

פרק רביעי
אלגברה – סדרה הנדסית

סדרה הנדסית – האיבר הכללי

תרגילים (סדרה הנדסית – האיבר הכללי)

תרגילים יסודיים – האיבר הכללי של סדרה הנדסית

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

הנוסחה:

צא לגבי כל אחת מהסדרות ההנדסיות שמימין את האיבר (a_n) שרשום משמאל:

$$a_8 \quad 3, 15, 75, \dots \quad (2)$$

$$a_{12} \quad 2, 6, 18, \dots \quad (3)$$

$$a_9 \quad 1458, 486, 162, \dots \quad (4)$$

$$a_{11} \quad 1\frac{1}{2}, 3, 6, \dots \quad (5)$$

$$a_{21} \quad 10, 10\sqrt{10}, 100, \dots \quad (6)$$

$$a_7 \quad 32, -48, 72, \dots \quad (7)$$

צא עפ"י הנתון בסדרות ההנדסיות הבאות את המנה (q) ואת האיבר הראשון (a_1) :

$$a_6 = 5, a_2 = 405 \quad (8)$$

$$a_5 = 2560, a_2 = 40 \quad (9)$$

© כל הזכויות שמורות – בני גורן (מתמטיקה 5 יח"ל – חלק ב'-1) ★ הצילום מספר זה הוא עבירה על החוק

9) בין המספרים 7 ו-112 יש להכניס שלושה מספרים כך שתתקבל סדרה הנדסית בת חמישה איברים.

- א. מצא את איברי הסדרה אם היא עולה.
ב. מצא את איברי הסדרה אם היא לא עולה ולא יורדת.

10) מצא את האיבר הראשון בסדרה הנדסית שבה: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 130$, $q = \frac{3}{2}$.

11) מצא את המנה בסדרה הנדסית שבה נתון: $a_4 + a_3 = 12a_2$.

12) בסדרה הנדסית עולה האיבר השלישי גדול פי $4\frac{1}{2}$ מההפרש שבין האיבר השני לראשון.
א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה.
ב. מצא, לגבי כל אחת מהסדרות שהתקבלו בסעיף א', פי כמה גדול האיבר החמישי מההפרש שבין האיבר השלישי לשני.

הגדרת סדרה הנדסית לפי מקום ועפ"י כלל נסיגה

13) סדרה מוגדרת לפי כלל נסיגה: $a_{n+1} = 3a_n$, $a_1 = 4$.
א. הסבר מדוע הסדרה היא סדרה הנדסית והגדר אותה לפי מקום.
ב. מצא את a_8 .

14) נתונה הסדרה ההנדסית $27, 18, 12, \dots$.
א. הגדר את הסדרה עפ"י הכלל לפי מקום.
ב. הגדר את הסדרה בעזרת נוסחת נסיגה.

15) נתונה הסדרה ההנדסית $100, -60, 36, \dots$.
הגדר את הסדרה עפ"י הכלל לפי מקום ועפ"י כלל נסיגה.

16) האיבר הכללי של סדרה הוא $a_n = 3 \cdot 2^n$.
א. הוכח שהסדרה היא סדרה הנדסית ומצא את האיבר הראשון ואת המנה.
ב. הגדר את הסדרה בעזרת כלל נסיגה.

17) ענה על הסעיפים של התרגיל הקודם לגבי סדרה שהאיבר הכללי שלה הוא $a_n = 2 \cdot 4^{-n}$.

18) סדרה מוגדרת בעזרת כלל נסיגה: $a_{n+1} = ba_n$, $a_1 = a$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).
הסבר מדוע הסדרה היא סדרה הנדסית והגדר אותה בעזרת הכלל לפי מקום.

$$b^2 = ac$$

אם a, b, c הם שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית אז:

המספרים הבאים הם שלושה איברים סמוכים של סדרה הנדסית. (סדר האיברים הוא משמאל לימין). מצא את המספרים ואת מנת הסדרה:

(19) $x+4, 12, 3x+6$ (20) $2x-6, 3-x, x+1$ (21) $\sqrt{x}, 6, 2\sqrt{x}+6$

(22) שלושה מספרים, שהראשון בהם 9, מהווים סדרה הנדסית. אם מחסרים מהראשון 1, מהשני 1 ומוסיפים לשלישי 1 מתקבלת סדרה הנדסית חדשה. מצא את שתי הסדרות ההנדסיות.

