Suites et séries de fonctions

Grégory Berhuy

Table des matières

Motivations

Les séries de fonctions trouvent leur utilité dans la résolution d'équations différentielles, ou d'équations aux dérivées partielles. Bien souvent, ces équations n'ont pas de solution évidente exprimable à l'aide de fonctions usuelles. L'idée est donc de chercher des solutions sous forme de séries. Donnons un exemple.

On considère une barre d'un matériau homogène de longueur finie L (non nulle !), la température initiale (au temps $t = 0$) étant donnée par une fonction $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x)$. On suppose que la température est nulle aux extrémités de la barre. Si D est le coefficient de diffusion, l'équation régissant la température $T(x,t)$ en chaque point à un instant $t > 0$ est donnée par

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Oublions d'abord la condition $T(x, 0) = \varphi(x)$. Autrement dit, on cherche les solutions vérifiant seulement les conditions au bord $T(0,t) = T(L,t) = 0$.

Cherchons d'abord une solution non nulle de la forme $T(x,t) = f(x)g(t)$ (avec f et g vérifiant des hypothèses convenables). On a alors

$$f(x)g'(t) = Df''(x)g(t),$$

soit

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{Dg(t)}.$$

Comme x et t sont deux variables indépendantes, cela implique qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{Dg(t)} = \alpha.$$

Ainsi, on a

$$f''(x) - \alpha f(x) = 0 \text{ et } g'(t) - D\alpha g(t) = 0.$$

On a donc $g(t) = \lambda e^{D\alpha t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc $g(t) \neq 0$ pour tout $t \geq 0$ (car on cherche T non identiquement nulle). La contrainte $T(0,t) = T(L,t) = 0$ entraîne alors $f(0) = f(L) = 0$.

Si $\alpha = 0$, on a $f''(x) = 0$, et donc $f(x) = ax + b$. Les conditions $f(0) = f(L) = 0$ imposent alors facilement $f(x) = 0$ pour tout x, ce qui est à exclure par hypothèse sur T.

Si $\alpha > 0$, on pose $\alpha = \omega^2$. Alors f est de la forme $f(x) = a\mathrm{ch}(\omega x) + b\mathrm{sh}(\omega x), a, b \in \mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 0$, on a $a = 0$. Puisque $f(L) = 0$, on a $b\mathrm{sh}(\mathrm{L}) = 0$. Comme $\mathrm{sh}(L) \neq 0$ puisque $L \neq 0$, on a $b = 0$ et donc f est identiquement nulle, ce qui est à exclure.

On a donc $\alpha < 0$, et donc $\alpha = -\omega^2$. Mais alors on a

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x), a, b, \in \mathbb{R}.$$

Puisque $f(0) = 0$, on a $a = 0$, et puisque $f(L) = 0$ on a $b\sin(\omega L) = 0$. Puisque l'on cherche T non nulle, on a $b \neq 0$ et donc $\sin(\omega L) = 0$.

Ainsi $\omega L = \pi n$ pour $n \geq 0$, et donc pour chaque n, on a une solution de la forme

$$b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt},$$

où $b_n \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}).$$

On remarque facilement que la somme d'un nombre **fini** de solutions (encore une fois si on oublie la première condition) est encore une solution. Pour résoudre l'équation initiale, avec toutes les conditions au bord, l'idée est de prendre une somme **infinie** de telles solutions. Autrement dit, on cherche une solution de la forme

$$T(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}.$$

A priori, une telle fonction est solution. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \sum_{n\geq 1} \frac{\partial}{\partial t}(b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}) \\
&= \sum_{n\geq 1} D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}) \\
&= D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Oui, mais...dans ce calcul, on a échangé sans vergogne dérivation et $\sum_{n\geq 1}$. A priori, rien ne le justifie, car $\sum_{n\geq 1}$ est une **série** de fonctions, donc en fait la limite de la suite de fonctions (S_n), avec

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 k^2}{L^2}Dt}.$$

En fait, en général, l'interversion de la dérivation et de la limite est illicite.

Par exemple, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$. Clairement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, on a

$$(\lim f_n)'(0) = 0.$$

Par contre, on a $f_n'(x) = \cos(nx)$ et donc $\lim(f_n')(0) = 1$.

Pire, la limite de fonctions dérivables (même infiniment dérivables) peut même ne pas être continue !

Par exemple, soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Alors pour tout $x \neq 1$, on a $f_n(x) \to 0$ et $f_n(1) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$. D'où la question suivante :

Question 1. Sous quelles conditions une suite de fonctions (f_n) continues/dérivables converge-t-elle vers une fonction continue/dérivable ?

Mais laissons pour l'instant ces récriminations matheuses.

Pour avoir l'existence d'une solution vérifiant $T(x,0) = \varphi(x)$, on doit nécessairement avoir

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \text{ pour tout } x \in [0,L].$$

La question naturelle est donc : quelles sont les fonctions φ qui peuvent se décomposer de la manière précédente ?

Remarquons que le membre de droite est une fonction $2L$-périodique impaire. Pour avoir une chance d'obtenir l'égalité, il est naturel de prolonger φ en une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2L$-périodique impaire de la façon suivante. On pose

$$\psi(x) = -\varphi(-x) \text{ pour tout } x \in]-L,0],$$

et on prolonge ψ à $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité. La question revient donc à savoir si on peut décomposer le signal périodique ψ en série de sinus.

Plus généralement, peut-on décomposer un signal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-pérodique sous la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x),$$

avec $a_n, b_n \in \mathbb{C}$?

En utilisant les formules d'Euler, cela revient à savoir si on peut écrire

$$f(x) = c_0 + \sum_{n\geq 1} c_{-n}e^{-\frac{2in\pi}{T}x} + c_n e^{\frac{2in\pi}{T}x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{2ik\pi}{T}x}.$$

Si $n \in \mathbb{Z}$, on a donc
$$f(x)e^{-\frac{2in\pi}{T}x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{2i(k-n)\pi}{T}x}.$$
On a alors
$$\int_0^T f(x)e^{-\frac{2in\pi}{T}x}\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_0^T e^{\frac{2i(k-n)\pi}{T}x}\mathrm{d}x.$$
Or, un simple calcul montre que , pour $m \in \mathbb{Z}$, on a
$$\int_0^T e^{\frac{2im\pi}{T}x}\mathrm{d}x = \begin{cases} T \text{ si } m = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
On obtient alors que $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)e^{-\frac{2in\pi}{T}x}\mathrm{d}x$. On note cette dernière intégrale par $c_n(f)$.

Remarquons que, là encore, rien ne justifie que l'on puisse échanger somme infinie et intégrale. Encore une fois, il y a des contre-exemples. Par exemple, soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$. Clairement, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

On a donc
$$\int_0^1 \lim_n f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$
En revanche, on a
$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \mathrm{Arctan}(n) \to \frac{\pi}{2} \text{ lorsque } n \to +\infty.$$
Question 2. Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables sur $[a,b]$ convergeant vers f, sous quelles conditions a-ton l'égalité
$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_n f_n(x)\mathrm{d}x?$$
Modulo ce point technique, on aboutit donc à la question suivante :

Question 3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est un signal T-périodique, a-t-on
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\frac{2in\pi}{T}x}?$$
La série de droite est appelée série de Fourier associée à f.

On vérifie facilement qu'elle est aussi égale à
$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(\frac{2n\pi}{T}) + b_n(f)\sin(\frac{2n\pi}{T}),$$

où on a

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\mathrm{d}x, n \geq 0$$
$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\mathrm{d}x, n \geq 1.$$

Ce problème a aussi un intérêt propre, en dehors du contexte de l'équation de la chaleur, puisqu'il pose la question de savoir si on peut reconstituer un signal périodique à partir de ses harmoniques.

L'équation de la chaleur est un cas particulier d'une équation de diffusion, qui peut modéliser bien d'autres phénomènes. La diffusion est le processus par lequel, lorsque vous laissez tomber un morceau de sucre dans un verre d'eau, le sucre se répartit graduellement par l'eau, ou lorsqu'un polluant se propage dans l'air, ou lorsque n'importe quelle substance dissoute se répand dans n'importe quel fluide.

L'étude des séries de Fourier intervient dès que l'on a des phénomènes ondulatoires. Par exemple en astrophysique, l'étude spectrale de la lumière émise par une étoile permet de déterminer sa composition.

Le but de ce cours est de répondre aux questions précédentes.

Chapitre I

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Dans ce chapitre, on introduit la notion de convergence uniforme, qui nous permettra dans le chapitre suivant de donner des conditions suffisantes sur une suite/série de fonctions (f_n) pour que les diverses propriétés de régularité des fonctions soient préservées par passage à la limite, et pour que l'on puisse échanger limite et dérivation/intégrale.

Pour cela, on doit introduire la notion de borne supérieure d'un ensemble de réels.

I.1. Borne supérieure

Dans la suite, A désignera une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition I.1.1. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de A si pour tout $a' \in A$, on a $a' \leq M$.

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de A si pour tout $a' \in A$, on a $a' \geq m$.

On dit que $a \in A$ est un *plus grand élément* (ou un *maximum*) de A si pour tout $a' \in A$, on a $a' \leq a$.

On dit que $a \in A$ est un *plus petit élément* (ou un *minimum*) de A si pour tout $a' \in A$, on a $a' \geq a$.

Autrement dit, un plus grand élément (resp. un plus petit élément) de A est un majorant (resp. un minorant) de A qui est aussi un élément de A.

Exemple I.1.2. Si $A = [a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, alors b est un maximum de A, et a est un minimum de A (cela provient des définitions).

Remarques I.1.3.

(1) Si A possède un maximum (resp. un minimum), celui-ci est unique.

En effet, si a_1 et a_2 sont deux maxima de A, alors par définition, on a $a_2 \leq a_1$ (puisque $a_2 \in A$), mais aussi $a_1 \leq a_2$ (puisque $a_1 \in A$), et donc $a_1 = a_2$.

La démonstration pour l'unicité d'un minimum est semblable.

(2) Si A possède un maximum (resp. un minimum), alors A est majorée (resp. minorée).

Achtung !!! Une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ ne possède pas nécessairement de maximum (resp. de minimum).

Exemple I.1.4. Soit $A = [0, 1[$. Alors A est majorée par 1, mais ne possède pas de maximum.

Supposons le contraire, et soit $a \in A$ un maximum de A. Alors $0 \leq a < 1$. Posons $a' = \dfrac{a+1}{2}$. On a facilement $0 \leq a < a' < 1$. Ainsi, $a' \in A$, mais $a' > a$, ce qui contredit la définition d'un maximum, d'où une contradiction.

Notation. On note respectivement $\max A$ et $\min A$ le maximum et le minimum de A, lorsqu'ils existent.

On va maintenant introduire la notion de borne supérieure.

Définition I.1.5. On dit que $s \in \mathbb{R}$ est une *borne supérieure* de A si c'est un élément minimum de l'ensemble des majorants de A. Autrement dit, $s \in \mathbb{R}$ est une borne supérieure de A si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $a \in A$, on a $a \leq s$;

(ii) Pour tout $M \in \mathbb{R}$, on a (pour tout $a \in A, a \leq M$) $\Rightarrow s \leq M$.

Par définition, si une borne supérieure existe, elle est unique (puisque c'est le minimum d'un ensemble particulier). On la note $\sup(A)$.

Remarque I.1.6 (Remarque clef). Soit $M \in \mathbb{R}$. Alors $\sup(A) \leq M \iff$ pour tout $a \in A$, on a $a \leq M$.

En effet, cela provient de la définition. On peut aussi refaire le raisonnement ad hoc : supposons que $\sup(A) \leq M$, et soit $a \in A$. Puisque $\sup(A)$ est un majorant de A, on a

$$a \leq \sup(A) \leq M.$$

Inversement, supposons que pour tout $a \in A$, on a $a \leq M$. Alors M est un majorant de A, et comme $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, on a $\sup(A) \leq M$.

Le résultat de cette remarque est à connaître, et à savoir redémontrer les yeux fermés !!!

Théorème I.1.7 (**Admis**). *Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure si et seulement si elle est majorée.*

Remarque I.1.8. Évidemment, la partie la plus intéressante de ce résultat est l'implication réciproque : toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Convention. Si A n'est pas majorée, on pose $\sup(A) = +\infty$.

En guise d'entraînement, voici quelques exercices.

Exercice. Si A possède un maximum, alors A possède une borne supérieure et on a $\sup(A) = \max(A)$.

Exercice. Soit $A = [a, b[, a < b, a, b \in \mathbb{R}$. Alors, $\sup(A) = b$. (**Exercice**)

Exercice. Si A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, alors $A \cup B$ possède une borne supérieure, et on a $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice. Si B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors pour tout A non vide, $A \subset B$, A possède une borne supérieure, et on a $\sup(A) \leq \sup(B)$.

La proposition suivante est très pratique pour déterminer la borne supérieure d'une partie de A.

Proposition I.1.9. *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et soit $s \in \mathbb{R}$. Alors $s = \sup(A)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) s est un majorant de A ;

(ii) il existe une suite d'éléments de A qui converge vers s.

Démonstration. Soit $s = \sup(A)$, et soit $n \geq 1$. Par construction, s est un majorant de A. De plus, puisque $s - 1/n < s$, alors $s - 1/n$ n'est pas un majorant de A (sinon s ne serait pas le plus petit des majorants, ce qui contredirait sa définition). Ainsi, il existe $a_n \in A$ tel que $a_n > s - 1/n$. Puisque $a_n \in A$ et que s est un majorant de A, on a $a_n \leq s$. Ainsi, on a

$$s - 1/n < a_n \leq s \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On en déduit facilement que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers s.

Réciproquement, soit $s \in \mathbb{R}$ vérifiant les conditions (i) et (ii). Par (i), s est un majorant de A. Il reste donc à vérifier que c'est le plus petit. Soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de A. Par (ii), il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A qui converge vers s. Puisque $a_n \in A$, on a donc $a_n \leq M$ pour tout $n \geq 1$. Par passage à la limite, on obtient $s \leq M$, ce qu'il fallait vérifier. Ceci achève la démonstration. □

Dans la pratique, on s'intéressera surtout au calcul (ou à l'estimation) de la borne supérieure d'un ensemble A de la forme $A = \{h(x), x \in I\}$, où $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, voire dérivable sur un intervalle I. Dans ce cas, on la note plutôt $\sup\limits_{x\in I} h(x)$, ou $\sup\limits_{I} h$.

Il y a deux situations où il est facile de déterminer $\sup\limits_{x\in I} h(x)$:

(a) la fonction h possède un maximum global en un point $x_0 \in I$. Dans ce cas, $\sup\limits_{x\in I} h(x) = \max\limits_{x\in I} h(x) = h(x_0)$.

C'est par exemple le cas lorsque $I = [a, b]$ et h est continue sur I.

(b) la fonction h est croissante sur I. Soit $b = \sup(I)$ (on peut avoir $b = +\infty$ si I n'est pas un intervalle borné).

Premier cas : I est un intervalle fermé et borné à droite, i.e. $b \in I$ et I est fermé en b.

Dans ce cas, comme h est croissante, h possède un maximum global en b, et ce maximum vaut $h(b)$. Par (a), $\sup\limits_{x \in I} h(x) = h(b)$.

Second cas : I est un intervalle ouvert à droite (pas nécessairement borné), i.e. I est ouvert en b, avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $\ell = \lim\limits_{x \to b^-} h(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (ℓ existe toujours car h est croissante). Alors $\sup\limits_{x \in I} h(x) = \ell$.

En effet, si $\ell = +\infty$, l'ensemble $\{h(x), x \in I\}$ n'est pas majoré, et le résultat est clair. Supposons maintenant que $\ell < +\infty$.

Soit $x \in I$. Puisque h est croissante, on a $h(x) \leq h(t)$ pour tout $x \leq t < b$. Par passage à la limite, on a $h(x) \leq \ell$. Ainsi, ℓ est un majorant de $\{h(x), x \in I\}$. Soit $n \geq 1$. Par définition de ℓ, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]b - \alpha, b[$, on a $|h(x) - \ell| \leq 1/n$. Choisissons un élément $x_n \in I \cap]b - \alpha, b[$ (**c'est toujours possible. Voyez-vous pourquoi ?**). Alors pour tout $n \geq 1$, on a $h(x_n) \in \{h(x), x \in I\}$ et $(h(x_n))_{n \geq 1}$ converge vers ℓ, puisque pour tout $n \geq 1$, on a $|h(x_n) - \ell| < 1/n$. On utilise la proposition précédente pour conclure.$\square$

I.2. Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Dans la suite, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, et K désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : I \to K$, et soit $f : I \to K$.

Définition I.2.1. On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge *simplement* vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$. On le note $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$.

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge. Dans ce cas, si on pose $f(x) = \lim\limits_{n} f_n(x)$ pour tout $x \in I$, alors $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$.

Remarque I.2.2. Si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement, alors sa limite est unique. En effet, si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f et g, alors pour tout $x \in I$, on a

$$0 \leq |f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)| \text{ pour tout } n \geq 0.$$

En passant à la limite, on obtient $|f(x) - g(x)| = 0$ pour tout $x \in I$, et on obtient donc $f = g$.

EXEMPLE I.2.3. Pour tout $n \geq 0$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Alors, $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$, où f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Cet exemple montre la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas forcément continue. Pour pouvoir assurer la continuité de la limite, nous allons introduire une notion de convergence plus forte. Introduisons tout d'abord une notation.

Notation. Si $h : I \to K$, on pose

$$||h||_I = \sup_{x \in I} |h(x)|,$$

où $|\,|$ désigne la valeur absolue si $K = \mathbb{R}$, et le module si $K = \mathbb{C}$.

REMARQUE I.2.4. On a $||h||_I < +\infty$ si et seulement si h est bornée. En effet, si $||h||_I < +\infty$, alors on a $|h(x)| \leq \sup\limits_{x \in I} |h(x)|$ pour tout $x \in I$, par la remarque I.1.6. Ainsi, on a donc

$$|h(x)| \leq ||h||_I \text{ pour tout } x \in I,$$

et h est donc bornée. Inversement, si h est bornée, il existe $M \geq 0$ tel que

$$|h(x)| \leq M \text{ pour tout } x \in I.$$

Par la remarque I.1.6, on obtient donc $||h||_I \leq M < +\infty$.

LEMME I.2.5. *Pour toutes fonctions bornées $f, g : I \to K$, et tout $\lambda \in K$, on a :*

(i) $||f||_I \geq 0$;

(ii) $||f||_I = 0 \iff f = 0$;

(iii) $||f + g||_I \leq ||f||_I + ||g||_I$;

(iv) $||\lambda f||_I = |\lambda| \cdot ||f||_I$.

Démonstration.

(i) Soit $x_0 \in I$. Par définition de la borne supérieure, on a en particulier $0 \leq |f(x_0)| \leq \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$, et donc $||f||_I \geq 0$.

(ii) On a clairement $||0||_I = 0$. Inversement, supposons que $||f||_I = 0$. Comme déjà vu précédemment, on a

$$0 \leq |f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| \text{ pour tout } x \in I.$$

Or, la quantité de droite est nulle par hypothèse, et donc $|f(x)| = 0$ pour tout $x \in I$. On obtient alors que $f = 0$.

(iii) Pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)|.$$

Ainsi, on a

$$|f(x) + g(x)| \leq ||f||_I + ||g||_I \text{ pour tout } x \in I.$$

Par la remarque I.1.6, on obtient $||f + g||_I \leq ||f||_I + ||g||_I$.

