude de l'équation différentielle, qui peut être différent de l'intervalle sur lequel y est dérivable (si on s'intéresse à une évolution d'une population en fonction du temps t il faut se limiter aux valeurs de $t \in [0, +\infty[$).



: Solutions de l'équation (1)

Exemples introductifs. II : $y' = ky$

$$y' = ky \qquad (2)$$

Première méthode exponentielle intuitive.
Ici k est une constante $\in \Re$.
La solution générale est la famille de fonctions exponentielles $y = A\mathrm{e}^{kx}$.
En effet $y' = kA\mathrm{e}^{kx} = ky$.
On pourra extraire, au sein de cette famille d'exponentielles, une fonction Y dite « solution particulière »par exemple celle pour laquelle $y(0) = 1 : 1 = A \times \mathrm{e}^0$ donc $A = 1$ donc $Y = \mathrm{e}^{kx}$
Dans les applications à la biologie, on dispose en général d'information sur les conditions initiales qui permettent de déterminer ces solutions particulières Y.

Exemples introductifs. II : $y' = ky$

Deuxième méthode en séparant les variables.
$y' = ky \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = k\mathrm{d}x$
Pour cette étape de division par y on suppose $y \neq 0$ (bien que $y = 0$ soit solution évidente de l'équation différentielle). Il s'en suit deux intégrations, l'une sur la variable x (variable indépendante) l'autre sur la variable y (variable dépendante de x car $y = f(x)$). Bien que l'on fasse deux intégrations, qui génèrent chacune une constante arbitraire, il y a seulement une constante arbitraire indépendante combinaison linéaire des deux constantes précédentes.
$\ln|y| + \mathrm{Cte1} = kx + \mathrm{Cte2} \qquad \mathrm{Cte} = \mathrm{Cte2} - \mathrm{Cte1}$
$|y| = \mathrm{e}^{kx+\mathrm{Cte}} = \mathrm{K}\mathrm{e}^{kx}$ avec $\mathrm{K} = \mathrm{e}^{\mathrm{Cte}} > 0$
$y = \pm\mathrm{K}\mathrm{e}^{kx} = A\mathrm{e}^{kx} \quad (A \neq 0)$

Exemples introductifs. II : $y' = ky$

On retrouve la même solution $y = A\mathrm{e}^{kx}$ que précédemment. On remarque qu'elle ne s'annule pas et donc que la division préliminaire par y était possible.
Cette solution est la forme très classique d'élimination d'un médicament par l'organisme après une administration unique, rapide, par voie intraveineuse. En effet, on trouve expérimentalement que la vitesse de décroissance de la concentration plasmatique est proportionnelle à la concentration à chaque instant. L'équation différentielle s'écrit donc $\mathrm{C}' = \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dt}} = -k\mathrm{C} \quad (k > 0)$ soit $\mathrm{C} = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-kt}$. Au temps $t = 0$, $\mathrm{A} = \mathrm{C}(0) = \mathrm{C}_0$ donc $\mathrm{C} = \mathrm{C}_0\mathrm{e}^{-kt}$

Équations à variables séparables

Soit une équation qu'on peut mettre sous la forme :

$$y' f(y) = g(x)$$

($y' = ky$ en est un cas particulier avec $f(y) = \frac{1}{y}$ et $g(x) = k$)
On dit que cette équation est à variables séparables.
On exprime $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)}{f(y)}$
On peut alors regrouper dans les deux membres de l'équation les variables x et y :
$f(y)\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int f(y)\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x$
$\mathrm{F}(y) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{Cte}$ où F et G sont des primitives de f et g

Équations à variables séparables ; Exemple 1

Résoudre $y'\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| + \mathrm{constante}$$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$ s'intègre par changement de variable

$u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x$ donc

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + \mathrm{constante} = -\ln|\cos x| + \mathrm{constante}$

$$\ln|y| + \ln|\cos x| = \mathrm{K} \Rightarrow \ln|y\cos x| = \mathrm{K} \Rightarrow y\cos x = \pm \mathrm{e}^{\mathrm{K}}$$

$y = \frac{\mathrm{A}}{\cos x}$ en posant $\mathrm{A} = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{K}}$

Équations à variables séparables ; Exemple 1

Résoudre $y'\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| + \mathrm{constante}$$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$ s'intègre par changement de variable

$u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x$ donc

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + \mathrm{constante} = -\ln|\cos x| + \mathrm{constante}$

$$\ln|y| + \ln|\cos x| = \mathrm{K} \Rightarrow \ln|y\cos x| = \mathrm{K} \Rightarrow y\cos x = \pm \mathrm{e}^{\mathrm{K}}$$

$y = \frac{\mathrm{A}}{\cos x}$ en posant $\mathrm{A} = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{K}}$

Équations à variables séparables ; Exemple 1

Résoudre $y'\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| + \mathrm{constante}$$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$ s'intègre par changement de variable

$u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x$ donc

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + \mathrm{constante} = -\ln|\cos x| + \mathrm{constante}$

$$\ln|y| + \ln|\cos x| = \mathrm{K} \Rightarrow \ln|y\cos x| = \mathrm{K} \Rightarrow y\cos x = \pm \mathrm{e}^{\mathrm{K}}$$

$y = \frac{\mathrm{A}}{\cos x}$ en posant $\mathrm{A} = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{K}}$

Équations à variables séparables ; Exemple 1

Résoudre $y'\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{cos}x}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \int \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{cos}x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| + \mathrm{constante}$$

$\int \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{cos}x}\mathrm{d}x$ s'intègre par changement de variable

$u = \mathrm{cos}x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{sin}x\mathrm{d}x$ donc

$$\int \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{cos}x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + \mathrm{constante} = -\ln|\mathrm{cos}x| + \mathrm{constante}$$

$$\ln|y| + \ln|\mathrm{cos}x| = \mathrm{K} \Rightarrow \ln|y\mathrm{cos}x| = \mathrm{K} \Rightarrow y\mathrm{cos}x = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{K}}$$