(23) נתונים שלושה מספרים שונים מאפס. אם כופלים את המספר השלישי פי 5 מתקבלת סדרה הנדסית. אם מוסיפים לריבועו של המספר הראשון 6 מתקבלת גם כן סדרה הנדסית. מצא את המספר הראשון.

(24) נתונים שלושה מספרים שהם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מכפלת שלושת המספרים היא 125. אם נוסיף 1 לכל אחד משני המספרים הראשונים ונחסיר 7 מהמספר השלישי, יתקבלו שלושה מספרים שהם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית חדשה. מצא את שלושת המספרים הנתונים.

מציאת האיבר הראשון והמנה (a_1 ו- q) ע"י חילוק משוואות

(25) בסדרה הנדסית האיבר השלישי גדול ב-15 מהאיבר הראשון וקטן ב-240 מהאיבר החמישי. מצא את מנת הסדרה.

(26) מצא את q ואת a_1 בסדרה הנדסית שבה: $a_1 + a_2 + a_3 = 42$, $a_3 + a_4 + a_5 = 168$.

(27) סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 380. סכום שני האיברים הראשונים גדול ב-20 מהאיבר השלישי. מצא את שלושת האיברים הראשונים.

(28) סכום ארבעת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית הוא 170. וסכום האיברים הראשון והשלישי הוא 34. מצא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.

בעיות מחיי יום יום – האיבר הכללי של סדרה הנדסית

(29) אדם החזיר הלוואה ב-5 תשלומים, כל תשלום היה גדול ב-25% מהתשלום שקדם לו. סכום שני התשלומים האחרונים היה 11250 שקלים.

מה היה התשלום הראשון?

(30) בהגרלה חילקו 5 פרסים. כל פרס היה גדול פי מספר קבוע מהפרס הקודם לו. סכום שלושת הפרסים הקטנים (הראשונים) היה 1520 שקלים. הפרס הקטן ביותר היה 320 שקלים.
א. פי כמה היה גדול כל פרס מהפרס הקודם לו?
ב. מה היה הפרס הגדול ביותר (האחרון)?

(31) הזרימו מים לבריכה במשך 5 שעות. כמויות המים שנכנסו לבריכה בכל שעה מהוות סדרה הנדסית. כמות המים שנכנסה לבריכה ב-3 השעות הראשונות גדולה פי $2\frac{1}{4}$ מכמות המים שנכנסה לבריכה ב-3 השעות האחרונות.
א. מצא את מנת הסדרה.
ב. נתון גם שב-2 השעות הראשונות נכנסו לבריכה 1215 מ"ק מים. מצא את כמות המים שנכנסה לבריכה בשעתיים האחרונות.

תרגילים שונים – האיבר הכללי של סדרה הנדסית

(32) בסדרה הנדסית סכום האיברים השני והשלישי גדול פי 6 מהאיבר הרביעי.
א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה.

ב. נתון שהאיבר הראשון בשתי הסדרות שהתקבלו בסעיף א' הוא זהה. מצא פי כמה גדול האיבר השלישי בסדרה היורדת מהאיבר השלישי בסדרה שהיא לא עולה ולא יורדת.

(33) סכום האיברים השני, השלישי והרביעי בסדרה הנדסית הוא 42. ההפרש בין האיבר הרביעי לשלישי גדול פי 12 מהאיבר השני.
א. מצא את האיבר הראשון.
ב. מצא את הנוסחה לאיבר ה-n.

(34) האיבר השלישי בסדרה הנדסית גדול ב-20 מהאיבר הראשון והאיבר הרביעי גדול ב-30 מהאיבר השני.
מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

(35) בסדרה הנדסית עולה יש 4 איברים. סכום שלושת האחרונים גדול פי 4 מסכום שלושת הראשונים. אם את האיבר הראשון כופלים פי 2, לאיבר השני מוסיפים 2 וגם לאיבר השלישי מוסיפים 2 מקבלים שלושה איברים שמהווים סדרה הנדסית חדשה.
מצא את ארבעת איברי הסדרה הנתונה.