(iv) Si $\lambda = 0$, le résultat est clair, donc on peut supposer que $\lambda \neq 0$. Pour tout $x \in I$, on a

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \cdot ||f||_I,$$

et donc $||\lambda f||_I \leq |\lambda| \cdot ||f||_I$. En remplaçant λ par λ^{-1} et f par λf, on obtient

$$||f||_I \leq |\lambda^{-1}| \cdot ||\lambda f||_I.$$

En multipliant cette inégalité par $|\lambda|$, on obtient $|\lambda| \cdot ||f||_I \leq ||\lambda f||_I$, d'où le résultat.$\square$

Définition I.2.6. On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge *uniformément* vers f sur I si $||f_n - f||_I \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On le note $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$.

Retraduisons les deux notions de convergence pour bien comprendre la différence.

Convergence simple : $(f_n)_{n \geq 0}$ converge *simplement* vers f sur I si pour tout $x \in I$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Les deux premiers quantificateurs peuvent être permutés, donc on peut aussi réécrire que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge *simplement* vers f sur I si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in I$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Le N dépend ici de x et de ε.

Convergence uniforme : La remarque clef I.1.6 nous dit que $||f_n - f||_I \leq \varepsilon \iff \forall\, x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Ainsi, $(f_n)_{n \geq 0}$ converge *uniformément* vers f sur I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, et pour tout $x \in I$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Le N ne dépend ici que de ε, et pas de x !

La seule différence entre les deux définitions est la place du 'pour tout $x \in I$', mais elle est loin d'être anodine.

Interprétation graphique. Pour simplifier, supposons que $K = \mathbb{R}$, et fixons un $\varepsilon > 0$.

Lorsque $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$, pour n assez grand, toutes les courbes f_n vont rentrer dans un tube de diamètre 2ε autour de f. Autrement dit, les valeurs $f_n(x)$ vont rentrer dans un tube de diamètre 2ε autour de f, pour n assez grand 'à la même vitesse pour toutes les valeurs de x' (voir figure 1). En revanche, lorsque $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$, les valeurs $f_n(x)$ vont rentrer dans un tube de diamètre 2ε autour de f, pour n assez grand, mais pas nécessairement 'à la même vitesse' si la convergence n'est pas uniforme (voir figure 2).

Exemple I.2.7. Soit $f_n(x) = [x^2(1-x^2)]^n, x \in [-1,1]$.

Lorsque $x = 0, \pm 1$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et donc $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Lorsque $-1 < x < 1, x \neq 0$, on vérifie rapidement que $0 \leq x^2(1-x^2) < 1$, et donc $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Ainsi, $f_n \xrightarrow[[-1,1]]{CS} 0$. Nous allons maintenant calculer $||f_n - f||_{[-1,1]}$, et vérifier qu'il tend vers 0.

Ici, $f = 0$. De plus, comme f_n est à valeurs positives (**facile**), alors on a $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. On doit donc calculer $\sup\limits_{x \in [-1,1]} f_n(x)$. On a

$$f_n'(x) = n(2x - 4x^3)(x^2(1-x^2))^{n-1} = 2nx(1-2x^2)(x^2(1-x^2))^{n-1}.$$

On a donc $f_n'(x) = 0 \iff x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1$. Une simple étude des variations de f_n montre que f_n possède un maximum global en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ainsi, $\sup\limits_{x \in [-1,1]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1/4^n$. On a donc

$$||f_n - f||_{[-1,1]} = 1/4^n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Par conséquent, $f_n \xrightarrow[[-1,1]]{CU} 0$.

Remarque I.2.8. L'astuce suivante permet parfois de simplifier les calculs. Si $u : I \to K$ et $g : K \to K$, alors

$$\sup_{x \in I} |(g(u(x))| = \sup_{t \in u(I)} |g(t)|.$$

Autrement dit, $||g \circ u||_I = ||g||_{u(I)}$.

En effet, lorsque x décrit I, $u(x)$ décrit $u(I)$, et on a donc

$$\{|g(u(x))|, x \in I\} = \{|g(t)|, t \in u(I)\},$$

d'où le résultat.

Reprenons l'exemple précédent. Lorsque x décrit $I = [-1,1]$, x^2 décrit $[0,1]$, et ainsi $\sup_{x \in [-1,1]} f_n(x) = \sup_{t \in [0,1]} [t(1-t)]^n$, ce qui simplifie (un peu) les calculs.

Exemple I.2.9. Soit $f_n(x) = nxe^{-nx}, x \in [0, +\infty[$.

Lorque $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et donc $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Lorsque $x > 0$, $nx \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$, et donc $\lim_n f_n(x) = \lim_{u \to +\infty} ue^{-u} = 0$.

Ainsi, $f_n \xrightarrow[{[0,+\infty[}]{CS} 0$. Montrons que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas ci, on peut encore calculer $||f_n - f||_{\mathbb{R}}$. Ici, $f = 0$ et $f_n \geq 0$, donc $||f_n - f||_{[0,+\infty[} = \sup_{x \in [0,+\infty[} f_n(x)$.

Une simple étude de fonctions montre f_n possède un maximum global en $1/n$. Ainsi, $\sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = f_n(1/n) = 1/e$. On a donc

$$||f_n - f||_{=}1/e \not\to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exemple I.2.10. Soit $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^4}, x \in [0, 1]$. Alors $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CS} 0$. Comme $f_n \geq 0$,, on a $||f_n - f||_{[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} f_n(x)$.

Encore une fois, une simple étude de fonctions montre que f_n possède un maximum global en $(\dfrac{1}{3n^2})^{1/4}$. Ainsi, $\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = \dfrac{3^{3/4}\sqrt{n}}{2}$. On a donc

$$||f_n - f||_{[0,1]} \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$.

Exemple I.2.11. Soit $f_n(x) = \sin(x)(\cos(x))^n, x \in [0, \pi/2]$. Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$, et donc $f_n(0) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Si $x > 0$, on a $0 \leq \cos(x) < 1$, et donc on a encore $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, $f_n \xrightarrow[{[0,\pi/2]}]{CS} 0$.

Étudions la convergence uniforme. Comme dans les exemples précédents, on a $||f_n - f||_{[0,\pi/2]} = \sup_{x \in [0,\pi/2]} f_n(x)$.

On a $f_n'(x) = \cos(x)^{n-1}(\cos(x)^2 - n\sin(x)^2)$. On remarque que le maximum global ne se situe pas en $x = \pi/2$, puisque $f_n \geq 0$ et $f_n(\pi/2) = 0$. On a donc

$$f_n'(x) = 0 \iff \cos(x)^2 - n\sin(x)^2 = 0 \iff \cos(x)^2 = \frac{n}{n+1}.$$

Ceci équivaut $= \cos(x) = (\dfrac{n}{n+1})^{1/2}$, puisque $\cos(x) \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$. Comme on a aussi $\sin(x) \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$, on obtient alors que $\sin(x) = (\dfrac{1}{n+1})^{1/2}$ (pour un x tel que $f_n'(x)$, bien sûr). En faisant un tableau de variations, on obtient qu'un tel x correspond à un maximum global de f_n. On obtient alors que

$$||f_n - f||_{[0,\pi/2]} = (\frac{1}{n+1})^{1/2} \cdot (\frac{n}{n+1})^{n/2} = (\frac{1}{n+1})^{1/2} \cdot ((1+1/n)^n)^{-1/2}.$$

Le second facteur converge vers $e^{-1/2}$ et le premier vers 0, donc finalement

$$||f_n - f||_{[0,\pi/2]} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

La convergence est donc uniforme sur $[0, \pi/2]$.

Lemme I.2.12. *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur I.*

Démonstration. Soit $x \in I$. Alors, on a

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq ||f_n - f||_I.$$

En utilisant l'hypothèse et le théorème des gendarmes, on en déduit que $f_n(x) - f(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $\lim_n f_n(x) = f(x)$, d'où la conclusion.□

Remarque I.2.13. En particulier, si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, la fonction f est unique.

Il n'est pas toujours possible de calculer précisément $||f_n - f||_I$. La proposition suivante donne un moyen de contourner cette difficulté.

Proposition I.2.14. *On a $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$ si et seulement s'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$* **indépendante de** *x vérifiant les deux conditions suivantes :*

(i) $\lim_n a_n = 0$.

(ii) Pour tout $n \geq 0$, et pour tout $x \in I$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$.

Démonstration. Supposons que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I, et posons $a_n = ||f_n - f||_I$. Par hypothèse, $\lim_n a_n = 0$. Soit $n \geq 0$. Puisque $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ est un majorant de l'ensemble $\{|f_n(x) - f(x)|, x \in I\}$, on a donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \text{ pour tout } x \in I.$$

Inversement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les conditions de la proposition. Soit $n \geq 0$. La condition (ii) se réécrit

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$

par la remarque I.1.6. Pour tout $n \geq 0$, on a donc

$$0 \leq ||f_n - f||_I \leq a_n,$$

Par passage à la limite, et en utilisant (i), on obtient que $\lim_n ||f_n - f||_I = 0$, d'où la conclusion.□

Remarque I.2.15. Le résultat reste valable si la condition (ii) est vérifiée pour n suffisamment grand.

Exemple I.2.16. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sin(nx^2 + e^{-x})}{n}$ $(n \geq 1)$. Alors $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CU} 0$.

En effet, pour tout $n \geq 1$, on a $|\dfrac{\sin(nx^2 + e^{-x})}{n}| \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On applique la proposition précédente avec $a_n = \dfrac{1}{n}$.

Exemple I.2.17. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 + 1/n}$ $(n \geq 1)$. Alors f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$.

En effet, pour tout $n \geq 1$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|} \leq \frac{1/n}{1/\sqrt{n}} = 1/\sqrt{n}.$$

On applique la proposition précédente avec $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme peut-être parfois ardu. La méthode suivante fonctionne souvent : pour chaque $n \geq 0$, on choisit un élément $x_n \in I$. On a alors

$$||f_n - f||_I \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Supposons que l'on puisse choisir la suite (x_n) de telle sorte que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Alors $||f_n - f||_I \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$, et la convergence n'est pas uniforme.

En effet, si on avait $||f_n - f||_I \to 0$, puisque

$$0 \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq ||f_n - f||_I,$$

on aurait $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$ par le théorème des gendarmes, d'où une contradiction.

Il faut comprendre et savoir refaire ce raisonnement au cas par cas.

Exemple I.2.18. Soit $f_n(x) = nxe^{-nx}, x \in I = [0, +\infty[$. On a déjà vu que $(f_n)_{n \geq 0}$ convergeait simplement vers la fonction nulle, mais pas uniformément. On se propose de retrouver ce fait en utilisant la méthode précédente.

En effet, posons $x_n = 1/n \in I$. Alors $f_n(x_n) - f(x_n) = 1/e$. Par définition de la borne supérieure, on a

$$||f_n - f||_I \geq |f_n(x_n)) - f(x_n)| = 1/e \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi, $||f_n - f||_I \geq 1/e$ pour tout $n \geq 0$. En particulier, $||f_n - f||_I$ ne peut pas tendre vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (sinon, par passage à la limite, on obtiendrait $0 \geq 1/e$, ce qui est absurde).

Exemple I.2.19. Soit $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}, x \in I = [0,1]$. On sait que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f = 0$ simplement, mais pas uniformément. Posons $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \in I$. Par définition de la borne supérieure, on a

$$||f_n - f||_{[0,1]} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) = \sqrt{n} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Par passage à la limite, on en déduit que $||f_n - f||_{[0,1]} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, et on retrouve le fait que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Nous terminons ce chapitre en donnant des critères théoriques de convergence simple et uniforme, qui nous seront utiles pour la suite. Rappelons tout d'abord une définition.

Définition I.2.20. Une suite de réels ou de complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ est une *suite de Cauchy* si

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N \geq 0 \text{ tel que, pour tous } n,m \geq N, |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

On rappelle alors que l'on a le théorème suivant.

Théorème I.2.21. *Une suite de réels ou de complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

En appliquant ce résultat à une suite de fonctions, on obtient le résultat suivant.

Corollaire I.2.22. *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in I$ il existe un entier $N \geq 0$ tel que*

$$\textit{pour tous } n,m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

On va maintenant démontrer le résultat suivant.

Théorème I.2.23 (Critère de Cauchy uniforme). *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I (vers une fonction f) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que*

$$\textit{pour tous } n,m \geq N, \textit{ pour tout } x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f. Alors, la suite de réels $(||f_n - f||_I)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \geq 0$ tel que , pour tout $n \geq N$, on a $|||f_n - f||_I \leq \varepsilon/2$.

Pour tous $n, m \geq N$, on a alors

$$||f_n - f_m||_I \leq ||f_n - f||_I + ||f - f_m||_I \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

En utilisant la remarque I.1.6, on obtient que

$$\text{pour tous } n,m \geq N, \text{ pour tout } x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Inversement, supposons que la condition du théorème soit vérifiée. Cette condition montre en particulier que pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc convergente par le théorème I.2.21. Notons $f(x)$ sa limite. Ainsi, on obtient une fonction $f : I \to K$. Par définition de f, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur I. Nous allons montrer qu'en fait la convergence est uniforme.

Soit $\varepsilon \geq 0$. Par hypothèse, il existe $N \geq 0$ tel que

$$\text{pour tous } n, m \geq N, \text{ pour tout } x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/2.$$

Soit $n \geq N$, et soit $x \in I$. Par définition de $f(x)$, il existe $N' \geq 0$ tel que pour tout $k \geq N'$, on a $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Choisissons un entier m vérifiant $m \geq \max(N, N')$. On a alors

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|.$$

Puisque $m \geq N$, on a $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/2$, et puisque $m \geq N'$, on a $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. On a donc montré que

$$\text{pour tout } n \geq N, \text{ pour tout } x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Par la remarque I.1.6, cela se réécrit

$$\text{pour tout } n \geq N, ||f_n - f||_I \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, $||f_n - f||_I \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.□

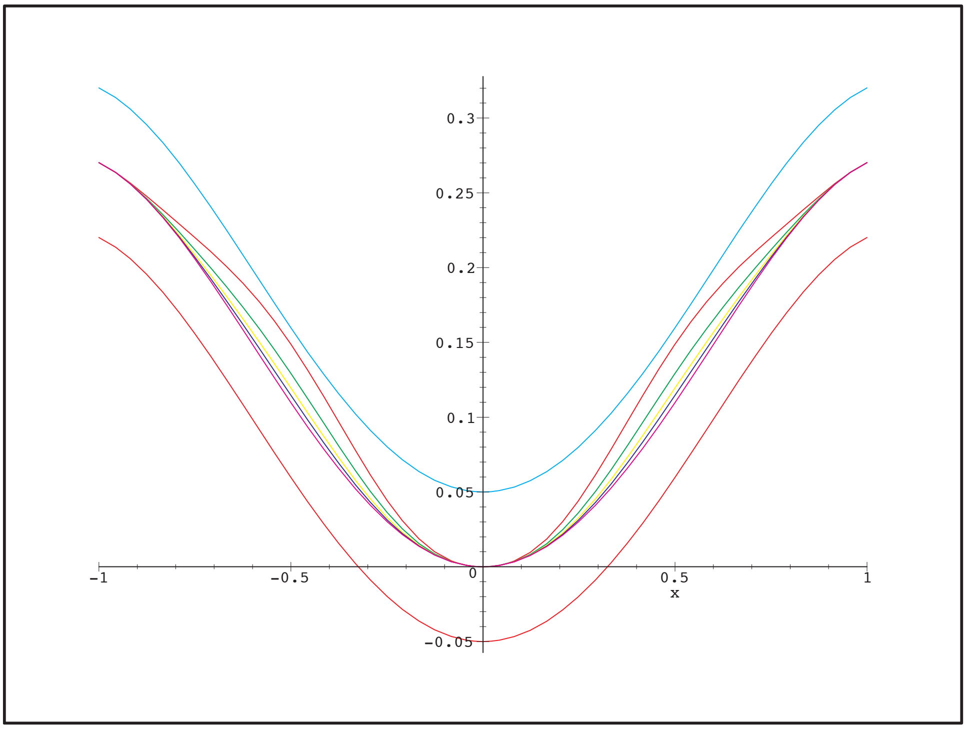

Figure 1. Une convergence uniforme

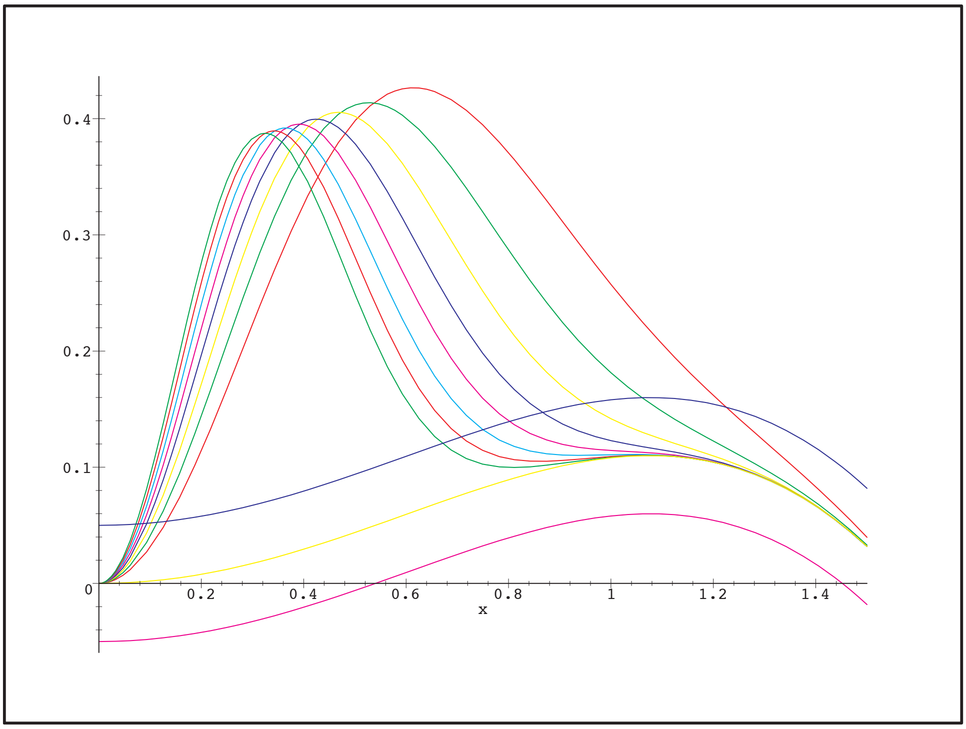

Figure 2. Une convergence non uniforme

Chapitre II

Suites et séries de fonctions

II.1. Suites de fonctions : théorèmes généraux

On garde les notations du chapitre précédent. On commence par un théorème d'interversion de limites.

THÉORÈME II.1.1. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : I \to K$ (I intervalle de $\mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $a \in I$ ou une extrémité de I.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to K$;

(ii) Pour tout $n \geq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe et est finie.