$y = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cos}x}$ en posant $\mathrm{A} = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{K}}$

Calcul intégral — Résolution d'équations différentielles
Généralisation : équations à variables séparables

Équations à variables séparables ; Exemple 1

Résoudre $y'\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{cotg}x = y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{cos}x}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{cotg}x} = \int \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{cos}x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| + \mathrm{constante}$$

$\int \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{cos}x}\mathrm{d}x$ s'intègre par changement de variable

$u = \mathrm{cos}x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{sin}x\mathrm{d}x$ donc

$$\int \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{cos}x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + \mathrm{constante} = -\ln|\mathrm{cos}x| + \mathrm{constante}$$

$$\ln|y| + \ln|\mathrm{cos}x| = \mathrm{K} \Rightarrow \ln|y\mathrm{cos}x| = \mathrm{K} \Rightarrow y\mathrm{cos}x = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{K}}$$

$y = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cos}x}$ en posant $\mathrm{A} = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{K}}$

Exemple 2 : Loi du refroidissement de Newton

Une masse placée dans un courant froid maintenu à température constante S se refroidit à une vitesse proportionnelle à l'écart de température entre sa propre température T à un instant t et la température S.

- Traduire cette loi par une équation :
  T est une fonction de t alors que S est constante. La vitesse de décroissance de T est $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$; elle est proportionnelle à $T - S$ (ici $T > S$) ; avec un coefficient de proportionnalité $k > 0$, on obtient l'équation différentielle :
  $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - S)$
- Résoudre cette équation par séparation des variables :
  $\frac{\mathrm{d}T}{T-S} = -k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}T}{T-S} = -\int k\mathrm{d}t$
  $\ln|T - S| = -kt + Cte \Rightarrow T - S = \mathrm{e}^{-kt+Cte} = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-kt}$ avec $A = \mathrm{e}^{Cte}$
  solution générale $T = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-kt} + S$

Calcul intégral — Résolution d'équations différentielles
Généralisation : équations à variables séparables

Exemple 2 : Loi du refroidissement de Newton

Une masse placée dans un courant froid maintenu à température constante S se refroidit à une vitesse proportionnelle à l'écart de température entre sa propre température T à un instant t et la température S.

- Traduire cette loi par une équation :
  T est une fonction de t alors que S est constante. La vitesse de décroissance de T est $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$; elle est proportionnelle à $T - S$ (ici $T > S$) ; avec un coefficient de proportionnalité $k > 0$, on obtient l'équation différentielle :
  $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - S)$
- Résoudre cette équation par séparation des variables :
  $\frac{\mathrm{d}T}{T-S} = -k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}T}{T-S} = -\int k\mathrm{d}t$
  $\ln|T - S| = -kt + Cte \Rightarrow T - S = \mathrm{e}^{-kt+Cte} = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-kt}$ avec $A = \mathrm{e}^{Cte}$
  solution générale $T = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-kt} + S$

Exemple 2 : Loi du refroidissement de Newton

- Trouver la solution particulière exprimant la température atteinte par un corps initialement à 40˚C placé dans un courant d'air à 10˚C.
  Au temps $t = 0$, $T = 40$˚C et $S = 10$˚C. On en déduit la valeur de la constante d'intégration $A = 30$˚C.
  solution particulière $T = 30\mathrm{e}^{-kt} + 10$
- Sachant qu'au temps $t = 2\mathrm{h}$ le corps a atteint une température de 25˚C, au bout de combien de temps aura-t-il atteint 15˚C ?
  Cette information permet de calculer le paramètre k du modèle :
  $25 = 30\mathrm{e}^{-2k} + 10 \Rightarrow 2 = \mathrm{e}^{2k} \Rightarrow k \approx 0,347\mathrm{h}^{-1}$
  $15 \approx 30\mathrm{e}^{-0,347t} + 10 \Rightarrow t \approx (\ln 6)/0,347 \approx 5,16\mathrm{h}$

Calcul intégral
Résolution d'équations différentielles
Généralisation : équations à variables séparables
Exemple 2 : Loi du refroidissement de Newton
Trouver la solution particulière exprimant la température atteinte par un corps initialement à 40˚C placé dans un courant d'air à 10˚C.
Au temps $t = 0$, $T = 40$˚C et $S = 10$˚C. On en déduit la valeur de la constante d'intégration $A = 30$˚C.
solution particulière $T = 30\mathrm{e}^{-kt} + 10$
Sachant qu'au temps $t = 2\mathrm{h}$ le corps a atteint une température de 25˚C, au bout de combien de temps aura-t-il atteint 15˚C ?
Cette information permet de calculer le paramètre k du modèle :
$25 = 30\mathrm{e}^{-2k} + 10 \Rightarrow 2 = \mathrm{e}^{2k} \Rightarrow k \approx 0,347\mathrm{h}^{-1}$
$15 \approx 30\mathrm{e}^{-0,347t} + 10 \Rightarrow t \approx (\ln 6)/0,347 \approx 5,16\mathrm{h}$

Équations différentielles du premier ordre, linéaires

On vient de voir successivement l'équation : $y' = ky$ et sa forme plus générale $y'f(y) = g(x)$.
Cette dernière peut être écrite aussi :
$y' + h(y)g(x) = 0 \qquad \left(\text{avec } h(y) = -\frac{1}{f(y)}\right)$
Dans des situations plus réalistes le second membre n'est pas nul, c'est une fonction de la variable x.
$y' + h(y)g(x) =$ fonction de x
On présente ici une famille d'équations de ce type, de résolution simple : les équations différentielles du premier ordre, linéaires.