(36) סכומם של 4 מספרים המהווים סדרה הנדסית הוא 65. ההפרש בין האיבר הראשון לשני גדול פי $2\frac{1}{4}$ מההפרש שבין האיבר השלישי לרביעי. מצא את הסדרה.

(37) סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 336 וסכום שבעת האיברים הראשונים של הסדרה ללא האיבר הרביעי הוא 357. מצא את האיבר הראשון.

(38) מצא שלושה מספרים המהווים סדרה הנדסית עולה אם ידוע שמכפלתם היא 64 וסכומם הוא 21.

(39) בסדרה הנדסית חמישה איברים. סכום כל האיברים בלי הראשון הוא 120 וסכום כל האיברים בלי האחרון הוא 40. מצא את האיבר האחרון.

(40) בסדרה יש ארבעה איברים: a_1, a_2, a_3, a_4 . שלושת האיברים הראשונים הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית. סכום האיבר השני והאיבר הרביעי הוא 15. סכום האיבר השלישי והרביעי הוא 75. מצא את האיברים a_2, a_3, a_4 .

(41) מצא 4 מספרים המהווים סדרה הנדסית אם מכפלת האיבר השני ברביעי היא 100 וסכום האיברים השלישי והרביעי הוא 30.

(42) האיבר הרביעי בסדרה הנדסית גדול ב-12 מהאיבר השלישי וקטן ב-72 מהאיבר השישי. מצא את המנה ואת האיבר הראשון.

(43) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לשלישי גדול פי 90 מההפרש בין האיבר השלישי לראשון. מצא את המנה. (הנח שההפרשים הנ"ל שונים מ-0).

תרגילים נוספים – האיבר הכללי של סדרה הנדסית

(44) נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ שהמנה שלה q . בנויים מהסדרה הנ"ל סדרה באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_2 + a_3, \quad b_3 = a_3 + a_4, \quad \dots, \quad b_n = a_n + a_{n+1}$$

א. הבע באמצעות a_1 ו- q את b_n .

ב. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית והבע באמצעות q את המנה שלה.

ג. נתון: $a_4 = 32, b_4 = 48$. מצא את a_1 ואת b_1 .

(45) נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ שהמנה שלה q .

בונים מהסדרה הנ"ל סדרה באופן הבא:

$$b_1 = a_1 \cdot a_2, b_2 = a_2 \cdot a_3, b_3 = a_3 \cdot a_4, \dots, b_n = a_n \cdot a_{n+1}$$

א. הבע באמצעות a_1, q ו- n את b_n .

ב. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית והבע באמצעות q את המנה שלה.

ג. נתון: $a_5 = 162, b_5 = 39366$. מצא את a_1 ואת b_1 .

נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה היא q . מצא אילו מבין הסדרות הבאות הן (תמיד) סדרות הנדסיות. לגבי הסדרות ההנדסיות הוכח שהן אכן סדרות הנדסיות ומצא את המנה שלהן ($p \neq 0$):

(46) $a_1 p, a_2 p, a_3 p, \dots$

(47) $a_2, a_5, a_8, \dots$

(48) $a_1, a_3, a_5, \dots$

(49) $a_1^p, a_2^p, a_3^p, \dots$

(50) $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$

(51) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$

(52) $a_1 + p, a_2 + p, a_3 + p, \dots$

(53) $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, \dots$

(54) $a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, a_3 + a_4 + a_5, \dots$

(55) $a_1 a_2, a_3 a_4, a_5 a_6, \dots$

(56) $a_1, a_2^2, a_3^3, \dots$

(57) $a_1 a_2 a_3, a_3 a_4 a_5, a_5 a_6 a_7, \dots$

(58) בסדרה הנדסית סכום האיברים השלישי והרביעי הוא 10 וסכום ריבועיהם הוא 52. מצא את האיבר הראשון.

(59) נתונות שתי סדרות הנדסיות שבכל אחת מהן שלושה איברים. מחסרים בהתאמה את איברי הסדרה השנייה מאיברי הסדרה הראשונה. מתקבלת סדרה שלישית – סדרת ההפרשים ונתון שגם היא סדרה הנדסית.