Alors, la suite $(\lim\limits_{x\to a} f_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, et on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_n (\lim_{x\to a} f_n(x)).$$

Autrement dit, on a

$$\lim_{x\to a}(\lim_n f_n(x)) = \lim_n (\lim_{x\to a} f_n(x)).$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on pose $\ell_n = \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$. On va montrer que $(\ell_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$, $(f_n)_{n\geq 0}$ satisfait le critère de Cauchy uniforme par le théorème I.2.23. Il existe donc N tel que

$$\text{pour tous } n, m \geq N, \text{ pour tout } x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/3 \ (1)\ .$$

Soit $n \geq 0$. Par définition de la suite $(\ell_n)_{n\geq 0}$, il existe $\alpha_n > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I, |x - a| < \alpha_n, \text{ on a } |f_n(x) - \ell_n| \leq \varepsilon/3 \ (2)\ .$$

Fixons $n, m \geq N$, et choisissons un $x \in I$ tel que $|x-a| < \min(\alpha_n, \alpha_m)$. On a alors

$$|\ell_n - \ell_m| \leq |\ell_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - \ell_m| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n, m \geq N$, on a $|\ell_n - \ell_m| \leq \varepsilon$. Autrement dit, $(\ell_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy. Par le théorème I.2.21, elle est donc convergente vers une limite $\ell \in K$.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et vaut ℓ. Conservons les notations précédentes. Puisque $(\ell_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, il existe $N'\geq 0$ tel que

$$\text{pour tout } n \geq N', \text{ on a } |\ell_n - \ell| \leq \varepsilon/3 \ (3)\ .$$

Choisissons un entier $m \geq \max(N, N')$, et posons $\alpha = \alpha_m$.
Pour tout $x \in I, |x-a| < \alpha$, on a alors

$$|f(x)-\ell| \leq |f(x)-f_m(x)| + |f_m(x)-\ell_m| + |\ell_m - \ell|.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (1), par continuité de la valeur absolue/du module, on obtient par passage à la limite que

$$\text{pour tout } m \geq N, \text{ pour tout } x \in I, |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/3.$$

Puisque $m \geq N$, on a $|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/3$. Puisque $m \geq N'$, on a aussi $|\ell_m - \ell| \leq \varepsilon/3$ par (3). Puisque $|x-a| < \alpha = \alpha_m$, on a enfin $|f_m(x) - \ell_m| \leq \varepsilon/3$ par (2). Ainsi, on a démontré que

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } |x-a| < \alpha, \text{ on a } |f(x)-\ell| \leq \varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer.□

Remarque II.1.2. Ce théorème reste vrai si la condition (ii) est vérifiée pour tout n suffisamment grand. Il reste également vrai si on remplace $\lim\limits_{x\to a}$ par $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}$ (si cela a un sens).

Corollaire II.1.3. *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions* $f_n : I \to K$ *(*I *intervalle de* $\mathbb{R}$*,* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*), et soit* $a \in I$*.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément sur* I *vers une fonction* $f : I \to K$ *;*

(ii) Pour tout $n \geq 0$*,* f_n *est continue en* a*.*

Alors, f *est continue en* a*. En particulier, si* f_n *est continue sur* I *pour tout* $n \geq 0$*, alors* f *est continue sur* I*.*

Démonstration. Gardons les notations du théorème précédent. Puisque f_n est continue en a, on a $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$. La conclusion du théorème s'écrit alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_n f_n(a) = f(a),$$

et donc f est continue en a.□

Remarque II.1.4. Encore une fois, ce résultat est vrai si f_n est continue en a (resp. continue sur I) pour n assez grand. Il reste aussi vrai si on remplace 'continue' par 'continue à gauche' ou 'continue à droite'.

Ce corollaire permet parfois de décider que la convergence d'une suite de fonctions n'est pas uniforme.

Exemple II.1.5. Pour tout $n \geq 0$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Alors, $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$, où f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Puisque f_n est continue pour tout n, et que f n'est pas continue, on en déduit que la convergence n'est pas uniforme.

Exercice. Retrouver le fait que la convergence n'est pas uniforme en calculant $||f_n - f||_{[0,1]}$, et en étudiant sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Théorème II.1.6. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : [a,b] \to K$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) pour tout $n \geq 0$, f_n est continue ;

(ii) $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f : [a,b] \to K$. Alors, f est continue sur $[a,b]$, $\lim_n \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ existe, et on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_n \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, on a

$$\int_a^b \lim_n f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_n \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Par le corollaire précédent, f est continue, donc intégrable. Soit $n \geq 0$. On a

$$0 \leq |\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| = |\int_a^b (f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $x \in [a,b]$, on a $0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq ||f_n - f||_{[a,b]}$. En intégrant ces inégalités, on obtient

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leq (b-a)||f_n - f||_{[a,b]}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$, on a

$$0 \leq |\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \leq (b-a)||f_n - f||_{[a,b]}.$$

On conclue par passage à la limite.

Ce théorème permet d'étudier des limites de suites d'intégrales sans calculs.

EXEMPLE II.1.7. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}(n \geq 1)$. On a déjà vu que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$, donc la convergence est aussi uniforme sur $[0, 1]$ (**Voyez-vous pourquoi ?**). D'après le théorème précédent, on en déduit que

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 |x|\mathrm{d}x = 1/2.$$

Encore une fois, ce théorème peut permettre parfois de montrer que la convergence n'est pas uniforme.

EXEMPLE II.1.8. Soit $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^4}, x \in I = [0, 1]$. Alors $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CS} 0$, et donc $\displaystyle\int_0^1 \lim_n f_n(x)\mathrm{d}x = 0$. En revanche, on a vu que $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$.

THÉORÈME II.1.9. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues $f_n : I \to K$. Pour tout $n \geq 0$, on se fixe une primitive F_n de f_n sur I.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) il existe un $x_0 \in I$ tel que $(F_n(x_0))_{n\geq 0}$ possède une limite finie y_0 ;

(ii) $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to K$.

Enfin, soit $F : I \to K$ l'unique primitive de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Alors $(F_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers F sur I, et converge uniformément sur tout invervalle fermé borné inclus dans I.

Démonstration. Par définition, pour tout $x \in I$, on a

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t, \text{ et } F_n(x) = F_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$F_n(x) - F(x) = (F_n(x_0) - y_0) + \int_{x_0}^x (f_n(t) - f(t))\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \geq 0$, et pour tout $x \in I$, on a alors

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x_0) - y_0| + |\int_{x_0}^x (f_n(t) - f(t))\mathrm{d}t|.$$

On a donc

$$0 \leq |F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x_0) - y_0| + |\int_{x_0}^x f_n(t) - f(t)\mathrm{d}t|,$$

pour tout $x \in I$ et tout $n \geq 0$.

Si $x \geq x_0$, on a comme dans la démonstration précédente l'inégalité

$$|\int_{x_0}^{x} f_n(t) - f(t)\mathrm{d}t| \leq (x - x_0)||f_n - f||_I.$$

En revanche, si $x \leq x_0$, on a

$$|\int_{x_0}^{x} f_n(t)-f(t)\mathrm{d}t| = |-\int_{x}^{x_0} f_n(t)-f(t)\mathrm{d}t| = |\int_{x}^{x_0} f_n(t)-f(t)\mathrm{d}t| \leq (x_0-x)||f_n-f||_I,$$

et donc pour tout $x \in I$, on a

$$|\int_{x_0}^{x} f_n(t) - f(t)\mathrm{d}t| \leq |x - x_0| \cdot ||f_n - f||_I.$$

On a finalement

$$0 \leq |F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x_0) - y_0| + |x - x_0| \cdot ||f_n - f||_I,$$

pour tout $x \in I$ et tout $n \geq 0$. Par passage à la limite, on en déduit que $(F_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers F sur I.

Soit maintenant $[a, b] \subset I$, et soit $L = \max(b, x_0) - \min(a, x_0)$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, on a $|x - x_0| \leq L$ (**faites un dessin !**). Ainsi, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [a, b]$, on a

$$0 \leq |F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x_0) - y_0| + L||f_n - f||_I.$$

Par la remarque I.1.6, cela se réécrit

$$0 \leq ||F_n - F||_{[a,b]} \leq |F_n(x_0) - y_0| + L||f_n - f||_I.$$

On conclue en passant à la limite.□

Enfin, on a aussi un théorème de dérivation terme à terme.

THÉORÈME II.1.10. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : I \to K$.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $n \geq 0$, f_n est de classe C^1 sur I ;

(ii) $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \to K$.

(iii) $(f'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction $g : I \to K$. Alors, f est de classe C^1 sur I, et on a $f' = g$. Autrement dit,

$$(\lim_n f_n)' = \lim_n f'_n.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, f_n est une primitive de f'_n sur I. Soit $x_0 \in I$. La suite $(f_n(x_0))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x_0)$, puisque f_n converge simplement vers f sur I. De plus, f'_n est continue pour tout $n \geq 0$, et converge uniformément vers g sur I. Par le théorème précédent, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers l'unique primitive G de g telle que $G(x_0) = f(x_0)$. Mais la limite simple d'une suite de fonctions étant unique, on a $f = G$, et donc $f' = G' = g$. Enfin, par hypothèse f'_n est continue pour tout $n \geq 0$, et donc g est continue par le corollaire II.1.3. Ainsi, f est C^1. □

Remarque II.1.11. Les trois résultats précédents sont encore vrais si on remplace la condition 'pour tout $n \geq 0$' par 'pour n assez grand'.

Tous les résultats précédents restent valables pour des suites de fonctions à plusieurs variables définies sur un même sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Commentaire général. Bien souvent, on n'a pas convergence uniforme sur tout I, mais seulement sur une famille de sous-intervalles qui recouvrent I (i.e. dont la réunion est égale à I), par exemple sur tout intervalle fermé borné inclus dans I. Cela suffit pour avoir les conclusions des théorèmes précédents.

Par exemple, supposons que $f_n : I \to K$ soit continue sur I pour tout $n \geq 0$, et que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $f : I \to K$ sur tout intervalle fermé borné inclus dans I. Soit $x_0 \in I$. Alors, x_0 est contenu dans un intervalle fermé borné J inclus dans I (si $x_1 > x_0 \in I$, alors $[x_0, x_1] \subset I$ et contient x_0). En appliquant le corollaire au théorème II.1.1, on obtient que f est continue sur tout l'intervalle J, donc en particulier, f est continue en x_0. Comme c'est vrai pour tout $x_0 \in I$, alors f est continue sur I.

Il faut comprendre et savoir refaire ce genre de raisonnement.

Mis à part le théorème II.1.6, qui permet de trouver la limite d'une suite d'intégrales sans avoir besoin de les calculer, on peut se demander quel est l'intérêt de tous ces résultats. En général, étant donné une suite de fonctions, on peut calculer la limite f, et voir directement si elle est continue ou C^1. En fait, tout l'intérêt des théorèmes précédents se révèle dans l'étude des séries de fonctions, où l'on sait en général démontrer l'existence de la somme d'une série sans pouvoir la calculer. Ainsi, ces théorèmes vont permettre donner des propriétés de la fonction somme, sans la connaître explicitement.

II.2. Rappels sur les séries numériques

Dans tout ce qui suit, $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels ou de complexes.

Définition II.2.1. On appelle *suite des sommes partielles* de $(u_n)_{n\geq 0}$, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$, avec

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ converge. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Notation. La série de terme général u_n se note $\sum u_n$.

Dans le cas où la série de terme général u_n converge, la limite, notée S, de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est appelée somme de la série et on note

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ ou } \sum_{n\geq 0} u_n.$$

Le reste d'ordre n de la série est alors noté R_n et vaut

$$R_n = S - S_n = \sum_{k\geq n+1} u_k.$$

Remarque II.2.2. Si $\sum u_n$ est CV, alors $\lim_n u_n = 0$, la réciproque étant fausse.

Définition II.2.3. On dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente* (ACV) si $\sum |u_n|$ est convergente. On dit que $\sum u_n$ est *semi-convergente* (SCV) si $\sum u_n$ est convergente, mais pas absolument convergente.

On rappelle quelques théorèmes de convergence de série, sans démonstration.

Théorème II.2.4. *Toute série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente.*

Théorème II.2.5 (Comparaison série-intégrale). *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction* **positive décroissante**. *Alors $\sum f(n)$ CV $\iff \int^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ CV.*

Théorème II.2.6 (Critère de Riemann). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Théorème II.2.7 (Critère de Bertrand). *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(1) $\alpha > 1$

(2) $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Elle diverge dans tous les autres cas.

On rappelle les définitions suivantes.

Définition II.2.8. Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de K($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que (v_n) est *négligeable* devant (u_n) si on a

$$v_n = \varepsilon_n u_n, \lim_n \varepsilon_n = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On le note $v_n = o(u_n)$.

On dit que (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* si on a

$$v_n = \varepsilon_n u_n, \lim_n \varepsilon_n = 1 \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On le note $u_n \sim v_n$.

Théorème II.2.9. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

(i) On suppose que pour tout n assez grand, on a $|u_n| \leq |v_n|$. Si $\sum v_n$ est ACV, alors $\sum u_n$ est ACV.

(ii) Si $|v_n| = o(|u_n|)$, et si $\sum u_n$ est ACV, alors $\sum v_n$ est ACV.

(iii) Si $|u_n| \sim |v_n|$, alors $\sum u_n$ ACV $\iff$ $\sum v_n$ ACV.

Remarque II.2.10. Si $u_n = o(v_n)$, resp. $u_n \sim v_n$, on a $|u_n| = o(|v_n|)$, resp. $|u_n| \sim |v_n|$ (la réciproque étant fausse). Il suffit en effet de passer au module dans la définition.

On peut donc appliquer les points (ii) et (iii) du théorème précédent en enlevant la valeur absolue ou le module (ce qui est parfois plus simple pour montrer la négligeabilité ou calculer les équivalents).

Théorème II.2.11 (Critère de Cauchy). *On suppose que $(|u_n|^{1/n})_{n\geq 0}$ admet une limite ℓ finie ou infinie.*

(a) Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ est ACV.

(b) Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ est DV.

Théorème II.2.12 (Critère de d'Alembert). *On suppose que $u_n \neq 0$ pour tout n suffisamment grand, et que $(\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|})_{n\geq 0}$ admet une limite ℓ finie ou infinie.*

(a) Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ est ACV.

(b) Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ est DV.

Théorème II.2.13 (Critère des séries alternées). *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels décroissante et convergeant vers 0. Alors :*

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ est CV ;

(2) pour tout $n \geq 0$, R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$, et on a $|R_n| \leq a_{n+1}$.

On passe maintenant à la transformation d'Abel.

Lemme II.2.14 (Transformation d'Abel). *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles ou complexes. On note $(B_n)_{n\geq 0}$ la suite de sommes* *partielles associées à la suite $(b_n)_{n\geq 0}$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

THÉORÈME II.2.15 (Critère d'Abel). *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles ou complexes. On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) la suite des sommes partielles associées à la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ est bornée par un réel $M \geq 0$;

(ii) la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ est convergente ;

(iii) la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente. De plus, on a

$$|\sum_{n\geq 0} a_n b_n| \leq M \sum_{n\geq 0} |a_{n+1} - a_n|.$$

COROLLAIRE II.2.16. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels décroissante et convergeant vers 0, et soit une suite $(b_n)_{n\geq 0}$ de réels ou de complexes dont la suite des sommes partielles est bornée par un réel $M \geq 0$. Alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente, et on a*

$$|\sum_{n\geq 0} a_n b_n| \leq M a_0.$$

Démonstration. Puisque $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, on a $|a_{n+1} - a_n| = a_n - a_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{k+1} - a_k| = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Mais puisque $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ est convergente et on a

$$\sum_{n\geq 0} |a_{n+1} - a_n| = a_0.$$

On applique alors le théorème précédent pour conclure.

REMARQUE II.2.17. Si les suites commencent à n_0, les résultats précédents sont vrais mais il faut remplacer 0 par n_0 dans les énoncés.

Exercice : Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

Théorème II.2.18. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont ACV, alors les séries* $\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k})$ *et* $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ *sont ACV, et on a*

$$\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}) = (\sum_{n\geq 0} u_n)(\sum_{n\geq 0} v_n) \text{ et } \sum_{n\geq 0}(u_n+v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n.$$

De plus, pour tout $\lambda \in K$ **non nul**, $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ *est ACV (resp. DV) si seulement si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est ACV (resp. DV). Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est ACV, on a*

$$\sum_{n\geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n.$$

II.3. Séries de fonctions

Nous allons maintenant traduire les définitions et résultats du paragraphe précédent dans le cadre des séries de fonctions. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $u_n : I \to K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I intervalle de $\mathbb{R}$).

On dira que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge *simplement* (resp. uniformément) sur I si la suite des sommes partielles

$$S_n : I \to K, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_n(x).$$

converge simplement (resp. uniformément) sur I.

Retraduisons un peu ces définitions.

La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge *simplement* sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ est convergente. Dans ce cas, on note $S : I \to K$ la fonction définie par

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x), x \in I.$$

On la note aussi $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Par définition, on a

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x) = \sum_{k\geq n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge *uniformément* sur I si et seulement si $||R_n||_I = \sup_{x\in I} |\sum_{k\geq n+1}^{+\infty} u_k(x)|$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

THÉORÈME II.3.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $u_n : I \to K$ (I intervalle de $\mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $a \in I$ ou une extrémité de I.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur I (en particulier, elle converge simplement sur I) ;

(ii) Pour tout $n \geq 0$, $\lim_{x\to a} u_n(x)$ existe et est finie.

Alors, $\sum_{n\geq 0} \lim_{x\to a} u_n(x)$ est convergente, $\lim_{x\to a} \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ existe et est finie, et on a

$$\lim_{x\to a} \sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0} \lim_{x\to a} u_n(x).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que la suite des sommes partielles vérifie les hypothèses du théorème II.1.1.□

REMARQUE II.3.2. Ce théorème reste vrai si la suite (et donc la série) est définie à partir d'un entier n_0. Il reste également vrai si on remplace $\lim_{x\to a}$ par $\lim_{x\to a^+}$, $\lim_{x\to a^-}$, $\lim_{x\to +\infty}$ ou $\lim_{x\to -\infty}$ (si cela a un sens).

COROLLAIRE II.3.3. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : I \to K$ (I intervalle de $\mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $a \in I$.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur I ;

(ii) Pour tout $n \geq 0$, u_n est continue en a.

Alors, $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ est continue en a. En particulier, si u_n est continue sur I pour tout $n \geq 0$, alors $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ est continue sur I.

REMARQUE II.3.4. Encore une fois, ce résultat est vrai si la série commence à n_0. Il reste aussi vrai si on remplace 'continue' par 'continue à gauche' ou 'continue à droite'.

EXEMPLE II.3.5. La série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge sur $I =]1, +\infty[$.

En revanche, la convergence n'est pas uniforme sur I. En effet, supposons le contraire. Comme $u_n : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ a une limite finie en 1^+, égale à $1/n$, alors le théorème II.3.1 nous assure que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{n^x} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge. On obtient une contradiction, puisque cette dernière série numérique diverge.

Théorème II.3.6. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $u_n : [a,b] \to K$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) pour tout $n \geq 0$, u_n est continue ;

(ii) $S = \displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Alors, S est continue sur $[a,b]$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente, et on a

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, on a

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} u_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Encore une fois, on applique le théorème II.1.6 à la suite des sommes partielles. □

On retraduit maintenant le théorème de primitivation.

Théorème II.3.7. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues $u_n : I \to K$. Pour tout $n \geq 0$, on se fixe une primitive U_n de u_n sur I.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) il existe un $x_0 \in I$ tel que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n(x_0)$ converge ;

(ii) $S = \displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur I.

Soit T l'unique primitive de S sur I telle que $T(x_0) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n(x_0)$.

Alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n$ converge simplement vers T sur I, et converge uniformément sur tout invervalle fermé borné inclus dans I.

Théorème II.3.8. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $u_n : I \to K$.*

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $n \geq 0$, u_n est de classe C^1 sur I ;

(ii) $S = \sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur I ;

(iii) $\sum_{n \geq 0} u'_n$ converge uniformément sur I.

Alors, S est de classe C^1 sur I , et on a $S' = \sum_{n \geq 0} u'_n$. Autrement dit, on a

$$(\sum_{n \geq 0} u_n)' = \sum_{n \geq 0} u'_n.$$

Il peut être très délicat d'établir la convergence uniforme d'une série de fonctions, car la fonction R_n est plutôt difficile à étudier. Pour contourner la difficulté, nous allons introduire une nouvele notion de convergence spécifique aux séries.

Définition II.3.9. On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge *normalement* sur I si $\sum_{n \geq 0} ||u_n||_I$ converge.

L'intérêt de cette notion est donnée par la proposition suivante.