Équations différentielles du premier ordre, linéaires, exemple

Exemple

La variation de la concentration plasmatique de métabolites $\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}t}$ au cours d'un repas est le résultat d'une compétition entre une vitesse d'élimination de type exponentielle comme vu précédemment (terme $-k\mathrm{C}$) et d'une vitesse d'absorption M (supposée constante).
L'équation différentielle associée s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{M} - k\mathrm{C}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, linéaire à coefficients constants.

Définitions

- Équation linéaire
  Si $y, y' \dots$ n'apparaissent que sous forme « additive »c'est-à-dire qu'il n'y a pas de puissance ni de produit de ces fonctions, l'équation est dite *linéaire*. Dans l'équation $y' + h(y)g(x) = 0$ on a $h(y) = y$.
- Coefficients
  Les *coefficients* sont les termes en facteurs de y et y'. Seuls des coefficients constants seront vus dans ces cours du 1^{er} semestre ; le cas des coefficients variables sera traité au 2^d semestre.
- Membres
  On a l'habitude de regrouper dans le membre de gauche tout ce qui contient la fonction y et ses dérivées et dans le membre de droite (appelé 2^d *membre*) les termes contenant la variable et d'éventuelles constantes.

Forme générale d'une équation différentielle du premier ordre, linéaire à coefficients constants

Une équation différentielle du premier ordre, linéaire à coefficients constants est donc du type :

$$ay'(x) + by(x) = g(x)$$

On a l'habitude de ne pas écrire la variable x pour y et y'.

$$ay' + by = g(x)$$

a et b sont les *coefficients* ici constants
$ay' + by$ qui contient y et y' est le *premier membre* ;
$g(x)$ qui ne contient ni y ni y' est le *second membre*.

Exemples et contre-exemples

- Équations linéaires ou non
  $2xy - 3y' = e^x$ est une équation linéaire
  $2y^2 - 3y' = 0$ n'est pas une équation linéaire (terme en y^2)
  $4yy' + 3y = e^x + 3$ n'est pas une équation linéaire (terme en yy')
- Équation avec ou sans second membre
  $2xy - 3y' + 2 = e^x$ ou $2xy - 3y' = e^x - 2$ est une équation avec second membre (*EASM*)
  - $2xy - 3y'$ est le membre de gauche ou 1^{er} membre
  - $e^x - 2$ est le membre de droite ou 2^d membre.

  $2xy - 3y' = 0$ est une équation sans second membre (*ESSM*)

Principes généraux de résolution

Recherche de la Solution Générale de l'Équation Avec Second Membre (*SGEASM*) y telle que :

$$ay' + by = g(x)$$

En 3 étapes :

1. Recherche de la Solution Générale de l'Équation Sans Second Membre (*SGESSM*) y_0 telle que :

$$ay_0' + by_0 = 0$$

Cette solution générale s'exprime **avec** une constante arbitraire.
On trouve y_0 par intégration intuitive sous forme exponentielle ou par séparation de variables.

Principes généraux de résolution

2. Recherche d'une Solution Particulière de l'Équation Avec Second Membre (*SPEASM*) Y telle que

$$aY' + bY = g(x)$$

Cette solution particulière s'exprime **sans** constante arbitraire. Pour trouver Y on se met dans les conditions où la méthode par identification (lorsque les coefficients sont constants et que les seconds membres sont des fonctions « particulières »). Bien sûr, on n'oubliera pas de chercher des solutions évidentes.

Principes généraux de résolution

3. On montre que : $y = y_0 + Y$

En effet : y vérifie l'équation $ay' + by = g(x)$
De même Y vérifie cette équation $aY' + bY = g(x)$
Alors $y - Y$ vérifie l'*ESSM*
En effet $a\,(y' - Y') + b\,(y - Y) = 0$
Or $y' - Y' = (y - Y)'$
Donc $a\,(y - Y)' + b\,(y - Y) = 0$ et $y - Y$ est solution de *ESSM*
$y - Y = y_0 \Leftrightarrow y = y_0 + Y$

Étape 1 : recherche de y_0 (*SGESSM*)

On va montrer que dans tous les cas $y_0 = \mathrm{K}f(x)$

- coefficients constants
  - solution exponentielle intuitive
    $y_0' = -\frac{b}{a}y_0 \Rightarrow y_0 = \mathrm{K}e^{-\frac{b}{a}x}$
  - solution par séparation de variables
    $ay_0' + by_0 = 0 \qquad y_0' = \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}$
    $a\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x} = -by_0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y_0}{y} = -\frac{b}{a}\mathrm{d}x$
    $\ln|y_0| = -\frac{b}{a}x + \mathrm{Cte}$ avec $\mathrm{K} = \pm e^{\mathrm{C}te}$
    $y_0 = \mathrm{K}e^{-\frac{b}{a}x} = \mathrm{K}f(x)$

Étape 1 : recherche de y_0 (*SGESSM*)

Exemple

Étude de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{M} - ky$
C'est l'équation d'évolution de la concentration plasmatique d'un métabolite au cours d'un repas : $\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{M} - k\mathrm{C}$ dans laquelle on a remplacé C par y.
ESSM : $y_0' + ky_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \mathrm{K}e^{-kt}$

Étape 2 : recherche de Y (*SPEASM*) par **identification**

Elle s'applique quand les coefficients sont constants et que les seconds membres sont des « bonnes fonctions ».
Bonne fonction : une fonction qui lorsqu'on la dérive donne une fonction du même type :

- polynôme (degré n) car sa dérivée est un polynôme (degré $n-1$)
- exponentielle, car la dérivée est une exponentielle
- une fonction trigonométrique sin ou cos car leur dérivée est une fonction de ce type (cos ou sin)
- toute combinaison simple de ces fonctions (addition, multiplication . . .)