א. הוכח שהמנות של שתי הסדרות הראשונות שוות זו לזו.

ב. נתון שהאיבר הראשון של הסדרה הראשונה הוא 4, האיבר השני של הסדרה השנייה הוא 3 והאיבר השלישי של הסדרה השלישית הוא 27. מצא את המנה של הסדרה השלישית.

(60) האיבר השלישי בסדרה הנדסית גדול ב-6 מהאיבר השני והאיבר הרביעי גדול ב-21 מהאיבר הראשון.

מצא את המנה ואת האיבר הראשון.

(61) בסדרה הנדסית עולה 4 איברים. סכום שני האיברים הקיצוניים הוא 35 וסכום שני האיברים הפנימיים הוא 30.

מצא את איברי הסדרה.

62 בסדרה הנדסית, שבה 6 איברים חיוביים, האיבר הראשון הוא 1. סכום הסדרה הוא 364 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 30. מצא את מנת הסדרה.

63 הוכח: אם אורכי צלעותיו של משולש יוצרים סדרה הנדסית אז המנה q מקיימת

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

הערה: תרגיל 64 הוא קשה במיוחד.

64 סכום 5 האיברים הראשונים של סדרה הנדסית עולה הוא 93 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 30. מצא את איברי הסדרה.

תשובות (סדרה הנדסית – האיבר הכללי):

- 1 (354294 (2 .234375 (3 .1536 (4 $\frac{2}{9}$ (5 $364\frac{1}{2}$ (6 10^{11} (7 4, 10.
- 8 $\frac{1}{3}$ ו-1215 או $-\frac{1}{3}$ ו-1215 (9 א. 7, 14, 28, 56, 122 ב. 7, -14, 28, -56, 112.
- 10 (16 (12 א. 3 או $1\frac{1}{2}$ ב. 13.5 או 6.75 (13 א. $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ ב. 8748.
- 14 א. $a_n = 27(\frac{2}{3})^{n-1}$ ב. $a_n = 27$, $a_1 = 27$ (16 א. $a_1 = 6$, $q = 2$.
- 17 א. $a_{n+1} = 2a_n$, $a_1 = 6$ (17 א. $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$ ב. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ (18 $a_n = ab^{n-1}$.
- 19 $q = 1\frac{1}{2}$; 8, 12, 18 או $q = -2$; -6, 12, -24 (20 $q = -\frac{1}{2}$; -16, 8, -4.
- 21 $q = 2$; 3, 6, 12 (22 $q = 2$; 9, 21, 49 או $q = 2$; 8, 20, 50 או $q = 2$; 9, -3, 1 או $q = 2$; 8, -4, 2 (23 3 או 2.
- 24 $1, 5, 25$ או $5, -7, -\frac{25}{7}$ (25 ± 4 (26 2 ו-6 או -2 ו-14 (27 80, 120, 180 או 500, -300, 180 (28 2, 4 (29 2560 שקלים (30 1620 שקלים (31 $\frac{2}{3}$.
- 32 א. $\frac{1}{2}$ או $-\frac{1}{3}$ ב. $2\frac{1}{4}$ (33 א. $\frac{1}{2}$ או -2 ב. $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^{n-1}$ או 360 מ"ק.
- 34 $a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1}$ (34 $a_1 = 16$, $q = 1\frac{1}{2}$ (35 1, 4, 16, 64 (36 27, 18, 12, 8 או -12, 48, 27, 0 (40 15, 75, 0 (39 81.
- 37 135, -90, 60, -40 (37 192 או 448 (39 81 (40 15, 75, 0 או -12, 48, 27, 0.
- 41 $2\frac{1}{2}, 5, 10, 20$ או $-\frac{5}{8}, 2\frac{1}{2}, -10, 40$ (42 2 ו-3 או -3 ו- $-\frac{1}{3}$ (43 ± 3 .
- 44 א. $b_n = a_1 q^{n-1}(1+q)$ ב. q ג. $a_1 = 256$, $b_1 = 384$ (45 $b_n = a_1^2 q^{2n-1}$.
- 46 q^2 (46 q^2 (47 q^3 (49 $\frac{1}{q}$ (50 q^2 (51 q^p (52 q^2 ב. q^2 ג. $b_1 = 1536$, $a_1 = 32$.
- 53 לא (54 q^4 (55 q (56 q^6 (57 לא (58 $1\frac{7}{9}$ או $13\frac{1}{2}$ (59 3 או $-2\frac{1}{4}$.
- 60 2 ו-3 או $-\frac{1}{2}$ ו-24 (61 8, 12, 18, 27 (62 3 (64 3, 6, 12, 24, 48.