Proposition II.3.10. *Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.*

Démonstration. On va montrer que la suite des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum_{n \geq 0} ||u_n||_I$ converge, il existe $N \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $\sum_{k \geq n+1} ||u_k||_I \leq \varepsilon$. Pour tous $n, m \geq N, m \geq n$, et pour tout $x \in I$, on a alors

$$|S_n(x) - S_m(x)| = |\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||u_k||_I \leq \sum_{k \geq n+1} ||u_k||_I \leq \varepsilon,$$

d'où le résultat. □

Exemple II.3.11. On a déjà vu que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$, mais pas uniformément (et donc pas normalement). En revanche, elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 1$. Pour le voir, on va montrer qu'il y a en fait convergence normale sur $[a, +\infty[$.

Il n'est pas difficile de voir que $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc sur $[a, +\infty[$. Ainsi, $||u_n||_{[a,+\infty[} = \dfrac{1}{n^a}$. Comme $\sum_{n\geq 1} ||u_n||_{[a,+\infty[} = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^a}$ converge (puisque $a > 1$), on a convergence normale sur $[a, +\infty[$.

On peut alors en déduire que $S : x \mapsto \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$. En effet, soit $x_0 \in]1, +\infty[$, et soit $1 < a < x_0$. Alors, S converge normalement, donc uniformément sur $[a, +\infty[$, et comme u_n est continue sur $[a, +\infty[$, on en déduit par le corollaire au théorème II.3.1 que S est continue sur $[a, +\infty[$. En particulier, S est continue en x_0, car $x_0 > a$. Comme ceci est vrai pour tout $x_0 \in]1, +\infty[$, on en déduit le résultat.

Achtung !!! La convergence normale implique la convergence uniforme, mais la réciproque est fausse.

Exemple II.3.12. Considérons la série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n + x^2}$. Le critère des séries alternées nous permet d'affirmer que cette série converge simplement sur $[0, +\infty[$. On vérifie facilement que

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} \left|\frac{(-1)^n}{n + x^2}\right| = \frac{1}{n}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, on n'a pas convergence normale. En revanche, la dernière partie du critère des séries alternées nous donne

$$\text{pour tout } x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n + 1 + x^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Par la remarque I.1.6, on a $||R_n||_{[0,+\infty[} \leq 1/n$. On en déduit que $\lim_n ||R_n||_{[0,+\infty[} = 0$, d'où la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Remarquons qu'en fait, on a convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$, car pour tout $n \geq 0$, le terme général est une fonction paire. On en déduit que toutes les sommes partielles S_n sont paires, ainsi que S, et donc R_n également. Par conséquent, on a $\|R_n\|_{\mathbb{R}} = \|R_n\|_{[0,+\infty[}$, qui tend donc vers 0 quand $n \to +\infty$.

Remarque II.3.13. Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur I, alors $u_n \xrightarrow[I]{CU} 0$.

En effet, par hypothèse, la série $\sum_{n\geq 0} ||u_n||_I$ converge, et donc son terme général tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Cette remarque peut parfois servir pour montrer qu'il n'y a pas convergence normale, dans les cas où $||u_n||_I$ n'est pas calculable de manière exacte.

Pour finir, voici un critère établissant la convergence normale.

PROPOSITION II.3.14. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions* $u_n : I \to K$. *Alors,* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge normalement sur* I *si et seulement s'il existe une suite de réels positifs* $(a_n)_{n\geq 0}$ **indépendante de** x *vérifiant les deux conditions suivantes :*

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ *est convergente ;*

(ii) pour tout $n \geq 0$, *et pour tout* $x \in I$, *on a* $|u_n(x)| \leq a_n$.

Démonstration.

Supposons que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur I, et posons $a_n = ||u_n||_I$. Par hypothèse, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente. Par définition de la borne supérieure, la deuxième condition est aussi vérifiée.

Inversement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les conditions de la proposition. Par la remarque I.1.6, la condition (ii) se réécrit

$$||u_n||_I \leq a_n,$$

pour tout $n \geq 0$. Par le critère de comparaison, et en utilisant (i), on obtient que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} ||u_n||_I$ converge, d'où la conclusion.□

REMARQUE II.3.15. Le résultat reste valable si la condition (ii) est vérifiée pour n suffisamment grand.

EXEMPLE II.3.16. Voici un exemple de question typique qu'il faut savoir résoudre : étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx^2)}{n^3}$, ainsi que la continuité et la dérivabilité de la somme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\dfrac{\sin(nx^2)}{n^3}| \leq \dfrac{1}{n^3}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente.

Par le critère précédent, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx^2)}{n^3}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément (et donc simplement) sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction $u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin(nx^2)}{n^3} \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \geq 1$, le corollaire II.3.3 entraîne que la fonction

$$S : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx^2)}{n^3} \in \mathbb{R}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Étudions la dérivabilité de S. Pour tout $n \geq 1, u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a

$$u_n'(x) = \frac{2x\cos(nx^2)}{n^2}.$$

Il faut maintenant la convergence uniforme de la série $\sum u_n'$ sur $\mathbb{R}$. Essayons tout d'abord de voir s'il y a convergence normale. Intuitivement, le x va empêcher la convergence normale puisque l'on peut le choisir suffisamment grand, et que moralement on va pouvoir rendre $|u_n'(x)|$ aussi grand que l'on veut. Pour le voir rigoureusement, on peut par exemple raisonner comme suit : pour tout $n \geq 1$, on a

$$||u_n'||_{\mathbb{R}} \geq |u_n'(\sqrt{2\pi}n^2)| = 2\cos\sqrt{2\pi}(2\pi n^5) = 2\sqrt{2\pi}.$$

En particuler, $||u_n'||_{\mathbb{R}}$ ne converge pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$, et donc $\sum ||u_n'||_{\mathbb{R}}$ diverge.

Ainsi, on n'a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.

Par contre, on peut essayer de voir s'il n'y a pas convergence normale sur des familles d'intervalles qui recouvrent $\mathbb{R}$. On va montrer que $\sum u_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$.

Pour tout $x \in [-a, a]$, on a

$$|u_n'(x)| \leq \frac{2a}{n^2}.$$

Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2a}{n^2}$ converge. Par le critère précédent, $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$, et ceci pour tout $a > 0$. De plus, S converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-a, a]$.

Ainsi, par le théorème II.3.8, on en déduit que $S = \sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est C^1 sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$, et sa dérivée est donnée par

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2x\cos(nx^2)}{n^2}.$$

Mais tout $x \in \mathbb{R}$ est contenu dans un intervalle de la forme $[-a, a], a > 0$ (on peut prendre $[-x-1, x+1]$). On en déduit que S est C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier et que $S'(x)$ est donnée par

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2x\cos(nx^2)}{n^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On peut démontrer par ailleurs que la série $\sum u_n'$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais c'est un peu plus délicat. Voici comment on y arrive : on a

$$||R_n||_{\mathbb{R}} \geq |R_n(\sqrt{2\pi}n^2)| = |\sum_{k\geq n+1} \frac{2\sqrt{2\pi}n^2\cos(2k\pi n^4)}{k^2}| = |2\sqrt{2\pi}\sum_{k\geq n+1}\frac{n^2}{k^2}|,$$

soit

$$||R_n||_{\mathbb{R}} \geq 2\sqrt{2\pi}n^2 \sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^2} \geq 2\sqrt{2\pi}\frac{n^2}{(n+1)^2}.$$

Or, la quantité de droite converge vers $2\sqrt{2\pi} \neq 0$. Par passage à la limite, on voit que $||R_n||_{\mathbb{R}}$ ne peut pas converger vers 0, donc la convergence de la série $\sum u_n'$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice : Soit $u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x} \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

2. Calculer $||u_n||_{]0,+\infty[}$ et montrer qu'il n'y a pas convergence normale sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,+\infty[$ (on pourra utiliser le théorème II.3.1). Retrouver le fait qu'il n'y a pas convergence normale.

4. Établir la continuité de $S = \displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $]0,+\infty[$.

5. Étudier la dérivabilité de S sur $]0,+\infty[$.

Tous les résultats précédents restent valables pour des séries de fonctions à plusieurs variables définies sur un même sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Chapitre III

Séries entières

III.1. Rayon de convergence d'une série entière

Définition III.1.1. Une *série entière* est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels ou de complexes.

Nous allons utiliser les résultats du chapitre précédent pour étudier les séries entières. On va voir que ces séries ont des propriétés particulièrement agréables.

On commence par un résultat fondamental.

Théorème III.1.2. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels ou de complexes. Alors, il existe un unique élément R de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ possédant les deux propriétés suivantes :*

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est ACV ;

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est DV.

De plus, on a $R = \sup\{r \geq 0 | (|a_n| r^n)_{n\geq 0}$ est majorée $\}$.

Démonstration. Montrons l'unicité d'un tel élément. Supposons que R et R' vérifient les deux conditions de l'énoncé. Supposons que $R < R'$ (ce qui implique que R est fini), et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $R < |x| < R'$. Alors, par choix de R, $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge. Mais par choix de R', cette série est absolument convergente, donc convergente, d'où une contradiction. Ainsi $R \geq R'$. En échangeant les rôles de R et R', on obtient $R' \geq R$, et donc $R = R'$.

Passons à l'existence, et posons

$$A = \{r \geq 0 | (|a_n| r^n)_{n\geq 0} \text{ est majorée } \}.$$

Remarquons que A est non vide, puisque $0 \in A$. Posons $R = \sup(A)$ (on rappelle que $\sup(A) = +\infty$ si A n'est pas majorée).

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$. Alors, il existe $r \in A$ tel que $|x| < r$. Sinon, pour tout $r \in A$, on a aurait $r \leq |x|$. Ainsi, $|x|$ serait un majorant de A, et on aurait $R \leq |x|$, d'où une contradiction. Mais alors, $(|a_n|r^n)_{n\geq 0}$ est majorée. Soit M un majorant de cette suite (qui est donc nécessairement positif). On a alors

$$|a_n| \cdot |x|^n = |x/r|^n |a_n| r^n \leq M|x/r|^n.$$

Comme $|x/r| < 1$, la série $\sum M|x/r|^n$ converge, et donc $\sum |a_n| \cdot |x|^n$ converge également. Ainsi, $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est ACV.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R$. Alors $(|a_n| \cdot |x|^n)_n$ n'est pas majorée. Sinon on aurait $|x| \in A$, et donc $|x| \leq R$ par définition de la borne supérieure. En particulier, $(a_n x^n)_n$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge.□

Définition III.1.3. L'élément R de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini dans le théorème précédent est appelé le *rayon de convergence* de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

Remarques III.1.4.

(1) Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est CV, alors $|x| \leq R$.

En effet, dans le cas contraire, on aurait $|x| > R$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ serait divergente.

(2) Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est DV, alors $|x| \geq R$.

En effet, dans le cas contraire, on aurait $|x| < R$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ serait ACV, donc convergente.

(3) Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est SCV, alors $|x| = R$.

En effet, puisqu'elle n'est pas DV, on a $|x| \leq R$. Mais puisqu'elle n'est pas ACV, on a $|x| \geq R$.

(4) Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $(|a_n x^n|)_{n\geq 0}$ est majorée, alors $|x| \leq R$ (c'est par exemple le cas si $(|a_n x^n|)_{n\geq 0}$ est convergente).

En effet, dans ce cas, $|x| \in \{r \geq 0 | (|a_n|r^n)_{n\geq 0}$ est majorée $\}$. Comme R est le sup de cet ensemble, on a la conclusion.

En particulier, si $(|a_n|)_{n\geq 0}$ est majorée (par exemple, si elle est convergente), alors $R \geq 1$.

Il faut comprendre et savoir faire ce genre de raisonnement au cas par cas.

Le lemme suivant est particulièrement utile pour le calcul de rayon de convergence.

LEMME III.1.5. *Soient* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *deux suites de complexes. On suppose que* $|a_n| \sim |b_n|$. *Alors* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *ont même rayon de convergence.*

Démonstration. L'hypothèse implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les suites $|a_n||x|^n$ et $|b_n||x|^n$ sont équivalentes. Ainsi, on obtient que , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum a_n x^n$ est ACV si et seulement si $\sum b_n x^n$ est ACV.

Soient R et R' les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ respectivement. Si $R < R'$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $R < |x| < R'$. Mais alors, par définition du rayon de convergence, $\sum a_n x^n$ est DV et $\sum b_n x^n$ est CV, ce qui contredit ce qui précède. Ainsi, $R \geq R'$. En échangeant les rôles de a_n et b_n, on obtient aussi $R' \geq R$, d'où $R = R'$.

REMARQUE III.1.6. Si $a_n \sim b_n$, alors $|a_n| \sim |b_n|$, et on peut donc appliquer le résultat précédent.

Méthodes de calculs du rayon de convergence.

(1) Utiliser les critères de d'Alembert ou de Cauchy et la définition.

(2) Utiliser les remarques précédentes.

(3) Utiliser le lemme III.1.5 (et la remarque qui suit).

(4) Utiliser la formule explicite.

EXEMPLES III.1.7.

(1) Considérons $\sum n^3 x^n$. On a

$$|\frac{(n+1)^3 x^{n+1}}{n^3 x^n}| = (1 + 1/n)^3 |x| \to |x|.$$

Par le critère de d'Alembert, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, la série est ACV, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$, la série est DV. Par définition du rayon de convergence, on en déduit que $R = 1$.

(2) Considérons $\sum 2^n x^{2n}$. C'est bien une série de la forme $\sum a_n x^n$ (mais les termes de rang impair sont nuls). On a

$$|2^n x^{2n}|^{1/n} = 2|x|^2 \to 2|x|^2.$$

Par le critère de Cauchy, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $2|x|^2 < 1$, la série est ACV, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $2|x|^2 > 1$, la série est DV. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1/\sqrt{2}$, la série est ACV, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > /\sqrt{2}$, la série est DV.

Par définition du rayon de convergence, on en déduit que $R = 1/\sqrt{2}$. Remarquons que le critère de d'Alembert marche très bien également.

(3) Considérons $\sum \cos(n)x^n$. Si $x = 1$, la série est DV, puisque $\cos(n) \not\to 0$. Donc, $1 \geq R$ par la remarque III.1.4 (2), soit $R \leq 1$. Remarquons maintenant que $(|\cos(n)|)_{n\geq 0}$ est majorée, et donc $R \geq 1$ par la remarque III.1.4 (4). Ainsi, $R = 1$.

(4) Considérons $\sum \cos(\frac{1}{n})x^n$. On a $\cos(\frac{1}{n}) \sim 1$ et ainsi, $\sum \cos(\frac{1}{n})x^n$ et $\sum x^n$ ont même rayon de convergence. Or, le rayon de convergence de la seconde série entière est 1. Donc $R = 1$.

(5) Considérons $\sum \sin(\frac{1}{n})x^n$. On a $\sin(\frac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{n}$ et ainsi, $\sum \sin(\frac{1}{n})x^n$ et $\sum \dfrac{x^n}{n}$ ont même rayon de convergence. Or, le rayon de convergence de la seconde série entière est 1. Pour le voir, on peut soit utiliser d'Alembert, soit remarquer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est SCV, et utiliser la remarque III.1.4 (3). Donc $R = 1$.

(6) Considérons $\sum (2-(-1)^n)^{-n}x^n$. On a $2-(-1)^n = 1$ ou 3, et donc $(2-(-1)^n)^{-n} \leq 1$ pour tout $n \geq 0$. Cette suite étant majorée, on a $R \geq 1$ par la remarque III.1.4 (4). De plus, la suite $(2-(-1)^n)^{-n}$ ne converge pas vers 0 (puisque les termes de la suite sont égaux à 1 une fois sur deux). En particulier, $\sum (2-(-1)^n)^{-n}$ diverge et on a $1 \geq R$ par la remarque III.1.4 (2). D'où $R = 1$.

(7) Considérons $\sum \ln(\dfrac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})x^n$. On a

$$\ln(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}) = \ln(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

En particulier, cette suite est majorée et donc $R \geq 1$ par la remarque III.1.4 (4).

On va maintenant montrer que $\sum \ln(\dfrac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})$ est DV, ce qui prouvera que $1 \geq R$ par la remarque III.1.4 (2). On a

$$\ln(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}) = \ln((1+\frac{1}{n})^{-1/2}\cdot(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})) = \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n}).$$

On vérifie alors aisément que l'on a

$$\ln(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}}).$$

Par le critère des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV. Par le critère de Riemann, $\sum \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}}$ est ACV, donc CV. Par le critère de négligeabilité,

$\sum o(\frac{1}{n^{3/2}})$ est ACV, donc CV. Enfin, par le critère de Riemann, $\sum \frac{1}{n}$ est DV. On en déduit que $\sum \ln(\dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})$ est DV. Finalement, $R = 1$.

Remarques III.1.8.

(1) Lorsque $x = \pm R$, on ne peut a priori rien dire de la nature de la série $\sum a_n x^n$. Tout peut arriver ! La série peut converger R et $-R$, diverger en R et $-R$, converger en R et diverger en $-R$...A titre d'exercice, le lecteur pourra trouver une série entière correspondant à chaque cas.

(2) Le rayon de convergence peut être nul ou infini. Pour s'en convaincre, on pourra considérer les séries $\sum n! x^n$ et $\sum \dfrac{x^n}{n!}$.

Exercice. Calculer le rayon de convergence des séries entières de la forme $\sum \frac{P(n)}{Q(n)} x^n$ et $\sum \frac{P(n)}{n!} x^n$, où P et Q sont des polynômes (et Q ne s'annule pas sur les entiers).

On continue par une proposition qui nous sera utile par la suite.

Proposition III.1.9. *Les séries entières*

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n, \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ et } \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

ont même rayon de convergence.

Démonstration. Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, et soit R' le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$. Soit $x \in \mathbb{R}, |x| < R'$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$|a_n x^n| \leq |n a_n x^{n-1}| \cdot |x|/n \leq |n a_n x^{n-1}||x|.$$

Comme $|x| < R'$, la série $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ est ACV, donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est alors aussi ACV.

Si on avait $R' > R$, alors il existerait $x \in \mathbb{R}$ tel que $R < |x| < R'$, ce qui contredirait ce qui précède, puisque pour ce x, on aurait $|x| < R'$, mais $\sum a_n x^n$ serait DV par définition de R. On a donc $R' \leq R$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}, |x| < R$, et soit $|x| < r < R$. Par définition de R, $\sum a_n r^n$ est ACV. D'autre part, on a

$$n |a_n| |x|^{n-1} = |a_n| r^n \frac{n}{r} (|x|/r)^{n-1}.$$

Or, $\frac{n}{r}(|x|/r)^{n-1} \to 0$ car $|x|/r < 1$, et donc $na_nx^{n-1} = o(a_nr^n)$. Ainsi, $\sum na_nx^{n-1}$ est ACV. Si on avait $R > R'$, il existerait $x \in \mathbb{R}$ tel que $R' < |x| < R$, ce qui contredirait ce qui précède, puisque pour ce x, on aurait $|x| < R$, mais $\sum na_nx^{n-1}$ serait DV par définition de R'. On a donc $R \leq R'$.

Finalement, on obtient $R = R'$. En appliquant ceci à la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n}x^n$, on montre que le rayon de convergence de cette série est aussi égal à R.□

Pour finir, on s'intéresse au rayon de convergence d'une somme et d'un produit.

Proposition III.1.10. *Soient* $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_nx^n$ *deux séries entières, de rayons de convergence respectifs* R *et* R'*, et soit* $\lambda \in K$ **non nul**. *Alors :*

(1) *le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0} \lambda a_nx^n$ *est* R*. De plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}, |x| < R$*, on a*

$$\sum_{n\geq 0} \lambda a_nx^n = \lambda \sum_{n\geq 0} a_nx^n.$$

(2) *le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k})x^n$ *est* $\geq \min(R, R')$*. De plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}, |x| < \min(R, R')$*, on a*

$$\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0} a_kb_{n-k})x^n = (\sum_{n\geq 0} a_nx^n)(\sum_{n\geq 0} b_nx^n).$$

(3) *le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ *est* $\geq \min(R, R')$*, et on a égalité si* $R \neq R'$*. De plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}, |x| < \min(R, R')$*, on a*

$$\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n\geq 0} a_nx^n + \sum_{n\geq 0} b_nx^n.$$

Démonstration.