Étape 3 : recherche de y (*SGEASM*)

Exemple

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{M} - ky \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ky = \mathrm{M}$
On pose $Y = \mathrm{L}$ (une constante du type de M)
On écrit que Y vérifie l'équation différentielle
$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}t} + kL = \mathrm{M}$ or $\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}t} = 0$ car L est une constante.
$Y = \mathrm{L} = \frac{\mathrm{M}}{k}$
$y = y_0 + Y = \mathrm{K}e^{-kt} + \frac{\mathrm{M}}{k}$
On revient à la notation $y = C(t)$: $C(t) = \mathrm{K}e^{-kt} + \frac{\mathrm{M}}{k}$
C'est la *SGEASM*.
La constante d'intégration K est obtenue si on connaît
$\mathrm{C}(0) = \mathrm{C}_0$ la concentration du métabolite en $t = 0$:
$\mathrm{C}(0) = \mathrm{C}_0 = \mathrm{K}e + \frac{\mathrm{M}}{k} \Rightarrow \mathrm{K} = \mathrm{C}_0 - \frac{\mathrm{M}}{k}$
$C(t) = \mathrm{C}_0 \mathrm{e}^{-kt} + \frac{\mathrm{M}}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$
C'est une solution particulière de *EASM*.

Étape 3 : recherche de y (*SGEASM*)

Exemple

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{M} - ky \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ky = \mathrm{M}$
On pose $Y = \mathrm{L}$ (une constante du type de M)
On écrit que Y vérifie l'équation différentielle
$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}t} + kL = \mathrm{M}$ or $\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}t} = 0$ car L est une constante.
$Y = \mathrm{L} = \frac{\mathrm{M}}{k}$
$y = y_0 + Y = \mathrm{K}e^{-kt} + \frac{\mathrm{M}}{k}$
On revient à la notation $y = C(t)$: $C(t) = \mathrm{K}e^{-kt} + \frac{\mathrm{M}}{k}$
C'est la *SGEASM*.
La constante d'intégration K est obtenue si on connaît
$\mathrm{C}(0) = \mathrm{C}_0$ la concentration du métabolite en $t = 0$:
$\mathrm{C}(0) = \mathrm{C}_0 = \mathrm{K}e + \frac{\mathrm{M}}{k} \Rightarrow \mathrm{K} = \mathrm{C}_0 - \frac{\mathrm{M}}{k}$
$C(t) = \mathrm{C}_0 \mathrm{e}^{-kt} + \frac{\mathrm{M}}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$
C'est une solution particulière de *EASM*.

Étape 3 : recherche de y (*SGEASM*)

Exemple

$y' + y = x^2$ (par identification)
$y_0 = \mathrm{K}e^{-x}$
On pose Y du type du second membre : polynôme de degré 2 :
On écrit que $Y = mx^2 + px + q$ (et donc $Y' = 2mx + p$) vérifie l'*EASM* :
$Y' + Y = x^2 \Rightarrow (2mx + p) + (mx^2 + px + q) = x^2 \Rightarrow$
$mx^2 + (2m + p)x + (p + q) = x^2 + 0x + 0$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ 2m + p = 0 \\ p + q = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ p = -2 \\ q = 2 \end{array} \right.$$

Donc

$$y(x) = \mathrm{K}e^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

Étape 3 : recherche de y (*SGEASM*)

Exemple

$y' + y = x^2$ (par identification)
Donc

$$y(x) = \mathrm{K}\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

On peut dans cette famille de courbes trouver par exemple celle qui passe par l'origine :
$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = K + 2 = 0 \Rightarrow K = -2$
C'est la courbe d'équation $-2\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x + 2$

Mathématiques: Cours 3
Fonctions de plusieurs variables

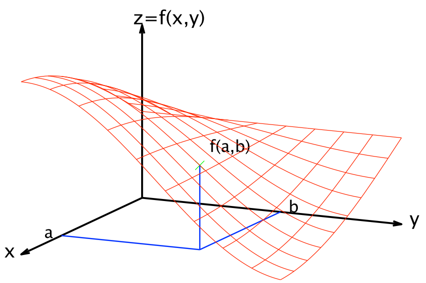
PAES – UE4

Équipe pédagogique BPS (Biomathématique, Probabilité et Statistique) Université Paris Descartes

Table des matières

Fonctions de deux variables

Comme une fonction d'une variable est représentée par une courbe dans le plan, une fonction de deux variables est représentée par une surface dans l'espace.
À chaque point du plan (x, y) correspond une élévation (ou côte) $z = f(x,\ y)$



: $z = f(x, y)$

Grandeurs dépendant de deux variables. I

Les grandeurs biologiques ou physicochimiques dépendant de plusieurs variables sont très courantes.

Exemple

Le pH de la solution d'un acide faible de constante d'ionisation $\mathrm{K_a}$ dépend des concentrations de sa forme acide y et de sa forme basique x [1] : $\mathrm{pH} = f(x, y) = a + \log \frac{x}{y}$

1. Équation d'Henderson–Hasselbalch ; $a = -\log \mathrm{K_a} = \mathrm{pK_a}$

Grandeurs dépendant de deux variables. II

Exemple

La concentration plasmatique d'un médicament administré par voie orale dépend de la dose administrée x et du temps t :
$\mathrm{C} = f(x,t) = \mathrm{K} \cdot x \left(\mathrm{e}^{-a \cdot t} - \mathrm{e}^{-b \cdot t}\right)$

Ici, K, a et b sont des paramètres constants, seuls x et t sont des variables. [2]

2. Équation déjà vue en cours 1 où la constante $\mathrm{A} = \mathrm{K} \cdot x$ incluait, entre autres, la dose x, considérée comme constante lors du cours 1.

Définition d'une fonction de deux variables.