תרגילים (מציאת מספר האיברים בסדרה הנדסית עפ"י האיבר הכללי)

מציאת מספר האיברים (מעריכים טבעיים)

מצא בסדרות ההנדסיות הבאות את מספר האיברים :

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| (1) $5, 10, \dots, 1280$ | (2) $3, 12, \dots, 3072$ |
| (3) $7, 21, \dots, 5103$ | (4) $2, 10, \dots, 6250$ |
| (5) $1536, 768, \dots, 3$ | (6) $16, 24, \dots, 81$ |
| (7) $3, -6, \dots, -384$ | (8) $-2, 6, \dots, 486$ |

(9) כמה מספרים יש להכניס בין המספרים 7 ו-896 כדי שתתקבל סדרה הנדסית שהמנה שלה היא 2?

(10) רווחיה של חברה גדלו כל שנה פי 2 בהשוואה לשנה שקדמה לה. בשלוש השנים הראשונות הרוויחה החברה 21 מיליון שקלים.

באיזו שנה הרוויחה החברה 192 מיליון שקלים?

(11) מספר הצופים בתחרות ספורט גדל כל יום פי $1\frac{1}{2}$ לעומת היום שקדם לו. ביומיים הראשונים צפו בתחרות 8000 צופים.

באיזה יום צפו בתחרות 16200 צופים?

(12) בסדרה הנדסית האיבר השני גדול מהאיבר הראשון ב-10 וקטן מהאיבר השלישי ב-30.

מצא את מספר האיברים בסדרה אם האיבר האחרון הוא 3645.

(13) לסדרות ההנדסיות $1, 4, \dots$ ו- $32, 64, \dots$ יש אותו מספר איברים והאיבר האחרון שווה בשניהן. מצא:

א. את מספר האיברים. ב. את האיבר האחרון.

(14) א. מצא בסדרה ההנדסית $2, 6, \dots$ שני איברים סמוכים שסכומם 1944. (מצא את האיברים ואת מקומם הסידורי).

ב. הוכח שהסכום של כל שני איברים סמוכים בסדרה הנ"ל, פרט לראשון והשני, מתחלק ב-24 ללא שארית.

- 15 א. מצא בסדרה ההנדסית $3, 6, 12, \dots$ את מקומותיהם של שלושה איברים סמוכים שסכומם 2688.
 ב. הוכח שסכומם של כל 3 איברים סמוכים בסדרה הנ"ל מתחלק ב-21 ללא שארית.

- 16 הוכח שסכומם של כל ארבעה איברים סמוכים בסדרה ההנדסית $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ מסתיים בספרה אפס.

- 17 האיבר הכללי של סדרה הנדסית הוא $a_n = 2^n$.
 מצא את n מהמשוואה: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = 128^{2n-13}$.

- 18 בסדרה ההנדסית $1, q, q^2, q^3, \dots, q^{2n}$ מכפלת האיברים שבמקומות האי זוגיים היא 243 ומכפלת האיברים שבמקומות הזוגיים היא 81.
 מצא את n ו- q .

מציאת מספר האיברים (מעריכים שליליים ומנה עם שורש ריבועי)

מצא בסדרות ההנדסיות הבאות את מספר האיברים:

- 19 $10^{-7}, 10^{-4}, \dots, 10^{26}$ (20) $4^{23}, 4^{22}, \dots, 64$
 21 $7^{-25}, 7^{-27}, \dots, 7^{-41}$ (22) $2^{-7}, 2^{-10}, \dots, 2^{-40}$
 23 $10, 10\sqrt{10}, \dots, 10^{18}$ (24) $3, \sqrt{3}, \dots, \frac{1}{243}$

- 25 נתונה הסדרה ההנדסית $3, 3\sqrt{3}, 9, \dots$

א. מצא את האיבר הרביעי.