Le point (1) provient directement du théorème II.2.18 et de la définition du rayon de convergence. Soit R'' le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k})x^n$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, |x| < \min(R, R')$, les séries $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_nx^n$ sont ACV. On sait alors que $\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k})x^n$ est ACV et que sa somme est celle annoncée par le théorème II.2.18. Si on avait $\min(R, R') > R''$, il existerait $x \in \mathbb{R}$ tel que $R'' < |x| < \min(R, R')$, ce qui contredirait le fait précédent (comme dans la démonstration ci-dessus). Ainsi, $\min(R, R') \leq R''$.

Montrons le point (3). Notons cette fois R'' le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$. Un raisonnement identique au précédent montre que $R'' \geq \min(R, R')$ et que l'on a l'égalité entre séries désirées. Supposons maintenant que $R \neq R'$, par exemple $R < R'$, et soit $x \in \mathbb{R}, R < |x| < R'$. Alors $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ est ACV. Si $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ était ACV, puisque $\sum\limits_{n\geq 0} -b_n x^n$ est aussi ACV, alors $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n = \sum\limits_{n\geq 0}(a_n + b_n - b_n)x^n$ le serait aussi, et on aurait $|x| \leq R$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ n'est pas ACV, ce qui implique que $|x| \geq R''$.

Si on avait $R'' > R$, il existerait $x \in \mathbb{R}$ tel que $R < |x < |R'$ et $|x| < R''$, ce qui contredirait l'assertion précédente (il suffit de prendre $R < |x| < \min(R', R''))$.

Finalement, $R'' \leq R = \min(R, R')$, d'où l'égalité $R'' = \min(R, R')$. □

Remarque III.1.11. Le théorème précédent est optimal. Par exemple, on peut trouver deux séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R et R', telles que $\sum\limits_{n\geq 0}(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})x^n$ soit de rayon de convergence $> \min(R, R')$.

On peut trouver aussi des exemples tels que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ soit $> R$ si $R = R'$

Exemples III.1.12. (1) Si on considère les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} -x^n$, alors elles ont même rayon de convergence $R = 1$, mais la série $\sum\limits_{n\geq 0}(1-1)x^n = 0$ a un rayon de convergence infini.

(2) Posons $a_n = 1$ pour tout $n \geq 0$, et $b_0 = 1, b_1 = -1, b_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. Alors $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n = \sum\limits_{n\geq 0} x^n$ a un rayon de convergence $R = 1$, et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n = 1 - x$ a un rayon de convergence $R' = +\infty$. On a donc $\min(R, R') = 1$. Par contre, on vérifie aisément que $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1$

si $n = 0$ et 0 si $n \geq 1$. La série $\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})x^n$ est donc de rayon de convergence $+\infty > 1$.

(3) On peut aussi trouver un exemple avec des rayons de convergence finis. Soit $a_0 = 1, a_n = 2(-1)^n, n \geq 1$, et soit $b_0 = 1, b_n = 2, n \geq 1$. On vérifie que les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1. Posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On va montrer que $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ a un rayon de convergence infini.

En fait, on a $c_0 = a_0 b_0 = 1$, et pour $n \geq 1$, on a

$$c_n = a_n + b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = 2(-1)^n + 2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k.$$

On vérifie aisément (par calcul direct ou par récurrence) que $\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k$ vaut 0 si n est impair et -1 si n est pair. On a alors $c_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc $\sum_{n\geq 0} c_n x^n = 1$, et a donc un rayon de convergence infini.

III.2. Propriétés des séries entières, applications

On commence par un lemme.

LEMME III.2.1. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors, pour tout $0 < r < R$, $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$.*

Démonstration. Pour tout $x \in [-r, r]$, on a

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n.$$

Puisque $r < R$, $\sum a_n r^n$ est convergente. Par la proposition II.3.14, on a le résultat.

On peut alors démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME III.2.2. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul, et soit*

$$f :]-R, R[\to K, x \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Alors :

(1) *f est infiniment dérivable sur $]-R,R[$, et pour tout $p \geq 1$, on a*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n \geq p} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)\cdots(n+p)a_{n+p}x^n,$$

pour tout $x \in]-R,R[$.

De plus, pour tout $p \geq 0$, on a $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

(2) *L'application*

$$F :]-R,R[\to K, x \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat sur tout intervalle de la forme $[-r,r]$, avec $0 < r < R$, puisque tout élément de $]-R,R[$ appartient à un intervalle de cette forme (faire un dessin !).

Par le lemme III.2.1, la série définissant f converge normalement, donc uniformément, sur $[-r,r]$. Comme $x \mapsto a_n x^n$ est continue pour tout n, on en déduit par le corollaire au théorème II.3.1 que f est continue sur $[-r,r]$. De plus, on remarque que la série définissant F converge pour $x_0 = 0$, et vaut 0. On applique alors le théorème II.3.7 pour obtenir (2).

Par la proposition III.1.9, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ a rayon de convergence R. Elle converge donc normalement, donc uniformément, sur $[-r,r]$. Comme $x \mapsto a_n x^n$ est de classe C^1 sur $[-r,r]$, on peut appliquer le théorème II.3.8 pour obtenir que f est C^1 sur $[-r,r]$, et que

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, \text{ pour tout } x \in [-r,r].$$

En réitérant le raisonnement, on montre (par récurrence) le résultat voulu.

La dernière partie du point (1) s'obtient en remplaçant x par 0 dans l'égalité.□

COROLLAIRE III.2.3. *Soient deux séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} b_n x^n$. On suppose qu'il existe un $r > 0$ tel que les deux séries entières convergent sur $]-r,r[$ et*

$$\sum a_n x^n = \sum b_n x^n \text{ pour tout } x \in]-r,r[.$$

Alors, les deux séries entières ont un rayon de convergence non nul et on a $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$.

En particulier, si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *est une série entière tel qu'il existe* $r > 0$ *pour lequel on a*

$$\sum a_n x^n = 0 \text{ pour tout } x \in]-r, r[,$$

alors $a_n = 0$ *pour tout* $n \geq 0$.

Démonstration. Soit $x \in]-r, r[$. Par hypothèse, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ convergent. Si R et R' désignent leurs rayons de convergences respectifs, la remarque III.1.4 (1) montre que $|x| \leq R$ et $|x \leq R'$. Si on avait $r > R$, il existerait $x \in \mathbb{R}$ tel que $R < |x| < r$, ce qui contredit ce qui précède. Donc $r \leq R$, et de même $r \leq R'$. En particulier, $R > 0$ et $R' > 0$.

Soient $f :]-R, R[\to K, x \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $g :]-R', R'[\to K, x \mapsto \sum_{n\geq 0} b_n x^n$. Par le théorème précédent, pour tout $p \geq 0$, on a

$$a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \text{ et } b_p = \frac{g^{(p)}(0)}{p!}.$$

Mais f et g coïncident sur $]-r, r[$ (qui est bien inclus dans le domaine de définition de f et de g car $r \leq R$ et $r \leq R'$). Leurs dérivées successives en 0 coïcident donc également, d'où la conclusion. Pour la deuxième partie, il suffit de prendre $b_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. □

Définition III.2.4. Une fonction $f : I \to K$ est dite *développable en série entière* autour de 0 s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel $0 < r \leq R$ tel que $]-r, r[\subset I$ et

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ pour tout } x \in]-r, r[.$$

D'après les résultats précédents, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est unique, et est appelé le *développement en série entière* (DSE) de f autour de 0.

Remarque III.2.5. Grâce au théorème précédent, on voit que si f admet un DSE autour de 0, alors elle est de classe C^∞ autour de 0. La réciproque est fausse!!! On remarque aussi que si f admet un DSE, c'est nécessairement

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

pour tout x dans un voisinage de 0.

Grâce à ces résultats, les séries entières permettent (parfois) de résoudre des équations différentielles.

Exemple III.2.6. Considérons l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0, y(0) = 1.$$

Supposons qu'il y ait une solution f développable en série entière, c'est-à-dire $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur un intervalle ouvert centré en 0, où la série entière a un rayon de convergence R **non nul**.

Par le théorème précédent, on a

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

En remplaçant dans l'équation, on obtient, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq 1} n a_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} = 0.$$

En faisant un changement d'indices dans la dernière somme, on obtient

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq 1} n a_n x^n + \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^n = 0.$$

On isole le terme en x, et on regroupe les autres termes, pour obtenir

$$a_1 x + \sum_{n\geq 2} (n^2 a_n + a_{n-2}) x^n = 0,$$

pour tout $x \in]-R, R[$. Puisque R est supposé non nul, le corollaire précédent nous donne

$$a_1 = 0, n^2 a_n + a_{n-2} = 0 \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Enfin, la condition $f(0) = 1$ donne aussi $a_0 = 1$.

Une récurrence facile, laissée au lecteur, montre alors que l'on a

$$a_{2m+1} = 0 \text{ et } a_{2m} = \frac{(-1)^m}{4^m (m!)^2}.$$

Ainsi, **si** f est une solution développable en série entière, alors on a nécessairement

$$f(x) = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{4^m (m!)^2} x^{2m}, x \in]-R, R[.$$

Il faut maintenant vérifier que le rayon de convergence est bien non nul. On pourra ensuite remonter les calculs pour affirmer qu'effectivement f est bien solution du problème.

En utilisant le critère de d'Alembert, on voit que $R = +\infty$, et donc que f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La plupart des fonctions usuelles admettent un DSE autour de 0. Afin de les trouver, on peut soit étudier le reste de la forme de Taylor, soit essayer de l'obtenir par dérivation ou intégration d'un DSE connu, soit montrer qu'une équation différentielle vérifiée par f admet une unique solution posséfant un DSE.

Par exemple, la fonction exponentielle est l'unique solution de

$$y' - y = 0, y(0) = 1.$$

Or, on peut montrer comme précédemment que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini, et est aussi solution de l'équation. Ainsi, on a

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}.$$

De même, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

En utilisant les opérations sur les séries entières, on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{ch } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\text{sh } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De plus, on a :

$$\text{pour tout } x \in]-1,1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

À partir de ce développement, on peut trouver , en remplaçant x par $-x, x^2, -x^2$ (ce qui est légitime, car si $x \in]-1,1[$, il en est de même de $-x, x^2, -x^2$), pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n},$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

En intégrant terme à terme, on a, pour $x \in]-1,1[$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$\text{Argth } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\text{Arctan } x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On peut aussi montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Il faut connaître ces développements classiques ou savoir les retrouver rapidement, soit pour les combiner pour développer en série entière de nouvelles fonctions, soit pour calculer la somme de séries entières.

Donnons maintenant une application des séries entières à la combinatoire.

Exemple III.2.7. On considère le problème suivant. Dans un village de n habitants ($n \geq 1$), chaque habitant reçoit une et seule lettre. Si le courrier est distribué au hasard, quelle est la probabilité que personne ne reçoive la lettre qui lui est destiné ?

Commençons par retraduire le problème en termes mathématiques. On numérote les habitants de 1 à n, et on numérote également les lettres correspondantes de 1 à n, de sorte que la lettre numéro i soit destinée à la lettre numéro i. Une distribution de courrier correspond donc de manière unique à une permutation de l'ensemble $[|1,n|]$, c'est-à-dire à une bijection $f : [|1,n|] \to [|1,n|]$ (la lettre i est remise à l'habitant $f(i)$). Rappelons qu'il y a $n!$ bijections de $[|1,n|]$ sur lui-même.

L'habitant i reçoit la lettre qui lui est destiné si et seulement si $f(i) = i$, c'est-à-dire si et seulement si i est un point fixe de f. Ainsi, personne ne recevra la lettre qui lui est destiné si et seulement si f est sans points fixes. Si on note D_n l'ensemble des permutations de $[|1,n|]$ sans point fixe, on veut donc calculer la quantité

$$\frac{D_n}{n!}.$$

On convient que $D_0 = 1$.

Remarquons maintenant que l'on peut ranger les permutations de $[|1,n|]$ selon leur nombre de points fixes. Soit $0 \leq k \leq n$. Pour définir une permutation avec exactement k points fixes, il faut définir :

- l'ensemble E des k éléments de $[|1,n|]$ qui seront fixes

- l'image des $n-k$ éléments du complémentaire $E' = [|1,n|] \setminus E$.

Remarquons que l'image d'un élément de E' est un élément de E' : si $i \in E'$ est tel que $f(i) \notin E'$, alors $f(i)$ serait un point fixe de f, soit $f(f(i)) = f(i)$. Mais par bijectivité de f, on aurait $f(i) = i$, et donc $i \in E$, ce qui est impossible car $i \in E'$.

De plus, un élément $i \in E'$ vérifie nécessairement $f(i) \neq i$ (par définition de E').

Ainsi, la restriction de d à E' définit une permutation de E' sans points fixes. Il y a donc $\binom{n}{k}$ choix pour E et D_{n-k} choix pour l'image des éléments du complémentaire. Il ya donc $\binom{n}{k} D_{n-k}$ permutations avec exactement k points fixes. Comme on peut ranger les permutations de $[|1,n|]$ selon leur nombre de points fixes, et qu'il y a $k!$ permutations, on obtient

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \text{ pour tout } n \geq 0,$$

soit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{D_{n-k}}{(n-k)!} = 1 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ceci ressemble furieusement au terme général du produit de deux séries entières. Cela donne envie de poser

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n.$$

Remarquons que cette série entière a un rayon de convergence $R \geq 1$. En effet, par définition de D_n, on a $D_n \leq n!$ pour tout $n \geq 0$, et donc

$$\frac{D_n}{n!} \leq 1 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On utilise alors par exemple la remarque III.1.4 (4).

De plus, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et vaut e^x. La proposition III.1.10 (2) montre que la série entière de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{D_{n-k}}{(n-k)!}$ a un rayon de convergence $\geq \min(R,1) = 1$, donc converge en particulier pour $x \in]-1,1[$, et on a

$$\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{D_{n-k}}{(n-k)!})x^n = (\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!})(\sum_{n\geq 0}\frac{D_n}{n!}x^n) = e^x f(x) \text{ pour tout } x \in]-1,1[.$$

Mais comme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{D_{n-k}}{(n-k)!} = 1$ pour tout $n \geq 0$, on obtient

$$e^x f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ pour tout } x \in]-1,1[.$$

Ainsi, on a

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} \text{ pour tout } x \in]-1,1[.$$

En réutilisant le même théorème, et l'égalité $e^{-x} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{D_n}{n!}x^n = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!})x^n \text{ pour tout } x \in]-1,1[.$$

Par unicité du DSE, on obtient

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Remarquons que cette série converge vers $1/e$, et donc pour n assez grand, la probabilité recherchée est environ égale à $1/e \approx 0.368$. Grâce au critère des séries alternées, on peut même préciser de manière plus fine : pour tout $n \geq 0$, on a

$$|\frac{D_n}{n!} - 1/e| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

En particulier, si le village contient au moins 5 habitants, on a $\frac{D_n}{n!} = 0.37$ à 10^{-2} près. Il y a donc 37 % de chances pour que personne ne reçoive la bonne lettre dès qu'il y a au moins 5 habitants.

On finit ce chapitre en donnant une méthode de calcul systématique de la somme de certaines séries entières. Commençons par les séries du type

$$\sum_{n\geq 0} \frac{P(n)}{n!} x^n,$$

où P est un polynôme. On vérifie que le rayon de convergence est infini (**Exercice**).

On commence par remarquer que si P est un polynôme de degré d, alors il existe $c_0, \dots, c_d \in K$ uniques tels que

$$P(n) = c_d n(n-1)\cdots(n-d+1) + \cdots + c_2 n(n-1) + c_1 n + c_0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Pour trouver ces coefficients, on remplace successivement n par $0, 1, \dots, d$.

Exemple III.2.8. Considérons $P(n) = n^2 + n + 1$. On veut trouver $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(n) = c_2 n(n-1) + c_1 n + c_0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On a $P(0) = 1 = c_0$. De plus, $P(1) = 3 = c_1 + c_0$, d'où $c_1 = 2$. Enfin, $P(2) = 7 = 2c_2 + 2c_1 + c_0$, soit $c_2 = 1$. Ainsi,

$$n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On est donc réduit à calculer la somme de la série entière

$$S_d(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)\cdots(n-d+1)}{n!} x^n.$$

Remarquons que les $d-1$ premiers termes sont nuls. On a donc

$$S_d(x) = \sum_{n\geq d} \frac{x^n}{(n-d)!} = x^d \sum_{n\geq d} \frac{x^{n-d}}{(n-d)!} = x^d \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = x^d e^x.$$

Il ne faut pas apprendre ces résultats par coeur, mais comprendre la méthode et savoir l'utiliser.

Exemple III.2.9. Calculons $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!} x^n$. On a

$$n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{n!}x^n + \sum_{n\geq 0}\frac{2n}{n!}x^n + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n \\
&= \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!}x^n + 2\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n!}x^n + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n \\
&= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!}x^n + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n \\
&= x^2\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!}x^{n-2} + 2x\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n \\
&= (x^2+2x+1)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n \\
&= (x^2+2x+1)e^x.
\end{aligned}$$

Pour les séries du type

$$\sum_{n\geq 0} P(n)x^n,$$

où P est un polynôme, c'est à peine plus compliqué. Ici, le rayon de convergence est 1 (**Exercice**). Pour les mêmes raisons que précédemment, on est réduit à calculer

$$S_d(x) = \sum_{n\geq 0} n(n-1)\cdots(n-d+1)x^n.$$

Encore une fois, les $d-1$ premiers termes sont nuls, et on a donc

$$S_d(x) = \sum_{n\geq d} n(n-1)\cdots(n-d+1)x^n = x^d\sum_{n\geq d} n(n-1)\cdots(n-d+1)x^{n-d}.$$

Or, on a

$$\sum_{n\geq d} n(n-1)\cdots(n-d+1)x^{n-d} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(d)} = \frac{d!}{(1-x)^{d+1}}.$$

Ainsi, on a

$$S_d = \frac{d!\cdot x^d}{(1-x)^{d+1}}.$$

Encore une fois, il ne faut pas apprendre cela par coeur, mais connaître la méthode et savoir l'appliquer.

Exemple III.2.10. Calculons $S(x) = \sum_{n\geq 0}(n^2+n+1)x^n$. Rappelons que l'on a

$$n^2+n+1 = n(n-1)+2n+1 \text{ pour tout } n\geq 0.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & \sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n + \sum_{n\geq 0} 2nx^n + \sum_{n\geq 0} x^n \\ & = & \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^n + 2\sum_{n\geq 1} nx^n + \sum_{n\geq 0} x^n \\ & = & x^2 \sum_{n\geq 0} n(n-1)x^{n-2} + 2x\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} + \sum_{n\geq 0} x^n \end{array}.$$

Or, on sait que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$. En utilisant le théorème III.2.2 deux fois de suite, on obtient successivement

$\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ et $\dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

On a ainsi

$$S(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \text{ pour tout } x \in]-1,1[.$$

Tous les résultats de ce chapitre sont valables sur l'intervalle ouvert $]-R,R[$. En particulier, le théorème III.2.2 nous dit qu'une série entière est continue sur $]-R,R[$. En général, il n'y a pas nécessairement convergence en R ou $-R$ (voir la remarque III.1.8 (1)). Lorsque c'est le cas, on peut se demander légitimement s'il y a continuité ou non.

Le résultat suivant répond à la question.

THÉORÈME III.2.11. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $0 < R < +\infty$.

(i) Si $\sum_{n\geq 0} |a_n| R^n$ *converge, alors* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge normalement sur* $[-R,R]$*, et sa somme est continue sur* $[-R,R]$.