Définition

Une application f définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ et prenant des valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction réelle de deux variables :
$f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto f(x,y)$

Ainsi, la fonction f fait correspondre à chaque couple de valeurs (x,y) une valeur $f(x,y)$:
$\forall\, (x,y) \in \mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in \mathbb{R}$

Exemple

$f(x,y) = x^2 + 4x \cdot y$
$f(3,5) = 3^2 + 4 \times 3 \times 5 = 69 \qquad (3,5) \mapsto 69$

Grandeurs dépendant de plusieurs variables.

La notion de fonction de deux variables peut bien évidemment être étendue à plusieurs variables.

Exemple

L'énergie d'interaction U entre deux ions chargés dépend de leurs charges q_1 et q_2 et de la distance r qui les sépare [3] :
$$\mathrm{U} = f(q_1, q_2, r) = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r}$$

f est une fonction des trois variables q_1, q_2 et r.

3. Loi de Coulomb

Définition d'une fonction de trois variables.

Définition

Une application f définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^3$ et prenant des valeurs réelles dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction réelle de 3 variables :
$f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$

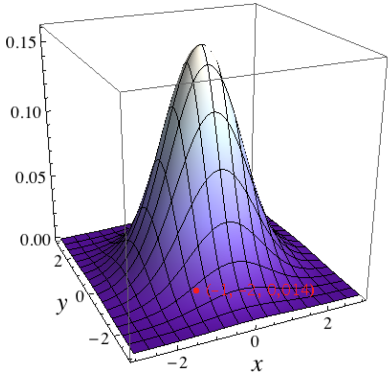
Exemple

$f(x,y,z) = \frac{3x}{y-z}$
$f(-2,5,1) = \frac{-3 \times 2}{5-1} = -1{,}5$

Surfaces dans l'espace

Comme on l'a déjà vu, la représentation graphique d'une fonction de deux variables est une surface dans l'espace. Les deux variables correspondent aux axes x et y, la valeur de la fonction donne l'élévation z.

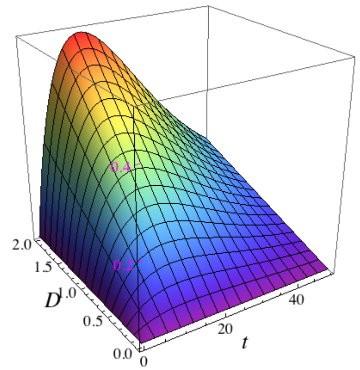
cf. La représentation graphique d'une fonction d'une variable est une courbe dans le plan.



: $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ exemple :
$f(-1, -2) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{(-1)^2+(-2)^2}{2}} \approx 0,014$

Surfaces dans l'espace

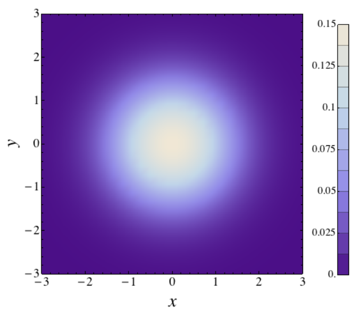
La surface peut être colorée selon la valeur de z afin de mieux visualiser les valeurs de la fonction.
Par exemple, ci–contre les valeurs de la fonction sont représentées par un spectre de couleurs allant du violet pour les valeurs les plus faibles vers le rouge pour les valeurs les plus élevées.

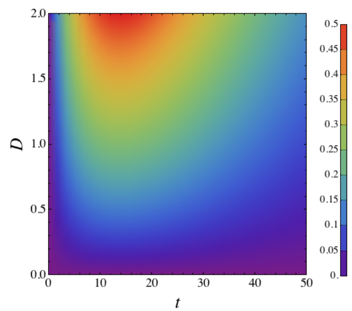


: $f(\mathrm{D}, t) = \mathrm{D}(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt})$

Graphes densité

Une alternative à la représentation en 3D d'une surface dans l'espace est le *graphe densité* : une projection dans un plan avec un code couleurs qui correspond à la valeur de la fonction.

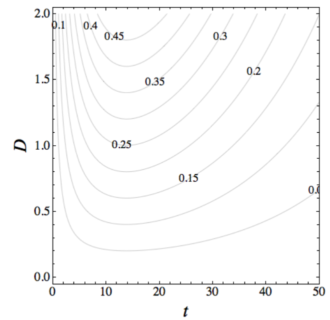


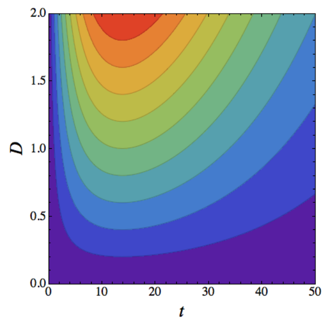


: $f(x, y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$: $f(\mathrm{D}, t) = \mathrm{D}(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt})$

Courbes de niveaux

Une autre représentation de la projection dans un plan consiste en un tracé de courbes de niveaux z constants, où est éventuellement superposé le graphe densité.





: $f(\mathrm{D}, t) = \mathrm{D}(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt})$: $f(\mathrm{D}, t) = \mathrm{D}(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt})$

Influence de la variation d'une variable sur la fonction

Un constat Il est évident que la variation de n'importe quelle variable aura une influence sur la valeur de la fonction.

Le problème Comment calculer cette influence ?

La solution En passant par le calcul des dérivées partielles et de la différentielle

Influence de la variation d'une variable sur la fonction

Un constat Il est évident que la variation de n'importe quelle variable aura une influence sur la valeur de la fonction.

Le problème Comment calculer cette influence ?

La solution En passant par le calcul des dérivées partielles et de la différentielle

Influence de la variation d'une variable sur la fonction

Un constat Il est évident que la variation de n'importe quelle variable aura une influence sur la valeur de la fonction.

Le problème Comment calculer cette influence ?