ב. מצא את הנוסחה ל- a_n .

ג. מצא את n עבורו $a_n = 3^{20}$.

- 26 בסדרה הנדסית שכל איבריה חיוביים האיבר הראשון הוא 1 והאיבר החמישי הוא 3.

מצא כמה איברים בסדרה אם האיבר האחרון הוא 27.

תשובות (מציאת מספר האיברים בסדרה הנדסית עפ"י האיבר הכללי):

- 1 (2) 3 (4) 6 (5) 10 (6) 5 (7) 8 (8) 6 (9) 10 (10) השביעית.
 11 החמישי. 12 (7) 13 א. 6 ב. 1024 (14) א. $a_6 = 486$, $a_7 = 1458$.
 15 א. $a_8 = 384$, $a_9 = 768$, $a_{10} = 1536$. 17 (13) או 14 (18) $n = 4$, $q = \sqrt[4]{3}$. 19 (12) 20 (21) 9 (22) 12 (24) 13 (25) א. $9\sqrt{3}$ ב. $3(\sqrt{3})^{n-1}$ ג. 39 (26) 13.

תרגילים (הסכום של סדרה הנדסית)

תרגילים יסודיים – סכום סדרה הנדסית

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

הנוסחאות:

מצא לגבי כל אחת מהסדרות ההנדסיות הבאות את הסכום (S_n) שרשום משמאל:

$$S_{14} \quad 5, -10, 20, \dots \quad (2)$$

$$S_9 \quad 5, 15, 45, \dots \quad (1)$$

$$S_6 \quad 6144, -4608, \dots \quad (4)$$

$$S_8 \quad 1536, 768, \dots \quad (3)$$

136 © כל הזכויות שמורות – בני גורן (מתמטיקה 5 יח"ל – חלק ב'-1) ★ הצילום מספר זה הוא עבירה על החוק

(5) בסדרה הנדסית נתון: $q = -3$, $S_7 = 1094$. מצא את a_1 .

(6) נתונה הסדרה ההנדסית $7, 14, \dots, 896$. מצא את הסכום של הסדרה בשתי דרכים: (1) ע"י שתמצא תחילה, בעזרת a_n , את מספר האיברים.

(2) ע"י שתיעזר בנוסחה השנייה ל- S_n (שמופיעה משמאל לפני התרגילים) וזאת מבלי למצוא את מספר האיברים.

(7) נתונה הסדרה ההנדסית שבה $a_1 = 2$, $a_n = 162$, $S_n = 122$. מצא את המנה q ואת מספר האיברים n .

(8) בסדרה הנדסית יש 7 איברים. האיבר הראשון הוא 128 והאיבר האחרון הוא 1458. מצא את סכום הסדרה.

(9) בין המספרים 5 ל-80 יש להכניס שבעה מספרים כך שתשעת המספרים יהוו סדרה הנדסית עולה.

א. מצא את מנת הסדרה.
ב. מצא את האיבר החמישי בסדרה.
ג. מצא את הסכום של ששת האיברים הראשונים.

(10) בסדרה ההנדסית $3, 6, 12, \dots$ יש 14 איברים. המספר 768 הוא איבר בסדרה. מהו סכום כל האיברים בסדרה שגדולים מ-768?

הנוסחה ל- S_n – סכום סדרה הנדסית

מצא את הנוסחה ל- S_n של הסדרות ההנדסיות הבאות:

(11) $4, 12, 36, \dots$ (12) $1, 5, 25, \dots$ (13) $9, -18, 36, \dots$

מצא עפ"י הנוסחה ל- a_n את הנוסחה ל- S_n בסדרות ההנדסיות הבאות:

(14) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ (15) $a_n = 10 \cdot 2^{n-1}$ (16) $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

בתרגילים הבאים נתונה הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה.

א. מצא את הנוסחה ל- a_n (בדוק את נכונותה גם עבור $n = 1$) והוכח שהסדרה היא סדרה הנדסית.