(ii) Si $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ *converge, alors* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge uniformément sur* $[0,R]$. *En particulier, sa somme est continue en* R.

(iii) Si $\sum_{n\geq 0} a_n (-R)^n$ *converge , alors* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge uniformément sur* $[-R,0]$. *En particulier, sa somme est continue en* $-R$.

Démonstration.

(i) Supposons que $\sum_{n\geq 0} |a_n| R^n$ converge. Pour tout $x \in [-R,R]$ et tout $n \geq 0$, on a $|a_n x^n| \leq |a_n| R^n$. Comme la série $\sum_{n\geq 0} |a_n| R^n$ converge, on a bien convergnce normale sur $[-R, R]$ par la proposition II.3.14. En particulier, il y a convergence uniforme sur $[-R, R]$ par la proposition II.3.10, d'où la continuité par le corollaire II.3.3.

(ii) Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $g(t) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n t^n$. En effectuant le changement de variables $t = x/R$, on a

$$\sup_{x \in [0,R]} |\sum_{n \geq m+1} a_n x^n| = \sup_{t \in [0,1]} |\sum_{n \geq m+1} a_n R^n t^n|.$$

Il faut et il suffit donc de montrer que g converge uniformément sur $[0, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge, la suite des sommes partielles associées est une suite de Cauchy. Il existe donc $N \geq 0$ tel que, pour tous $n \geq m \geq N$, on a

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k R^k| \leq \varepsilon \ (1)\ .$$

En particulier, en faisant $n \to +\infty$, pour tout $m \geq N$, on a

$$|\sum_{k \geq m+1} a_k R^k| \leq \varepsilon \ (2)\ .$$

Fixons $m \geq N$. Supposons tout d'abord que $0 \leq t < 1$. Par (1), la suite des sommes partielles associées à la suite $(a_n R^n)_{n \geq m+1}$ est donc bornée par ε. Remarquons aussi que la suite $(t^n)_{n \geq m+1}$ est décroissante et converge vers 0. Par le corollaire II.2.16 et la remarque qui suit, on a

$$|\sum_{n \geq m+1} a_n R^n t^n| \leq \varepsilon t^{m+1}.$$

Pour tout $t \in [0, 1[$, on a donc

$$|\sum_{n \geq m+1} a_n R^n t^n| \leq \varepsilon.$$

Ceci est encore vrai pour $t = 1$ par (2). Ainsi, pour tout $m \geq N$, on obtient

$$\sup_{t \in [0,1]} |\sum_{n \geq m+1} a_n R^n t^n| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que, pour tout $m \geq N$, on a

$$\sup_{t \in [0,1]} |\sum_{n \geq m+1} a_n R^n t^n| \leq \varepsilon.$$

Autrement, on a montré que $\sup_{t \in [0,1]} |\sum_{n \geq m+1} a_n R^n t^n|$ converge vers 0 lorsque $m \to +\infty$. Autrement dit, g converge uniformément sur $[0, 1]$, et donc $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$. En particulier, elle est continue sur $[0, R]$ par le corollaire II.3.3. La démonstration de (iii) est identique à celle de (ii). $\square$

EXEMPLE III.2.12. On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

le rayon de convergence de la série entière étant égal à 1. La série entière converge en $x = 1$, par le critère des séries alternées. Par le théorème précédent, la somme de la série entière est continue en 1. Comme la fonction Arctan est aussi continue en 1, on en déduit que l'égalité précédente est vraie aussi pour $x = 1$, et on a donc

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Chapitre IV

Séries de Fourier

IV.1. Fonctions C^i par morceaux.

Rappelons qu'au début de cours, nous avons été amené à poser le problème suivant :

si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est un signal T-périodique, peut-on décomposer f en série d'harmoniques ?

Par exemple, si $\varphi : [0, L] \to \mathbb{C}$ est continue, et si $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est le signal obtenu en prolongeant φ par imparité et par périodicité, peut-on décomposer ψ en série de sinus ?

Le signal ψ, tout comme certains des signaux utilisés en électronique ou en physique ne sont pas continus (par exemple la fonction créneau). En revanche, ils sont continus par morceaux dans le sens suivant :

Définition IV.1.1. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite *continue par morceaux*, resp. C^1 *par morceaux*, s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ telle que , pour tout $k = 1, \ldots, p$, les deux conditions suivantes soient vérifiéss :

(i) f est continue, resp. C^1, sur $]a_{k-1}, a_k[$

(ii) f se prolonge en une fonction $f_k : [a_{k-1}, a_k] \to \mathbb{C}$ continue, resp. C^1 sur $[a_{k-1}, a_k]$.

La condition (ii) est équivalente à

(ii') $f(a_{k-1}^+)$ et $f(a_k^-)$ existent, resp. $f(a_{k-1}^+), f'(a_{k-1}^+), f(a_k^-), f'(a_k^-)$ existent.

Le prolongement f_k est d'ailleurs donné par

$$f_k(x) = \begin{cases} f(a_{k-1}^+) & \text{si} \quad x = a_{k-1} \\ f(x) & \text{si} \quad a_{k-1} < x < a_k \\ f(a_k^-) & \text{si} \quad x = a_k \end{cases}$$

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, resp. C^1 par morceaux si elle l'est sur tout $[a, b] \subset I$.

Exemples IV.1.2. Soit $i = 0$ ou 1.

(1) Toute fonction C^i sur I est C^i par morceaux.

(2) La fonction créneau est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(3) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique est C^i par morceaux si et seulement si elle est C^i par morceaux sur un intervalle fermé borné de longueur T fixé.

(4) Si f et g sont C^i par morceaux sur $[a,b]$, et si $\lambda \in \mathbb{C}$, $f + \lambda g$ et fg sont C^i par morceaux.

Remarques IV.1.3. On conserve les notations de la définition précédente.

(1) Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux est bornée, puisque

$$\text{pour tout } x \in [a,b], |f(x)| \leq \max_k(||f_k||_{[a_{k-1},a_k]}).$$

(2) Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est C^1 par morceaux, et si $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ est une subdivision adaptée, alors f' n'est pas nécessairement définie aux points de la subdivision, mais se prolonge en une fonction continue $(f')_k$ sur $[a_{k-1}, a_k]$ en posant

$$(f')_k(a_{k-1}) = f'(a_{k-1}^+), (f')_k(a_k) = f'(a_k^-).$$

En particulier, comme ci-dessus, elle est bornée sur $[a,b]$ pour tout $m = 0, \ldots, i$.

(3) Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, alors, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x^\pm)$ existe (quand cela a un sens).

Si x n'est pas un point de la subdivision, alors x est contenu strictement dans un intervalle $]a_{k-1}, a_k[$ sur lequel f est de classe C^i. En particulier, $f(x^\pm)$ et vaut $f(x)$. Si $x = a_k$ pour un certain k, l'hypothèse sur f montre que $f(x^\pm) = f(a_k^\pm)$ existent.

(4) Cette définition est plus subtile qu'il n'y paraît. Le fait que f soit C^1 par morceaux ne veut **pas** dire que f admet une une dérivée à droite et à gauche en tout point.

Par exemple, considérons la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Alors f n'a pas dérivée à gauche en 0. En effet, pour tout $x < 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{x},$$

qui n'a pas de limite finie lorsque $x \to 0^-$. Par contre, f est C^1 par morceaux. En effet, f est C^1 sur $]-1,0[$ et $]0,1[$, et $f'(-1^+), f'(0^-), f'(0^+)$ et $f'(1^-)$ existent, et sont égales à 0.

Passons maintenant à quelques considérations sur l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. En fait, on va définir l'intégrale pour une classe de fonctions un tout petit peu plus générale.

On commence par un lemme.

Lemme IV.1.4. *Soit* $f :]a, b[\to \mathbb{C}$. *On suppose que* f *est continue sur* $]a, b[$, *et que* f *se prolonge par continuité en une fonction continue* $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{C}$ *(ce qui revient à dire que* $f(a^+)$ *et* $f(b^-)$ *existent). Alors pour toute primitive* $F :]a, b[\to \mathbb{C}$ *de* f *sur* $]a, b[$, $F(a^+)$ *et* $F(b^-)$ *existent, et on a*

$$\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t = F(b^-) - F(a^+).$$

Démonstration. On commence par montrer qu'il existe une primitive particulière F de f sur $]a, b[$ qui vérifie le résultat.

L'application $\tilde{F} : [a, b] \to \mathbb{C}, x \mapsto \displaystyle\int_a^x \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de $\tilde{f}$ sur $[a, b]$. En particulier, pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$\tilde{F}'(x) = \tilde{f}(x) = f(x).$$

Notons $F :]a, b[\to \mathbb{C}$ la restriction de $\tilde{F}$ à $]a, b[$. Alors, d'après ce qui précède, F est une primitive de f sur $]a, b[$.

De plus, comme $\tilde{F}$ est continue en a, on a

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(a),$$

la première égalité provenant du fait que $\tilde{F}$ et F coïncident sur $]a, b[$. Ainsi, $F(a^+)$ existe et vaut $\tilde{F}(a)$. De même, $F(b^-)$ existe et vaut $\tilde{F}(b)$. D'autre part, on a

$$\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b^-) - F(a^+).$$

Si maintenant G est une autre primitive de f sur $]a, b[$, alors $G = F + c$, pour $c \in \mathbb{C}$. Puisque $F(a^+)$ et $F(b^-)$ existent, il en est de même pour $G(a^+)$ et $G(b^-)$ et on a

$$G(a^+) = F(a^+) + c \text{ et } G(b^-) = F(b^-) + c.$$

En particulier, $G(b^-) - G(a^+) = F(b^-) - F(a^+) = \displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$, d'où le résultat. □

On peut maintenant définir l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Définition IV.1.5. Soit $g :]a, b[\setminus \{a_1, \ldots, a_{p-1}\} \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ sauf a priori en un nombre fini de points $a_0 = a, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p = b$. On suppose que g est continue sur $]a_{k-1}, a_k[$ pour $k = 1, \ldots, p$ (avec $a_0 = a, a_p = b$) et se prolonge par continuité en une fonction $\tilde{g}_k$ continue sur $[a_{k-1}, a_k]$.

On pose

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{p} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \tilde{g}_k(x)\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, vu le lemme précédent, on a

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{p} (G_k(a_k^-) - G_k(a_{k-1}^+)),$$

où G_k est une primitive de g sur $]a_{k-1}, a_k[$.

On vérifie que l'intégrale est linéaire, et vérifie la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire.

En particulier, si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, et si $a_0 = a, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p = b$ est une subdivision associée, on peut appliquer la construction précédente à la restriction de f à $[a,b] \setminus \{a_1, \ldots, a_{p-1}\}$.

On vérifie que l'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie.

Deux fonctions continues par morceaux égales sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points auront même intégrale.

Si f est C^1 par morceaux, alors par la remarque IV.1.3 (2), f' vérifie les hypothèses nécessaires dans la définition précédente, et on peut donc définir son intégrale. Il en est de même si on multiplie f' par une fonction g vérifiant les mêmes hypothèses. L'énoncé suivant a donc un sens.

Corollaire IV.1.6. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions* **continues** *et C^1 par morceaux. Alors, on a*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit une subdivision $a_0 = a, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p = b$ adaptée à la fois à f et à g, donc aussi à $fg, (fg)', f'g$ et fg'. Les fonctions $(fg)'$ et $f'g + fg'$ sont égales sauf éventuellement en les points $a_0, \ldots, a_p$ (où elles peuvent même ne pas être définie).

On a alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\mathrm{d}t = \int_a^b (fg)'\mathrm{d}t.$$

D'autre part, fg est une primitive de $(fg)'$ sur $]a_{k-1}, a_k[$ et on a donc

$$\int_a^b (fg)'\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p} (f(a_k^-)g(a_k^-) - f(a_{k-1}^+)g(a_{k-1}^+)).$$

Mais f et g étant continues, on obtient

$$\int_a^b (fg)'\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p}(f(a_k)g(a_k)-f(a_{k-1})g(a_{k-1})) = f(a_p)g_(a_p)-f(a_0)g(a_0) = f(b)g(b)-f(a)g(a),$$

d'où le résultat.

La remarque IV.1.3 (1) montre que la définition suivante est cohérente.

Définition IV.1.7. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, on pose

$$\mathrm{vp}(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ désignent respectivement les limites de f à droite et à gauche de x.

La fonction $\mathrm{vp}(f)$ est appelée la *valeur principale* de f.

On a alors le résultat suivant.

Proposition IV.1.8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $\mathrm{vp}(f)$ coïncide avec f sauf peut-être aux points de discontinuité de f, et est continue par morceaux. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{vp}(f)(x^+) = f(x^+) \text{ et } \mathrm{vp}(f)(x^-) = f(x^-).$$

Enfin, si f est T-périodique, resp. C^i par morceaux, il en est de même de $\mathrm{vp}(f)$.

(2) $\mathrm{vp}(\mathrm{vp}(f)) = \mathrm{vp}(f)$.

(3) Si $\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = 0$, alors $\mathrm{vp}(f)(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration.

(1) Supposons f C^i par morceaux. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné. Par hypothèse sur f, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ tels que f est de classe C^i sur chaque intervalle $]a_{k-1}, a_k[$, et

$$f^{(m)}(a^+), f^{(m)}(a_1^\pm), \cdots , f^{(m)}(a_{m-1}^\pm), f^{(m)}(b^-)$$

existent pour tout $m = 0, \ldots , i$.

Pour tout k, f est de classe C^i sur I_k $=]a_{k-1}, a_k[$. En particulier, $\mathrm{vp}(f)(x) = f(x)$ pour tout $x \in I_k$. On en déduit que $\mathrm{vp}(f)$ est de classe C^i sur I_k et que $\mathrm{vp}(f)^{(m)}(x) = f^{(m)}(x)$ pour tout $x \in I_k$. On a aussi $\mathrm{vp}(f)(x^\pm) = f(x^\pm) = f(x)$ pour tout $x \in I_k$.

Montrons que les limites

$$\mathrm{vp}(f)^{(m)}(a^+), \mathrm{vp}(f)^{(m)}(a_1^\pm), \cdots , \mathrm{vp}(f)^{(m)}(a_{m-1}^\pm), \mathrm{vp}(f)^{(m)}(b^-)$$

existent pour tout $m = 0, \ldots, i$. Le point précédent montre que $\mathrm{vp}(f)^{(m)}(x) = f^{(m)}(x)$ pour tout $x \in I_k$. On en déduit le résultat voulu en utilisant l'hypothèse sur f et les points de la subdivision, et on a alors $\mathrm{vp}(f)^{(m)}(a^+) = f^{(m)}(a^+), \mathrm{vp}(f)^{(m)}(a_1^\pm) = f^{(m)}(a_1^\pm), \cdots, \mathrm{vp}(f)^{(m)}(a_{m-1}^\pm) = f^{(m)}(a_{m-1}^\pm), \mathrm{vp}(f)^{(m)}(b^-) = f^{(m)}(a_m^-)$. Ceci est en particulier vrai pour $m = 0$.

Ainsi, $\mathrm{vp}(f)$ est C^i par morceaux sur $[a, b]$ et on a $\mathrm{vp}(f)(x^+) = f(x^+)$ et $\mathrm{vp}(f)(x^-) = f(x^-)$ pour tout $x \in [a, b]$. Ceci étant vrai pour tout $[a, b]$, $\mathrm{vp}(f)$ est C^i par morceaux sur $\mathbb{R}$ et on a $\mathrm{vp}(f)(x^+) = f(x^+)$ et $\mathrm{vp}(f)(x^-) = f(x^-)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En particulier, le cas $m = 0$ nous donne que $\mathrm{vp}(f)$ est continue par morceaux.

On remarque que $\mathrm{vp}(f)(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(x+t) - f(x-t)}{2}$. Supposons que f est T-périodique. On a alors

$$\mathrm{vp}(f)(x+T) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+T+t) - f(x+T-t)}{2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} = \mathrm{vp}(f)(x),$$

d'où la T-périodicité de $\mathrm{vp}(f)$.

(2) C'est une conséquence directe de (1).

(3) Soit $[c, d] \subseteq [a, b]$ un intervalle sur lequel f est continue. On a

$$0 \leq \int_c^d |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

donc $\int_c^d |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$ et par conséquent $f(x) = 0$ pour tout $x \in [c, d]$.

Considérons une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ telle que f est continue sur chaque intervalle $]a_{k-1}, a_k[$, et

$$f(a^+), f(a_1^\pm), \cdots, f(a_{m-1}^\pm), f(b^-)$$

existent pour $m = 0, \ldots, i$. Fixons k, et soit $x_0 \in [a_{k-1}, a_k]$. Si $x_0 \neq a_{k-1}, a_k$, alors il existe c, d tels que $x_0 \in [c, d] \subseteq]a_{k-1}, a_k[$. Comme f est alors continue sur $[c, d]$, on obtient $\mathrm{vp}(f)(x_0) = f(x_0) = 0$.

Supposons que $x_0 = a_{k-1}$ ou a_k. On sait que f est nulle sur $[a_{k-1}+t, a_k-t]$ pour $t > 0$ suffisamment petit. On a donc $f(a_{k-1}+t) = f(a_k - t) = 0$ et donc $f(a_{k-1}^+) = f(a_k^-) = 0$ en faisant tendre t vers 0^+.

Comme c'est vrai pour tout k, on en déduit $f(a_k^\pm) = 0$ pour tout k, et donc $\mathrm{vp}(f)(a_k) = 0$ pour tout k. Ainsi $\mathrm{vp}(f)(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$, donc $\mathrm{vp}(f) = 0$.$\square$

IV.2. Séries de Fourier et produit scalaire hermitien

La question que l'on va tenter de résoudre est la suivante :

peut-on décomposer une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-pérodique continue par morceaux sur sous la forme

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x),$$

avec $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$?

Comme on l'a vu, si c'est le cas, les coefficients c_n (ou bien a_n et b_n) sont bien déterminés, du moins de manière heuristique.

Définition IV.2.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Les *coefficients de Fourier* de f sont les nombres complexes

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2in\pi}{T}x}\mathrm{d}x, n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\mathrm{d}x, n \geq 0$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\mathrm{d}x, n \geq 0.$$

La *série de Fourier exponentielle* de f est la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\frac{2in\pi}{T}x}(= c_0(f) + \sum_{n\geq 1} c_{-n}(f)e^{-\frac{2in\pi}{T}x} + c_n(f)e^{\frac{2in\pi}{T}x}).$$

On vérifie facilement qu'elle est aussi égale à

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(\frac{2n\pi}{T}) + b_n(f)\sin(\frac{2n\pi}{T}).$$

Cette dernière série s'appelle la *série de Fourier trigonométrique.*

Remarquons que l'on a toujours $b_0(f) = 0$. Bien qu'inutile au final, il est quand même pratique d'avoir cette définition de $b_0(f)$ pour harmoniser certains calculs ou certaines formules.

Donnons maintenant quelques astuces pour calculer les coefficients de Fourier. Rappelons les faits suivants : soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Alors :

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^T \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^{\alpha+T} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, tant que l'on calcule sur un intervalle d'intégration de longueur T, le résultat ne change pas.

2. Si φ est une fonction impaire, alors

$$\int_0^T \varphi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

3. Si φ est une fonction paire, alors

$$\int_0^T \varphi(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{T/2} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Ces résultats (faciles à démontrer) ont les conséquences suivantes :

(i) Dans les définitions de $a_n(f), b_n(f)$ ou $c_n(f)$, on peut remplacer l'intervalle d'intégration $[0,T]$ par n'importe quel intervalle d'intégration $[\alpha, \alpha+T]$ de longueur T, par T-périodicité.

(ii) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est paire, alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n\geq 0$ et $a_n(f) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos(\frac{2n\pi t}{T})\mathrm{d}t$ pour tout $n\geq 0$.