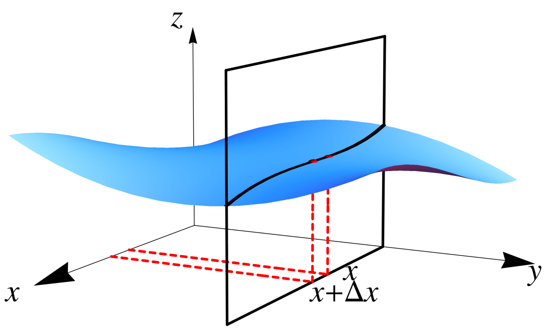
La solution En passant par le calcul des dérivées partielles et de la différentielle

Dérivée partielle selon x

Soit
$f(x,y) = -x^3 + x \cdot y^2$

La dérivée partielle de f par rapport à x est calculée en dérivant la fonction par rapport à x en considérant que y est une constante :

$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + y^2$



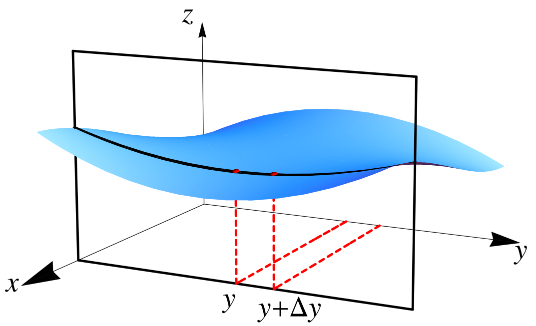
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Dérivée partielle selon y

Soit
$f(x, y) = -x^3 + x \cdot y^2$

La dérivée partielle de f par rapport à y est calculée en dérivant la fonction par rapport à y en considérant que x est une constante :

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x \cdot y$



$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Définition de la dérivée partielle selon x

Soit $f(x, y)$ une fonction de 2 variables définie sur $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ et un point $\mathrm{A} = (x_0, y_0) \in \mathrm{E}$. Alors :
$f(x, y_o)$ est une fonction d'une seule variable, x

Définition

Si la limite
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$
existe, alors elle est appellée dérivée partielle de premier ordre de f au point A et est notée
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Le symbole f'_x se rencontre aussi.

Définition de la dérivée partielle selon y

Soit $f(x, y)$ une fonction de 2 variables définie sur $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ et un point $\mathrm{A} = (x_0, y_0) \in \mathrm{E}$. Alors :
$f(x_o, y)$ est une fonction d'une seule variable, y

Définition

Si la limite
$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$
existe, alors elle est appellée dérivée partielle de premier ordre de f au point A et est notée
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Le symbole f'_y se rencontre aussi.

Mise en pratique

En pratique, pour calculer la dérivée partielle selon une variable, on dérive en considérant les autres variables comme constantes. On retrouve alors les formules de dérivation des fonctions d'une variable.
Une fonction de n variables admet n dérivées partielles de premier ordre.
Les règles de dérivation des fonctions d'une variable restent valables. Notamment :

- $\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial y} = 0$ où c est une constante
- $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$
- $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$

Exemples

Exemples

$$\frac{\partial\,(5x-3y)}{\partial x}=5 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\,(5x-3y)}{\partial y}=-3$$

$$\frac{\partial\left(a+\log\frac{x}{y}\right)}{\partial x}=\frac{1}{x\ln 10} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\left(a+\log\frac{x}{y}\right)}{\partial y}=-\frac{1}{y\ln 10}$$

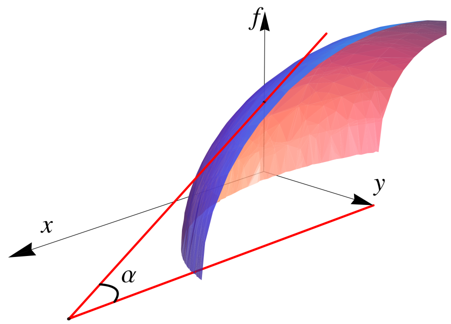
$$\frac{\partial\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right)}{\partial x}=-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right)}{\partial y}=-y\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial\left(\mathrm{e}^{x\cdot y}\right)}{\partial x}=y\mathrm{e}^{x\cdot y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\left(\mathrm{e}^{x\cdot y}\right)}{\partial y}=x\mathrm{e}^{x\cdot y}$$

Interprétation géométrique des dérivées partielles

Une surface $z=f(x,y)$ a une infinité de droites tangentes en en point, selon la direction selon laquelle on trace la tangente.

La pente de la droite tangente parallèle au plan xz est égale à la dérivée partielle de la fonction $f(x,y)$ selon x au point où la droite est tangente à la surface.



: $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\partial f}{\partial x}$

Interprétation géométrique des dérivées partielles

Une surface $z=f(x,y)$ a une infinité de droites tangentes en en point, selon la direction selon laquelle on trace la tangente.

La pente de la droite tangente parallèle au plan xz est égale à la dérivée partielle de la fonction $f(x,y)$ selon x au point où la droite est tangente à la surface.

De même, la pente de la droite tangente parallèle au plan yz est égale à la dérivée partielle de la fonction $f(x,y)$ selon y au point où la droite est tangente à la surface.

Champ scalaires et champs vectoriels

Définition

On appelle *champ scalaire* une région de l'espace dans laquelle à chaque point (x,y,z) est associée une grandeur $f(x,y,z)$.

Exemple

À chaque point de l'atmosphère on associe une température. Il s'agit d'un *champ scalaire*.

Champ vectoriels

Définition

On appelle *champ vectoriel* une région de l'espace dans laquelle à chaque point (x, y, z) est associé un vecteur : $\overrightarrow{\mathrm{F}}(x, y, z) = \mathrm{P}(x, y, z)\,\overrightarrow{i} + \mathrm{Q}(x, y, z)\,\overrightarrow{j} + \mathrm{R}(x, y, z)\,\overrightarrow{k} +$

Exemple

À chaque point d'un fluide on associe la vitesse de la molécule qui s'y trouve. Il s'agit d'un *champ vectoriel*.