ב. הגדר את הסדרה בעזרת נוסחת נסיגה.

(17) $S_n = 4 \cdot 3^n - 4$ (18) $S_n = 3 \cdot 2^{n+2} - 12$ (19) $S_n = 5 \cdot (-5)^{n+1} + 25$

- (31) בתחרות חולקו פרסים בסכום כולל של 1575 שקלים כך שכל פרס היה גדול מקודמו פי מספר טבעי קבוע. סכום שני הפרסים האחרונים שחולקו היה גדול פי 16 מסכום שני הפרסים הראשונים שחולקו.
מצא את מספר הפרסים אם הפרס הראשון שחולק (הקטן ביותר) היה 25 שקלים.

סכום איברים אחרונים – סכום סדרה הנדסית

- (32) בסדרה הנדסית $3, 6, 12, \dots$ יש 18 איברים.
מצא את סכום שמונת האיברים האחרונים.

- (33) בסדרה הנדסית יש 12 איברים. סכום ששת האיברים הראשונים הוא 189 וסכום ששת האחרונים הוא 12096.
מצא את האיבר הראשון.

- (34) בסדרה הנדסית שבה 20 איברים המנה היא 2. סכום 10 האיברים הראשונים קטן ב-19845 מסכום 10 האיברים האחרונים. האיבר הראשון הוא 5.
מצא את מספר האיברים שבסדרה. (הערה: יש להיעזר בפתרון משוואה מעריכית).

מקומות אי זוגיים וזוגיים – סכום סדרה הנדסית

- (35) בסדרה ההנדסית $2, 6, 18, \dots$ יש 15 איברים.
א. מצא את סכום האיברים שבמקומות האי זוגיים.
ב. מצא את סכום האיברים שבמקומות הזוגיים.

- (36) בסדרה הנדסית שהמנה שלה היא 2 יש מספר איברים.

תרגילים שונים – סכום סדרה הנדסית

(39) נתונה סדרה הנדסית בת $2n$ איברים שהמנה שלה q . הוכח:

א. היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא q .

ב. היחס בין סכום n האיברים האחרונים לסכום n האיברים הראשונים הוא q^n .

ג. היחס בין סכום הסדרה לסכום n האיברים הראשונים הוא $q^n + 1$.

ד. היחס בין סכום הסדרה לסכום הסדרה שבה הפוכים סימני האיברים שבמקומות הזוגיים הוא $\frac{1+q}{1-q}$.

ה. היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא $q+1$.

ו. היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $\frac{q+1}{q}$.

(40) בסדרה הנדסית שבה יש $2n$ איברים נתון שסכום ריבועי n האיברים הראשונים גדול פי $1\frac{1}{2}$ מסכום n האיברים שבמקומות הזוגיים. סכום האיברים הראשון והשני הוא 9 . מצא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.

(41) בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $\frac{3}{4}$ מסכום כל האיברים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. מצא את האיבר הראשון של הסדרה אם יש בה 8 איברים וסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא 1640 .

(42) בסדרה הנדסית מספר זוגי של איברים והסכום שלה גדול פי 7 מסכום הסדרה כאשר הופכים בה את הסימנים של האיברים שבמקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. מצא את היחס בין סכום הסדרה כאשר הופכים בה את סימני האיברים שבמקומות האי זוגיים, לבין סכום האיברים שבמקומות הזוגיים.

(43) בסדרה הנדסית, שהמנה שלה 3 , האיבר האחרון גדול מהשני ב- 480 וסכום הסדרה הוא 728 .

מצא את מספר איברי הסדרה.

(44) בסדרה הנדסית שהאיבר השני שלה הוא 6 יש $2n$ איברים. סכום הסדרה גדול פי 2 מסכום הריבועים של n האיברים הראשונים.

מצא את המנה ואת האיבר הראשון.

(45) סכום סדרה הנדסית ללא האיבר האחרון הוא 480 וללא האיבר הראשון (בלבד) הוא 1440. האיבר השלישי של הסדרה גדול ב-72 מהאיבר השני. מצא כמה איברים בסדרה.