(iii) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est impaire, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n\geq 0$ et $b_n(f) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\sin(\frac{2n\pi t}{T})\mathrm{d}t$ pour tout $n\geq 0$.

Remarquons aussi à tous fins utilies les relations

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \text{ et } c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)+ib_n(f)}{2} \text{ pour tout } n\geq 0.$$

Lorsque f est à valeurs réelles, cela montre que

$$a_n(f) = 2\mathrm{Re}(c_n(f)) \text{ et } b_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f)) \text{ pour tout } n\geq 0.$$

Donnons maintenant deux exemples.

Exemple IV.2.2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ la fonction 2-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\leq t<1 \\ 1 & \text{si } 1\leq t<2 \end{cases}$$

Calculons la série de Fourier trigonométrique de f. On peut, soit calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$, soit calculer $c_n(f), n\geq 0$, puis identifier les parties réelles et imaginaires.

On a $a_0(f) = \dfrac{2}{2}\displaystyle\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_1^2 \mathrm{d}t = 1$. Pour tout $n\geq 1$, on a de même

$$a_n(f) = \int_1^2 \cos(\pi n t)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(\pi n t)}{\pi n}\right]_1^2 = 0.$$

Pour tout $n\geq 1$, on a aussi

$$\begin{array}{rcccl} b_n(f) & = & \int_1^2 \sin(\pi n t)\mathrm{d}t & = & \left[\frac{-\cos(\pi n t)}{\pi n}\right]_1^2 \\ & = & \frac{-\cos(2n\pi)+\cos(n\pi)}{\pi n} & = & \frac{(-1)^n-1}{\pi n}. \end{array}$$

On a donc

$$b_{2m}(f) = 0 \text{ et } b_{2m-1}(f) = -\frac{2}{(2m-1)\pi} \text{ pour tout } m \geq 1.$$

Ainsi, on a $S(f)(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\sum_{m\geq 1} \dfrac{\sin((2m-1)\pi t)}{2m-1}$.

Exemple IV.2.3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'unique fonction 2π-périodique définie par $f(t) = |t|$ si $t \in [-\pi, \pi[$.

On remarque que cette fonction est paire. On a donc $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$. De plus, on a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on a

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\mathrm{d}t = \pi.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{n^2\pi}[\cos(nt)]_0^{\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}.$$

Par conséquent, $a_{2m}(f) = 0$ pour tout $m \geq 1$, et $a_{2m+1}(f) = -\dfrac{4}{\pi(2m+1)^2}$ pour tout $m \geq 0$. Ainsi, on a

$$S(f)(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{\cos((2m+1)t)}{(2m+1)^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Remarque IV.2.4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique, continue par morceaux, alors $c_n(\mathrm{vp}(f)) = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, f et $\mathrm{vp}(f)$ ont même série de Fourier.

En effet, cela provient du fait que deux fonctions continues par morceaux sur $[0, T]$ égales sauf en un nombre fini de points ont même intégrale.

Des questions naturelles se posent alors :

(1) La série de Fourier converge-t-elle ? Si oui, converge-t-elle vers f ?

(2) La convergence est-elle uniforme ?

(3) Sinon, il y a-t-il convergence vers f pour un autre type de convergence ?

Remarquons que si la convergence uniforme vers f ne peut se produire si f n'est pas continue, le terme général de la série de Fourier étant une fonction continue.

On va maintenant introduire un espace hermitien adéquat. On commence par un lemme.

Lemme IV.2.5. *L'ensemble*

$$E(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ est } T\text{−périodique, continue par morceaux et } f = \mathrm{vp}(f)\}$$

est un $\mathbb{C}$*-espace vectoriel, et l'application*

$$\langle\, , \rangle : E(T) \times E(T) \to \mathbb{C}, (f, g) \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire hermitien sur $E(T)$.

Démonstration. Il est clair d'après les définitions que si f et g sont T-périodiques continues par morceaux, il en est de même pour $af + bg, a, b, \in \mathbb{C}$, et que $\mathrm{vp}(af + bg) = a\mathrm{vp}(f) + b\mathrm{vp}(g)$. On en déduit facilement que $E(T)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles à valeurs complexes.

L'application $\langle, \rangle$ est clairement semi-linéaire hermitienne, et $\langle f, f\rangle \geq 0$ pour tout $f \in E(T)$. Si maintenant $\langle f, f\rangle = 0$, la proposition IV.1.8 (3) montre que $\mathrm{vp}(|f|^2) = 0$ sur $[0, T]$, donc sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité. Or, par continuité du carré du module, on a $|f|^2(x^\pm) = |f(x^\pm)|^2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{|f(x^+)|^2 + |f(x^-)|^2}{2} = 0.$$

Cela implique facilement que $f(x^+) = f(x^-) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc en particulier $\mathrm{vp}(f) = 0$. Comme $f = \mathrm{vp}(f)$ par hypothèse, on a le résultat voulu.

Remarque IV.2.6. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique continue par morceaux, alors $\mathrm{vp}(f) \in E(T)$, par la proposition IV.1.8.

Dans la suite, nous exploiterons la théorie des espaces hermitiens pour déduire des résultats sur la série de Fourier.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique, continue par morceaux, pour tout $n \geq 0$, on pose

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{\frac{2ik\pi}{T}x}$$

et

$$\tilde{S}_n(f)(x) = \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_{n-1}(f)(x)}{n}.$$

On considère le sous-espace vectoriel de $E(T)$ suivant :

$$\mathcal{P}_n(T) = \{\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e^{\frac{2ik\pi}{T}t}, \lambda_k \in \mathbb{C}\}.$$

Lemme IV.2.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique continue par morceaux. Alors $S_n(f)$ est la projection orthogonale de $\mathrm{vp}(f) \in E(T)$ sur $\mathcal{P}_n(T)$. En particulier, $S_n(f)$ est l'élément de $\mathcal{P}_n(T)$ le plus proche de $\mathrm{vp}(f)$ pour la norme $|| \, ||_2$ (associée au produit scalaire hermitien).*

Démonstration. Un simple calcul montre que les fonctions $e^{\frac{2ik\pi}{T}}$, $-n \leq k \leq n$ forment une base orthonormée de $\mathcal{P}_n(T)$. On a alors

$$p_{\mathcal{P}_n(T)}(\mathrm{vp}(f)) = \sum_{k=-n}^{n} \langle e^{\frac{2ik\pi}{T}}, \mathrm{vp}(f)\rangle e^{\frac{2ik\pi}{T}} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(\mathrm{vp}(f)) e^{\frac{2ik\pi}{T}}.$$

Or f et $\mathrm{vp}(f)$ ont même coefficients de Fourier d'après la remarque IV.2.4, et donc $p_{\mathcal{P}_n(T)}(\mathrm{vp}(f)) = S_n(f)$. La deuxième partie provient des propriétés de la projection orthogonale. □

En particulier, si $f \in E(T)$ (par exemple si f est continue), $S_n(f)$ est la meilleure approximation de f par un élément de $\mathcal{P}_n(T)$ (i.e. une somme finie d'harmoniques).

Nous allons voir dans la suite que si la série de Fourier converge, alors elle converge vers $\mathrm{vp}(f)$. On ne peut donc espérer une convergence vers f que si $f \in E(T)$.

IV.3. Les théorèmes de convergence

On va maintenant étudier les sommes partielles de la série de Fourier.

Lemme IV.3.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, continue par morceaux. Alors on a*

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi}{T}t)}{\sin(\frac{\pi t}{T})} \mathrm{d}t$$

et

$$\tilde{S}_n(f)(x) = \frac{1}{nT}\int_0^{\frac{T}{2}} (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})} \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Par définition de $c_n(f)$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{\frac{2\pi(x-t)}{T}} \mathrm{d}t.$$

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$, on a

$$A := \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega} = e^{-in\omega} \sum_{k=0}^{2n} e^{ik\omega} = e^{-in\omega} \frac{1 - e^{(2n+1)i\omega}}{1 - e^{i\omega}}.$$

On a donc

$$A = e^{-in\omega} \frac{e^{\frac{2n+1}{2}i\omega}}{e^{\frac{i\omega}{2}}} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}i\omega} - e^{\frac{2n+1}{2}i\omega}}{e^{\frac{-i\omega}{2}} - e^{\frac{i\omega}{2}}} = \frac{\sin(\frac{(2n+1)\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}.$$

Si $\omega = 2m\pi$, cette égalité est encore valable si on prolonge la fonction $\frac{\sin(\frac{(2n+1)\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$ par continuité en lui donnant la valeur $2n+1$.

En appliquant l'égalité précédente avec $\omega = \dfrac{2\pi(x-t)}{T}$, on obtient

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi(x-t)}{T})}{\sin(\frac{\pi(x-t)}{T})} \mathrm{d}t.$$

Le changement de variables $u = x - t$ donne (puisque $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$)

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{T} \int_{x-T}^{x} f(x-u) \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi u}{T})}{\sin(\frac{\pi u}{T})} \mathrm{d}u.$$

Puisque l'on intègre des fonctions T-périodiques sur un intervalle de longueur T, on peut remplace l'intervalle $[x-T, x]$ par n'importe quel intervalle de longueur T. Ainsi

$$S_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x-u) \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi u}{T})}{\sin(\frac{\pi u}{T})} \mathrm{d}u.$$

On a donc

$$S_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x-u) \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi u}{T})}{\sin(\frac{\pi u}{T})} \mathrm{d}u + \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x-u) \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi u}{T})}{\sin(\frac{\pi u}{T})} \mathrm{d}u.$$

En faisant le changement de variables $u = -v$ dans la première intégrale, on obtient la première égalité.

Pour obtenir la deuxième égalité, on remarque en utilisant le premier point que l'on a

$$\tilde{S}_n(f)(x) = \frac{1}{nT} \int_0^{\frac{T}{2}} (f(x+t) + f(x-t)) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{(2k+1)\pi}{T} t)}{\sin(\frac{\pi t}{T})} \mathrm{d}t.$$

Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\varphi) = \mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)i\varphi}).$$

Or

$$B \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)i\varphi} = e^{i\varphi} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{2in\varphi}}{1 - e^{2i\varphi}}.$$

Donc

$$B = e^{i\varphi} \frac{e^{in\varphi}}{e^{i\varphi}} \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)} = e^{in\varphi} \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

On a ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\varphi) = \frac{\sin^2(n\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

En appliquant cette égalité à $\varphi = \dfrac{\pi t}{T}$, on obtient le résultat voulu.□

Avant de continuer, il nous faut faire des rappels sur l'uniforme continuité.

Rappels : Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dite *uniformément continue sur* I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, x' \in I$ vérifiant $|x - x'| < \alpha$, on a $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

On a alors le résultat suivant.

Théorème de Heine. Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x, x' \in [a, b]$ vérifiant $|x - x'| < \alpha$ et $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$.

En particulier, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n, x'_n \in [a, b]$ vérifiant

$$|x_n - x'_n| < 1/n \text{ et } |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

Puisque $x_n \in [a, b]$, la suite (x_n) est bornée. Alors (x_n) possède une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers un réel $\ell \in [a, b]$. Puisque $x''_n = x'_{\varphi(n)} \in [a, b]$, la suite (x''_n) est bornée et elle possède une sous-suite $(x''_{\psi(n)})$ convergente vers un réel $\ell' \in [a, b]$. Autrement dit, la suite $(x'_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers ℓ'. Mais, la suite $(x_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers ℓ, puisque c'est une sous-suite de $(x_{\varphi(n)})$, qui converge vers ℓ.

Posons $\rho = \varphi \circ \psi$. C'est une fonction $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, puisque φ et ψ le sont. On a donc, pour tout $n \geq 1$,

$$|x_{\rho(n)} - x'_{\rho(n)}| < 1/\rho(n).$$

Comme $1/\rho(n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ (puisque ρ est strictement croissante), on en déduit par passage à la limite que $|\ell - \ell'| \leq 0$, soit $\ell = \ell'$.

Mais on a aussi , pour tout $n \geq 1$,

$$|f(x_{\rho(n)}) - f(x'_{\rho(n)})| \geq \varepsilon.$$

Puisque $\ell \in [a,b]$ et que f est continue en ℓ, par passage à la limite, on en déduit que
$$|f(\ell) - f(\ell)| = 0 \geq \varepsilon,$$
ce qui est absurde, et achève la démonstration. □

On peut maintenant énoncer et démontrer le premier théorème de convergence.

Théorème IV.3.2 (Féjer). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, continue par morceaux. Alors $\tilde{S}_n(f)$ converge simplement vers $\mathrm{vp}(f)$ sur $\mathbb{R}$. Si de plus f est continue, alors $\tilde{S}_n(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Appliquons la deuxième égalité du lemme précédent à la fonction constante $\mathbf{1}$. On a $c_0(\mathbf{1}) = 1$ et $c_n(\mathbf{1}) = 0$ si $n \neq 0$. On a donc $S_n(\mathbf{1}) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc $\tilde{S}_n(\mathbf{1}) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On obtient donc
$$1 = \frac{2}{nT}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t.$$
On en déduit facilement que l'on a
$$\tilde{S}_n(f)(x) - \mathrm{vp}(f)(x) = \frac{1}{nT}\int_0^{\frac{T}{2}} (f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-))\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $0 < \alpha < \dfrac{T}{2}$ (dépendant de x) tel que pour tout $0 < t \leq \alpha$, on a
$$|f(x+t) - f(x^+)| \leq \varepsilon \text{ et } |f(x-t) - f(x^-)| \leq \varepsilon.$$

Alors on a
$$|\tilde{S}_n(f)(x) - \mathrm{vp}(f)(x)| \leq \left|\frac{1}{nT}\int_0^{\alpha} (f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-))\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t\right|$$
$$+\left|\frac{1}{nT}\int_\alpha^{\frac{T}{2}} (f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-))\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t\right|$$
$$\leq \frac{1}{nT}\int_0^{\alpha} (|f(x+t)-f(x^+)|+|f(x-t)-f(x^-)|)\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t + \frac{1}{nT}\int_\alpha^{\frac{T}{2}} (|f(x+t)|+|f(x^+)|$$
$$+|f(x-t)|+|f(x^-)|)\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t.$$

Pour tout $0 < t \leq \alpha$, on a $|f(x+t) - f(x^+)| + |f(x-t) - f(x^-)| \leq 2\varepsilon$. On a donc
$$\frac{1}{nT}\int_0^{\alpha} (|f(x+t)-f(x^+)|+|f(x-t)-f(x^-)|)\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t \leq 2\varepsilon \cdot \frac{1}{nT}\int_0^{\alpha} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t$$

$$\leq \varepsilon \cdot \frac{2}{nT}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Puisque f est continue par morceaux sur $[0,T]$, elle est bornée sur $[0,T]$, et par T-périodicité, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $M = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.
On a

$$\frac{1}{nT}\int_\alpha^{\frac{T}{2}} (|f(x+t)|+|f(x^+)|+|f(x-t)|+|f(x^-)|)\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t \leq \frac{4M}{nT}\int_\alpha^{\frac{T}{2}} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t.$$

Puisque $0 < \alpha < \dfrac{T}{2}$, on a $0 < \dfrac{\pi\alpha}{T} \leq \dfrac{\pi t}{T} \leq \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $t \in [\alpha, \dfrac{T}{2}]$, et donc

$$\sin(\frac{\pi t}{T}) \geq \sin(\frac{\pi\alpha}{T}) \text{ pour tout } t \in [\alpha, \frac{T}{2}].$$

On a donc

$$\frac{1}{nT}\int_\alpha^{\frac{T}{2}} (|f(x+t)|+|f(x^+)|+|f(x-t)|+|f(x^-)|)\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t \leq \frac{4M}{nT}\int_\alpha^{\frac{T}{2}} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi\alpha}{T})}\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\frac{1}{nT}\int_\alpha^{\frac{T}{2}} (|f(x+t)|+|f(x^+)|+|f(x-t)|+|f(x^-)|)\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{T}t)}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})}\mathrm{d}t \leq \frac{4M(\frac{T}{2}-\alpha)}{nT\sin^2(\frac{\pi\alpha}{T})} \leq \frac{2M}{n\sin^2(\frac{\pi\alpha}{T})},$$

puisque $\alpha > 0$.

On a donc finalement

$$|\tilde{S}_n(f)(x) - \mathrm{vp}(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{n\sin^2(\frac{\pi\alpha}{T})}.$$

Pour tout $n \geq \frac{2M}{\varepsilon\sin^2(\frac{\pi\alpha}{T})}$, on a donc $|\tilde{S}_n(f)(x) - \mathrm{vp}(f)(x)| \leq 2\varepsilon$.

Montrons la dernière partie. Puisque f est continue, on a $\mathrm{vp}(f) = f$. D'autre part, elle est continue sur $[0,T]$, donc uniformément continue sur $[0,T]$. Ainsi, il existe $0 < \alpha < T/2$ (indépendant de x, cette fois) tel que, pour tous $u, u' \in [0, T/2]$ vérifiant $|u-u'| < \alpha$, on a $|f(u)-f(u')| < \varepsilon$.

La majoration précédente est alors encore valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ (il suffit de reprendre les calculs), d'où la deuxième partie.

Le théorème de Césaro et le théorème de Fejer donne alors :

Corollaire IV.3.3. *Si $S_n(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors elle converge vers* $\mathrm{vp}(f)$.

On va maintenant étudier les divers modes de convergence de la série de Fourier. On commence par une définition et un résultat auxiliaire.

Définition IV.3.4. Un **polynôme trigonométrique** de période T est un élément de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n(T)$, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e^{\frac{2ik\pi x}{T}} \in \mathbb{C},$$

pour un $n \geq 0$ et $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Lemme IV.3.5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P T-périodique tel que*

$$||f - P||_2 \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\varphi : [0, T] \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\varphi(0) = \varphi(T)$ et

$$||f - \varphi||_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(x) - \varphi(x)|^2 \mathrm{d}x} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Une telle fonction φ existe : on approche f autour d'un point de discontinuité, de 0 ou T par des morceaux de droites de pentes très raides. Soit alors $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'unique fonction T-périodique prolongeant φ. Par construction, g est continue (c'est pour cela que l'on a imposé en plus $\varphi(0) = \varphi(T)$).

Par le théorème de Féjer, $\tilde{S}_n(g)$ converge uniformément vers g. Il existe en particulier un entier $n \geq 0$ tel que

$$||g - \tilde{S}_n(g)||_{\mathbb{R}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit alors facilement que

$$||g - \tilde{S}_n(g)||_2 \leq ||g - \tilde{S}_n(g)||_{\mathbb{R}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque g et φ coïncident sur $[0, T]$ par définition de g, on a

$$||f - g||_2 \leq ||f - \varphi||_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors, on a

$$||f - \tilde{S}_n(g)||_2 \leq ||f - g||_2 + ||g - \tilde{S}_n(g)||_2 \leq \varepsilon.$$

On prend donc $P = \tilde{S}_n(g)$. $\square$

Théorème IV.3.6 (Parseval). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, continue par morceaux. Alors on a $||f - S_n(f)||_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

De plus, les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2, \sum_{n\geq 1} |a_n(f)|^2, \sum_{n\geq 1} |b_n(f)|^2$ *sont convergentes, et on a*

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \text{ (Egalités de Parseval)}\end{aligned}$$

Démonstration. Démontrons que $||f - S_n(f)||_2 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. On sait que f et $\mathrm{vp}(f)$ ont même coefficients de Fourier par la remarque IV.2.4, et donc $S_n(f) = S_n(\mathrm{vp}(f))$. D'autre part f étant T-périodique et continue par morceaux, $\mathrm{vp}(f)$ aussi, par la proposition IV.1.8 (1). De plus, f et $\mathrm{vp}(f)$ sont égales sur $[0, T]$ sauf éventuellement aux points de discontinuité de f contenus dans $[0, T]$ par cette même proposition, et qui sont en nombre fini car f est continu par morceaux. Ainsi, $f - S_n(f)$ et $\mathrm{vp}(f) - S_n(f)$ sont égales sur $[0, T]$ sauf en un nombre fini de points. On a donc

$$||f - S_n(f)||_2 = ||\mathrm{vp}(f) - S_n(\mathrm{vp}(f))||_2.$$

De même, on a $||f||_2 = ||\mathrm{vp}(f)||_2$. Comme $\mathrm{vp}(\mathrm{vp}(f)) = \mathrm{vp}(f)$ par la proposition IV.1.8 (3), quitte à remplacer f par $\mathrm{vp}(f)$, on peut donc supposer que $f \in E(T)$ dans tout la démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $P_0 \in \mathcal{P}_N(T)$ tel que $||f - P_0||_2 \leq \varepsilon$ (un tel P_0 existe par le lemme précédent).