Vecteur gradient

Soit une fonction $\mathrm{U}(x, y, z)$ définie dans l'espace.

Définition

On définit le vecteur gradient noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}$ ou $\nabla\mathrm{U}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} \equiv \nabla\mathrm{U} = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

Interprétation : La fonction U représente une propriété scalaire dans différents points, par exemple la température ou l'énergie. Le gradient est un vecteur dont la direction indique vers quelle direction l'augmentation de la fonction est la plus grande (la plus grande pente).

Dérivées partielles d'ordre deux d'une fonction de 2 variables

Les dérivées partielles de 1$^{\text{er}}$ ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ d'une fonction de 2 variables peuvent être aussi des fonctions de 2 variables. Si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent, elles sont appelées dérivées partielles de second ordre de la fonction f et sont notées :

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$$

Dérivées partielles d'ordre deux – généralisation

Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de 1$^{\text{er}}$ ordre d'une fonction de n variables peuvente être aussi des fonctions de n variables. Si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent, elles sont appelées dérivées partielles de second ordre de la fonction f et sont notées :

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} & \text{si } i \neq j \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Dérivées partielles d'ordre deux – Exemple

Exemple

Soit $f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$
Nous avons déjà calculé : $\frac{\partial f}{\partial x} = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -y\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$
Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right]}{\partial x} = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[-y\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right]}{\partial y} = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}y^2$$

Dérivées partielles d'ordre deux – Exemple suite

Exemple

Soit $f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$
Nous avons déjà calculé : $\frac{\partial f}{\partial x} = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -y\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$
Et les dérivées partielles croisées sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[-y\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right]}{\partial x} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}xy$$

égalité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right]}{\partial y} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}xy$$

Théorème de Clairaut et Schwarz [4]

Théorème

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables dont :

- *les dérivées partielles de 1^{er} ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et*
- *les dérivées partielles de 2^{nd} ordre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues.*

Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Le théorème peut être généralisé aux fonctions avec plus que deux variables. À condition que les dérivées secondes soient continues, l'ordre de dérivation ne modifie pas le résultat.

4. Énoncé par Clairaut en 1740, démontré par Schwarz en 1873

Théorème de Schwarz – Exemple

Exemple

Soit $f(x,y) = -x^3 + x \cdot y^2$
Nous avons déjà calculé $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$
Alors les dérivées secondes croisées sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[2xy\right]}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[-3x^2 + y^2\right]}{\partial y} = 2y$$

Différentielles partielles d'une fonction de deux variables

Définition

On appelle *différentielles partielles selon x et selon y* d'une fonction f de 2 variables les expressions :

$$\mathrm{d}f_x = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f_y = \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Interprétation : La différentielle partielle $\mathrm{d}f_x$ exprime l'accroissement de la fonction f lorsque x varie de $\mathrm{d}x$ avec y constant. (De même pour $\mathrm{d}f_y$).

Différentielle d'une fonction de deux variables

Définition

On appelle *différentielle* d'une fonction f de 2 variables l'expression

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Interprétation géométrique : La différentielle en un point définit un plan parallèle au plan tangent à la surface à ce point.

Théorème

Pour qu'une fonction f à 2 variables soit différentiable en un point, il suffit que ses dérivées partielles de 1^{er} ordre existent et soient continues en ce point. Alors la fonction f est dite régulière.

Différentielle d'une fonction de deux variables

Définition

On appelle *différentielle* d'une fonction f de 2 variables l'expression

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Théorème

Pour qu'une fonction f à 2 variables soit différentiable en un point, il suffit que ses dérivées partielles de 1^{er} ordre existent et soient continues en ce point. Alors la fonction f est dite régulière.

Dans le cadre de ce cours on ne traitera que des fonctions régulières.

Généralisation : différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Définition

On appelle *différentielle* d'une fonction f de n variables l'expression

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

- Les termes « différentielle totale » ou « différentielle totale exacte » sont parfois utilisés.
- La différentielle d'une fonction f de n variables est nulle sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la fonction f est une constante dans ce sous-ensemble.

Différentielles - Exemples

Exemples

$$\mathrm{d}\left(5x-3y\right)=5\mathrm{d}x-3\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\left(a+\log\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{x\ln 10}\mathrm{d}x-\frac{1}{y\ln 10}\mathrm{d}y=\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)$$

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right)=-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x-y\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}y=-\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y\right)$$

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x\cdot y}\right)=y\mathrm{e}^{x\cdot y}\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{x\cdot y}\mathrm{d}y=\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\right)\mathrm{e}^{x\cdot y}$$

Différentielle logarithmique

Définition

Rappel : La différentielle du logarithme de la valeur absolue d'une fonction f :

$$\mathrm{d}\ln|f|$$

est appelée *différentielle logarithmique* de f

Cette notion est généralisable aux fonctions de plusieurs variables.
Après le calcul de la différentielle logarithmique, il est possible de calculer la différentielle. En effet :

$$\mathrm{d}\ln|f|=\frac{\mathrm{d}f}{f}\Rightarrow \mathrm{d}f=f\,\mathrm{d}\ln|f|$$

Exemple

La différentielle logarithmique peut faciliter le calcul de la différentielle de fonctions composées de produits ou quotients.