Puisque $f = \mathrm{vp}(f)$, d'après le lemme IV.2.7, $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n(T)$. En particulier, pour tout $P \in \mathcal{P}_n(T)$, on a $||f - S_n(f)||_2 \leq ||f - P||_2$. Or pour tout $n \geq N$, on a $\mathcal{P}_N(T) \subseteq \mathcal{P}_n(T)$. En particulier, pour tout $n \geq N$, on a $P_0 \in \mathcal{P}_n(T)$ et donc

$$||f - S_n(f)||_2 \leq ||f - P_0||_2 \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \geq N,$$

d'où la première partie du théorème.

On a déjà vu que les fonctions $e^{\frac{2ik\pi}{T}x}, -n \leq k \leq n$ formaient une base orthornormée de $\mathcal{P}_n(T)$. On a donc

$$||S_n(f)||_2^2 = \langle S_n(f), S_n(f)\rangle = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2.$$

Puisque $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n(T)$, $S_n(f)$ et $f - S_n(f)$ sont orthogonaux, et par le théorème de Pythagore, on a

$$||f||_2^2 = ||f - S_n(f) + S_n(f)||_2^2 = ||f - S_n(f)||_2^2 + ||S_n(f)||_2^2.$$

En particulier, on a $||S_n(f)||_2^2 \leq ||f||_2^2$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2.$$

Ceci étant vrai pour tout n, et puisque $|c_n(f)|^2 \geq 0$, on en déduit la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2 \text{ (Inégalité de Bessel)}$$

De plus, on a

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_n(f)|^2 = ||S_n(f)||_2^2 = ||f||_2^2 - ||f - S_n(f)||_2^2.$$

Par passage à la limite, le premier point donne

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = ||f||_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Maintenant, on a

$$c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}, c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On a donc $|c_0(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4}$. Pour alléger les notations, on écrit a_n et b_n, au lieu de $a_n(f)$ et $b_n(f)$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 & = & \frac{1}{4}\overline{a_n - ib_n}(a_n - ib_n) + \frac{1}{4}\overline{a_n + ib_n}(a_n + ib_n) \\ & = & \frac{1}{4}(\overline{a_n} + i\overline{b_n})(a_n - ib_n) + \frac{1}{4}(\overline{a_n} - i\overline{b_n})(a_n + ib_n) \\ & = & \frac{1}{2}(\overline{a_n}a_n + \overline{b_n}b_n) \\ & = & \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \end{array}$$

On en déduit la convergence des séries de terme général $|a_n|^2$ et $|b_n|^2$, et la deuxième égalité de Parseval. Ceci termine la démonstration du théorème. $\square$

Exemple IV.3.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Elle est C^1 par morceaux, donc continue par morceaux. On peut donc appliquer le théorème de Parseval. Les calculs faits dans l'exemple IV.2.2 montrent que l'on a

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

On en déduit $\displaystyle\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exemple IV.3.8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'unique fonction 2π-périodique définie par $f(t) = |t|$ si $t \in [-\pi, \pi[$. Cette fonction est continue, donc continue par morceaux. Les calculs faits dans l'exemple IV.2.3 montrent que l'on a

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}.$$

On en déduit $\displaystyle\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^4}{96}$.

Corollaire IV.3.9. *On a* $|c_n(f)| \to 0$ *lorsque* $n \to \pm\infty$.

Remarque IV.3.10. La convergence de la série de Fourier vers f au sens de la norme euclidienne n'implique aucunement la convergence simple !!!

Corollaire IV.3.11. *Soient* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *deux fonctions* T*-périodiques, continues par morceaux. Si* $c_n(f) = c_n(g)$ *(ou, de manière équivalente, si* $a_n(f) = a_n(g)$ *et* $b_n(f) = b_n(g)$*) pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*, alors* $\mathrm{vp}(f) = \mathrm{vp}(g)$.

En particulier, f *et* g *sont égales sauf éventuellement en leurs points de discontinuité.*

Démonstration. L'hypothèse se réécrit : $c_n(f-g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. L'égalité de Parseval montre alors que l'on a

$$\int_0^T |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x = 0.$$

D'après la proposition IV.1.8 (3), cela implique que $\mathrm{vp}(f-g) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{vp}(f) = \mathrm{vp}(g)$.

On étudie maintenant la convergence simple de la série de Fourier de f. On commence par un lemme technique.

Lemme IV.3.12. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* C^1 *par morceaux. Alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = f'(x^+) \text{ et } \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x^-) - f(x-t)}{t} = f'(x^-).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit $[a, b]$ un intervalle contenant x. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est C^1 par morceaux sur $[a, b]$, on peut choisir $t > 0$ tel que f est C^1 en tout point de $]x, x+t]$ (puisque $[a, b]$ ne contient qu'un nombre fini de de discontinuités de f et f' par définition).

De plus, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x' \in [a, b]$ vérifiant $0 \leq x' - x \leq \alpha$, on a $|f'(x') - f'(x^+)| \leq \varepsilon$. On choisit $0 \leq t \leq \alpha$.

Alors la fonction $g :]0, 1[\to \mathbb{C}, u \mapsto \dfrac{f(x + tu)}{t}$ vérifie $g'(u) = f'(x + tu)$ pour tout $u \in]0, 1[$. On a alors

$$\int_0^1 f'(x + tu)\mathrm{d}u = \frac{f((x + t)^+) - f(x^+)}{t} = \frac{f(x + t) - f(x^+)}{t},$$

car f est continue en $x + t$.

Comme $0 \leq x + tu - x \leq tu \leq t \leq \alpha$, on a

$$|f'(x + tu) - f'(x)| \leq \varepsilon \text{ pour tout } u \in [0, 1].$$

Pour tout $0 \leq t \leq \alpha$, on a donc

$$|\int_0^1 f'(x+tu)\mathrm{d}u - f'(x^+)| = |\int_0^1 (f'(x+tu) - f'(x^+))\mathrm{d}u| \leq \int_0^1 |f'(x+tu) - f'(x^+)|\mathrm{d}u \leq \varepsilon.$$

On a donc la première égalité. La deuxième se montre de manière similaire. □

On peut maintenant énoncer et démontrer le premier théorème de convergence sur les séries de Fourier.

THÉORÈME IV.3.13 (Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique C^1 par morceaux. Alors $S_n(f)$ converge simplement vers* $\mathrm{vp}(f)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. La première partie du lemme IV.3.1 appliquée à la fonction constante **1** donne

$$1 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi}{T} t)}{\sin(\frac{\pi t}{T})} \mathrm{d}t.$$

On en déduit

$$S_n(f)(x) - \mathrm{vp}(f)(x) = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)) \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi}{T} t)}{\sin(\frac{\pi t}{T})} \mathrm{d}t.$$

Par le lemme IV.3.12, on a

$$\lim_{t \to 0^+} = \frac{f(x + t) - f(x^+)}{t} = f'(x^+) \text{ et } \lim_{t \to 0^+} = \frac{f(x^-) - f(x - t)}{t} = f'(x^-).$$

Posons
$\varphi(t) = \frac{f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)}{\sin(\frac{\pi t}{T})} = \frac{f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)}{t} \frac{t}{\sin(\frac{\pi t}{T})}$ pour $t \in]0, \dfrac{T}{2}]$. On a $\varphi(t) \to \dfrac{T}{\pi}(f'(x^+) - f'(x^-))$ lorsque $t \to 0^+$ par le lemme précédent.

On peut donc prolonger φ en 0 en posant $\varphi(0) = \dfrac{T}{\pi}(f'(x^+) - f'(x^-))$.
La fonction φ est alors continue par morceaux sur $[0, \dfrac{T}{2}]$. On étend φ en une fonction ψ continue par morceaux sur $[0, T[$ en posant

$$\psi(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(t) & \text{si } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 0 \text{ si } t \in]\frac{T}{2}, T[\end{array} \right.$$

On étend ensuite ψ en une fontion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique continue par morceaux. Par définition de g, on a

$$c_n(g) = \frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)e^{-\frac{2in\pi}{T}t}\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(t)e^{-\frac{2in\pi}{T}t}\mathrm{d}t.$$

En particulier, on a

$$\frac{c_{-(2n+1)}(g) - c_{2n+1}(g)}{2i} = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(t)\sin(\frac{(2n+1)\pi}{T}t)\mathrm{d}x = S_n(f)(x) - \mathrm{vp}(f)(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ainsi

$$|S_n(f)(x) - \mathrm{vp}(f)(x)| \leq \frac{1}{2}(|c_{-(2n+1)}(g)| + |c_{2n+1}(g)|).$$

On conclue en appliquant le corollaire IV.3.9. $\square$

Exemple IV.3.14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2-périodique définie par

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{array} \right.$$

Cette fonction est C^1 par morceaux, donc le théorème de Dirichlet s'applique. On a donc

$$\mathrm{vp}(f)(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{m\geq 1}\frac{\sin((2m-1)\pi t)}{2m-1} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est continue en tout $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{vp}(f)(t) = \dfrac{1}{2}$. En particulier, pour $t = \dfrac{1}{2}$, on obtient

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{m\geq 1}\frac{-(-1)^m)}{2m-1}.$$

On en déduit que $-\displaystyle\sum_{m\geq 1}\frac{-(-1)^m)}{2m-1} = \sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m)}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$.

On finit ce chapitre par l'étude de la convergence normale de la série de Fourier. On a le résultat suivant :

Théorème IV.3.15 (Convergence normale). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Alors $S_n(f)$ converge normalement (et donc uniformément et simplement) vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. La série de Fourier exponentielle est donnée par

$$S(f)(x) = c_0(f) + \sum_{n\geq 1} c_{-n}(f)e^{-\frac{2in\pi}{T}x} + c_n(f)e^{\frac{2in\pi}{T}x}.$$

Or, on a clairement

$$||c_m(f)e^{-\frac{2i\pi mx}{T}}||_{\mathbb{R}} = |c_m(f)|$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1}(|c_n(f)| + |c_{-n}(f))|$$

est convergente, car

$$||c_{-n}(f)e^{-\frac{2in\pi}{T}x} + c_n(f)e^{\frac{2in\pi}{T}x}||_{\mathbb{R}} \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f))|.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\begin{pmatrix} -\frac{1}{n} \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -n|c_{-n}(f)| \\ \vdots \\ -|c_{-1}(f)| \\ |c_1(f)| \\ \vdots \\ n|c_n(f)| \end{pmatrix}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}(|c_k(f)| + |c_{-k}(f))| \leq \sqrt{2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2)}.$$

Or, on sait que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente. Si on montre que la série

$$\sum_{n\geq 1} n^2(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)$$

est convergente, alors on aura

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k(f)| + |c_{-k}(f)| \leq \sqrt{2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n\geq 1} n^2(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)}$$

pour tout $n \geq 1$, ce qui impliquera la convergence de la série qui nous intéresse.

Cela revient au même de montrer que la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^2|c_m(f)|^2$ converge.

Remarquons maintenant que $\mathrm{vp}(f')$ est définie en tout point de $\mathbb{R}$ (ce qui n'est pas forcément le cas de f' elle-même), car f étant C^1 par morceaux, $f'(x^\pm)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.

On va montrer que $c_m(\mathrm{vp}(f')) = \dfrac{2i\pi m}{T} c_m(f)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Or, les fonctions $t \mapsto \mathrm{vp}(f')(t)e^{-\frac{2i\pi mt}{T}}$ et $t \mapsto f'(t)e^{-\frac{2i\pi mt}{T}}$ coïncident sur $[0,T]$ sauf en un nombre fini de points (où f' peut ne pas être définie, ce qui n'est pas très grave, puisque l'intégrale existe quand même). On a donc

$$c_m(\mathrm{vp}(f')) = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-\frac{2i\pi mt}{T}}\mathrm{d}t.$$

Comme f et $t \mapsto e^{-\frac{2i\pi mt}{T}}$ sont toutes deux continues et C^1 par morceaux sur $[0,T]$, une intégration par parties (Corollaire IV.1.6) montre que

$$\int_0^T f'(t)e^{-\frac{2i\pi mt}{T}}\mathrm{d}t = [f(t)e^{-\frac{2i\pi mt}{T}}]_0^T + 2i\pi m\int_0^T f(t)e^{-\frac{2i\pi mt}{T}}\mathrm{d}t.$$

On obtient donc

$$c_m(\mathrm{vp}(f')) = \frac{1}{T}(f(T) - f(0)) + \frac{2i\pi m}{T}c_m(f).$$

Comme f est T-périodique, on a $f(T) = f(0)$, d'où le résultat.

D'aprè le théorème de Parseval appliqué à $\mathrm{vp}(f')$ (qui est continue par morceaux), on en déduit que la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^2|c_m(f)|^2$ converge. Ceci achève la démonstration. □

Exemple IV.3.16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'unique fonction π-périodique définie par $f(t) = |t|$ si $t \in [-\pi, \pi[$. Cette fonction est continue, C^1 par morceaux. Le théorème de convergence normale nous dit alors que l'on a

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{\cos((2m+1)t)}{(2m+1)^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que le théorème de convergence normale nous prédit sans calculs que la série de de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$, ce que l'on peut vérifier directement a posteriori.

L'égalité pour $t = 0$ s'écrit

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(2m+1)^2},$$

ce qui nous redonne

$$\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(2m+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Nous revenons maintenant à l'équation de la chaleur. Rappelons que l'on veut résoudre l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t}=D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x\in[0,L], t>0$$

avec les conditions aux bords

$$T(0,t)=T(L,t)=0, T(x,0)=\varphi(x) \text{ pour tout } x\in[0,L], t\in\mathbb{R}^+,$$

où $D>0$.

Remarquons que puisque une solution T admet une dérivée partielle seconde en x, la deuxième condition implique que φ est C^1 sur $]0,L[$, et donc continue sur $[0,L]$. Remarquons aussi que l'on a

$$\varphi(0)=T(0,0)=0 \text{ et } \varphi(L)=T(L,0)=0.$$

Nous allons montrer le théorème suivant.

Théorème IV.3.17. *Soit $\varphi:[0,L]\to\mathbb{R}$ une fonction C^1 sur $]0,L[$ vérifiant $\varphi(0)=\varphi(L)=0$. Alors l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial T}{\partial t}=D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x\in[0,L], t>0$$

admet une unique solution $T:[0,L]\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial T}{\partial t},\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ soient continues sur $[0,L]\times\mathbb{R}^{+*}$, et vérifiant les conditions au bord

$$T(0,t)=T(L,t)=0, T(x,0)=\varphi(x) \text{ pour tout } x\in[0,L], t\in\mathbb{R}^+.$$

Elle est donnée par

$$T(x,t)=\sum_{n\geq 1} b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2n^2}{L^2}Dt},$$

où $b_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L\varphi(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x.$

Démonstration. Soit f l'unique fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **impaire** $2L$-périodique vérifiant $f_{|[0,L[}=\varphi$. Les conditions sur φ impliquent facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux, et que $b_n=b_n(f)$. La série de Fourier de f converge donc normalement vers f. Comme $\sup_{x\in\mathbb{R}}|b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)|=|b_n|$, cela signifie que la série

$$\sum_{n\geq 1}|b_n|$$

est convergente.

Posons

$$T(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt},$$

et vérifions que T est solution. Posons $u_n(x,t) = b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}$.

Vérifions tout d'abord les conditions au bord.

Pour tout $x \in [0,L]$, on a $T(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x) = \varphi(x)$.

De plus, $T(0,t) = T(L,t) = 0$ pour tout $t > 0$ d'après les propriétés du sinus.

On va calculer maintenant les dérivées partielles de T.

On a $\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = -b_n \frac{\pi^2 n^2}{L^2} D \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}$.

Remarquons que l'on a pour tout $a > 0$, on a

$$|\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}| \leq D\frac{\pi^2 n^2}{L^2}|b_n|e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Da} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, t \geq a.$$

Or $D\frac{\pi^2 n^2}{L^2}e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Da} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, et donc est majorée par 1 pour n suffisamment grand. Donc, pour n suffisament grand, et pour $a > 0$, on a

$$|\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}| \leq |b_n| \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, t \geq a.$$

Ceci implique que la série de terme général $\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur ce même ensemble.

Cette série converge donc uniformément sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ lorsqu'elle est vue comme seule fonction de t.

Comme la série de terme général $u_n(x,a)$ est convergente (de somme $e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Da}\varphi(x)$), on en déduit que pour $x \in [0,L], t \mapsto T(x,t)$ est C^1 sur $[a, +\infty[$ et on a

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \sum_{n\geq 1} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = -\sum_{n\geq 1} b_n \frac{\pi^2 n^2}{L^2} D \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt},$$

et ceci pour tout $(x,t) \in [0,L] \times [a, +\infty[$. Comme cette égalité est vraie pour tout $a > 0$, c'est vrai sur $[0,L] \times \mathbb{R}^{+*}$.

On a maintenant

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x} = b_n \frac{n\pi}{L} \cos(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}$$

et

$$\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} = -b_n \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}.$$

Le même genre d'arguments montre que l'on a

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = -\sum_{n\geq 1} b_n \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt} = \frac{1}{D}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t},$$

pour tout $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^{+*}$. On a donc bien le résultat voulu.

Montrons maintenant l'unicité de la solution. Pour cela, supposons que l'on ait deux solutions du problème, disons T_1 et T_2, et posons $u = T_1 - T_2$. Il est facile de vérifier que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in [0,L], t \in \mathbb{R}^+,$$

que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont continues, et que

$$u(0,t) = u(L,t) = u(x,0) = 0 \text{ pour tout } x \in [0,L], t \in \mathbb{R}^+.$$

Remarquons que $\frac{\partial u}{\partial t}$ est une fonction continue. Posons

$$J(t) = \frac{1}{2D}\int_0^L u(x,t)^2 \mathrm{d}x.$$

Nous allons montrer que J est identiquement nulle, ce qui montrera que $u(x,t) = 0$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in [0,L]$, u étant une fonction continue.

Par construction (et par hypothèse sur la régularité des solutions T_1, T_2), $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ est continue sur $[0,L], t \times \mathbb{R}^{+*}$. Donc $\frac{\partial u(x,t)^2}{\partial t} = 2u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ est aussi continue sur $[0,L] \times \mathbb{R}^{+*}$.

On a donc

$$J'(t) = \frac{1}{D}\int_0^L u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x = \int_0^L u(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x.$$

En intégrant par parties, il vient, en tenant compte des conditions aux bords,

$$J'(t) = -\int_0^L \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

On a donc $J'(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi J est décroissante, et on a

$$J(t) \leq J(0) \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Or on a

$$J(0) = \frac{1}{2D}\int_0^L u(x,0)^2 \mathrm{d}x = 0,$$

d'après les conditions au bord vérifiées par u. Ainsi, $J(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Mais J est l'intégrale d'une fonction positive ou nulle, et donc on a aussi $J(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

On en déduit que $J = 0$, et donc $u(x,t) = 0$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in [0,L]$. Comme on a aussi $u(x,0) = 0$ pour tout $x \in [0,L]$, u est identiquement nulle, c'est-à-dire $T_1 = T_2$.