Exemple

Soit la fonction $f(\mathrm{P},\mathrm{V},n,\mathrm{T})=\frac{\mathrm{P}\cdot\mathrm{V}}{n\cdot\mathrm{R}\cdot\mathrm{T}}$ où R est une constante positive et P, V, n et T sont des variables positives.

$$\ln|f|=\ln\frac{\mathrm{P}\cdot\mathrm{V}}{n\cdot\mathrm{R}\cdot\mathrm{T}}=\ln\mathrm{P}+\ln\mathrm{V}-\ln n-\ln\mathrm{R}-\ln\mathrm{T}$$

$$\mathrm{d}\ln|f|=\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}}+\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}}-\frac{\mathrm{d}n}{n}-\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{d}f=f\,\mathrm{d}\ln|f|=\frac{\mathrm{P}\cdot\mathrm{V}}{n\cdot\mathrm{R}\cdot\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}}+\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}}-\frac{\mathrm{d}n}{n}-\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{T}}\right)=$$

$$=\frac{1}{n\cdot\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{VdP}}{\mathrm{T}}+\frac{\mathrm{PdV}}{\mathrm{T}}-\frac{\mathrm{P}\cdot\mathrm{Vd}n}{n\mathrm{T}}-\frac{\mathrm{P}\cdot\mathrm{VdT}}{\mathrm{T}^2}\right)$$

Exemple d'application – I

La formule de Black donne le métabolisme basal (M en kcal) en fonction du poids (P en kg), de la taille (T en m) et de l'âge (A en années) :

$$\mathrm{M}(\mathrm{P},\mathrm{T},\mathrm{A})=\mathrm{K}\ \mathrm{P}^{0{,}48}\mathrm{T}^{0{,}50}\mathrm{A}^{-0{,}13}\quad(\mathrm{K}_{\mathrm{hommes}}{=}259\ ,\ \mathrm{K}_{\mathrm{femmes}}{=}230)$$

Soit une femme de $30,$ ans qui mesure $1,62\,\mathrm{m}$ et qui pèse $55\,\mathrm{kg}$.
– Quel serait approximativement la différence de son métabolisme basal par rapport à une femme âgée d'un an de plus mesurant $1\,\mathrm{cm}$ de moins et pesant $1\,\mathrm{kg}$ de plus ?
– Quelle serait approximativement la contribution du poids, de la taille et de l'âge à cette différence ?

Exemple d'application – II

Bien que pour la première question on pourrait calculer la valeur de la fonction pour les deux individus, pour répondre à la deuxième l'utilisation de la différentielle est plus rapide. Et, comme il s'agit d'un produit des variables, nous simplifierons le calcul en passant par la différentielle logarithmique :

$$\mathrm{M}(30,\ 1,62,\ 55) \approx 1287,76\,\mathrm{kcal}$$
$$\ln \mathrm{M} = \ln \mathrm{K} + 0,48 \ln \mathrm{P} + 0,50 \ln \mathrm{T} - 0,13 \ln \mathrm{A}$$
$$\mathrm{d} \ln \mathrm{M} = 0,48 \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{P}}{\mathrm{P}} + 0,50 \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{T}}{\mathrm{T}} - 0,13 \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{A}}{\mathrm{A}}$$
$$\mathrm{d}\,\mathrm{M} = \mathrm{M}\left(0,48 \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{P}}{\mathrm{P}} + 0,50 \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{T}}{\mathrm{T}} - 0,13 \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{A}}{\mathrm{A}}\right)$$
$$\mathrm{d}\,\mathrm{M} = 1287,76\,(0,00873 - 0,00309 - 0,00433) \approx 1,68\,\mathrm{kcal}$$

Exemple d'application – III

La différence induite par les différences du poids de taille et de l'âge est donc de $\approx +1,68\,\mathrm{kcal}$.
Les contributions de chaque composante sont :

Poids augmenté de 1 kg : $1287,76 \times 0,00873 \approx 11,24\,\mathrm{kcal}$
Taille diminuée de 1 cm : $1287,76 \times (-0,00309) \approx -3,97\,\mathrm{kcal}$
Âge augmenté de 1 an : $1287,76 \times (-0,00433) \approx -5,58\,\mathrm{kcal}$

On peut comparer la différence approximative de $+1,68\,\mathrm{kcal}$ avec la valeur exacte obtenue par la formule :

$$\mathrm{M}(31,\ 1,61,\ 56) \approx 1289,42\,\mathrm{kcal}$$

et donc une différence réelle de $1289,42 - 1287,76 = 1,66\,\mathrm{kcal}$

Base orthonormée

- Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, trois vecteurs unitaires, portés respectivement par Ox, Oy et Oz. Les vecteurs sont donc orthogonaux deux à deux. Ces trois vecteurs forment une *base orthonormée*.
- Dans cette base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note le vecteur $\vec{OA} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$ ou $\vec{OA}(X, Y, Z)$ où X, Y et Z sont les *composantes* ou *coordonnées* du vecteur $\vec{OA}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Propriétés (où $\vec{V_1}(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{V_2}(X_2, Y_2, Z_2)$ sont deux vecteurs).
  - $\vec{V_1} + \vec{V_2} = (X_1 + X_2)\,\vec{i} + (Y_1 + Y_2)\,\vec{j} + (Z_1 + Z_2)\,\vec{k}$
  - $a\,\vec{V_1} = a\,X_1\,\vec{i} + a\,Y_1\,\vec{j} + a\,Z_1\,\vec{k}$

Produit scalaire de deux vecteurs

- Définition
  $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \left|\vec{V_1}\right| \left|\vec{V_2}\right| \,cos\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right)$
- Propriétés (où $\vec{V_1}(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{V_2}(X_2, Y_2, Z_2)$ sont deux vecteurs non nuls).
  - $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} > 0$: angle $\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right)$ aigu
  - $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} < 0$: angle $\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right)$ obtus
  - $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$: $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ perpendiculaires
  - $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = X_1\,X_2 + Y_1\,Y_2 + Z_1\,Z_2$
  - $\vec{V_1} \cdot \vec{V_1} = \left|\vec{V_1}\right|^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$
  - $cos\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right) = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{\left|\vec{V_1}\right|\left|\vec{V_2}\right|} = \frac{X_1\,X_2 + Y_1\,Y_2 + Z_1\,Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$