(46) בסדרה הנדסית יש $2n$ איברים. סכום הסדרה גדול פי $1\frac{1}{64}$ מסכום n האיברים האחרונים.

א. מצא פי כמה גדול סכום הסדרה מסכום n האיברים הראשונים.
ב. נתון שבסדרה יש 24 איברים. מצא את מנת הסדרה אם כל איבריה חיוביים.

(47) בסדרה הנדסית יש $2n+1$ איברים. סכום n האיברים הראשונים קטן פי 8 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון גדול מהראשון ב-189. מצא את האיבר הראשון.

(48) בסדרה ההנדסית $2, 6, 18, \dots$ חיברו k איברים סמוכים החל מהאיבר שבמקום k -ה וקיבלו את הסכום 19602.

מצא את האיבר שממנו החלו לחבר. (הערה: יש להיעזר בפתרון משוואה מעריכית).

(49) נתונות הסדרות ההנדסיות: (1) $3, 6, 12, \dots$ (2) $1, 4, 16, \dots$ בסדרה הראשונה שני איברים יותר מאשר בשנייה והסכום שלה גדול ב-40 מהסכום של השנייה. מצא כמה איברים בכל סדרה. (הערה: יש להיעזר בפתרון משוואה מעריכית).

תרגילים נוספים – סכום סדרה הנדסית

(50) בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = a^8, a_n = b^8, S_n = \frac{b^9 - a^9}{b - a}$ ($a \neq b$).
א. הבע באמצעות a ו- b את המנה q .
ב. מצא את מספר האיברים בסדרה.

(51) נתונה סדרה הנדסית: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

א. נתון: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{7}{4}, \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} = \frac{7}{32}$. מצא את המנה ואת a_1 .

ב. נתונה סדרה הנדסית נוספת: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. משתי הסדרות בונים סדרה הנדסית

חדשה: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$. מנת הסדרה החדשה היא 3 וסכום 10 האיברים

הראשונים בסדרה החדשה הוא 7381.

(1) מצא את האיבר הראשון בסדרה החדשה ואת b_1 .

(2) מצא את מנת הסדרה b_n .

(3) מצא את n , שעבורו $b_n = 4 \cdot \frac{8}{27}$.

(52) נתונות שתי סדרות הנדסיות: $a_1, a_2, \dots, a_n$ ו- $b_1, b_2, \dots, b_n$ המקיימות: $b_2 = a_5$, $b_3 = a_8$.

א. הראה שלכל n טבעי מתקיים: $b_n = a_{3n-1}$.
 ב. נתון שהמנה של סדרת ה- a_n היא 3. חשב את היחס: $\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{3n}}$.

(53) נתונה סדרה הנדסית: $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה n איברים. בונים מהסדרה הנתונה סדרה

חדשה $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n$ שבה $n-1$ איברים. נסמן ב- S את סכום הסדרה הנתונה וב- T את סכום הסדרה החדשה.

א. הראה שמתקיים: $2 \cdot S - T = a_1 + a_n$.

ב. נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 1 וסכום n האיברים הראשונים שלה

הוא 364. בסדרה הנ"ל מחברים כל שני איברים סמוכים וכך מתקבלת סדרה הנדסית

בת $n-1$ איברים שסכומה 484. מצא את n .

הוכח שהמספרים הבאים הם ריבוע של מספר טבעי:

$$(5^n + 7)(1 + 5 + 25 + \dots + 5^{n-1}) + 4 \quad (55)$$

$$(5 + 2^n)(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}) + 9 \quad (54)$$

(56) סכום סדרה הנדסית הוא 20 וסכום ריבועי האיברים שלה הוא 205.

מצא את מספר האיברים אם האיבר הראשון שווה ל- $\frac{1}{2}$.

(57) בסדרה הנדסית שמנתה 2 היחס בין סכום ריבועי איברי הסדרה לבין ריבוע סכום הסדרה הוא $\frac{65}{189}$.

מצא את מספר האיברים בסדרה.

(58) בסדרה הנדסית שכל איבריה חיוביים יש $2n$ איברים. סכום n האיברים האחרונים גדול

פי 32 מסכום n האיברים הראשונים וסכום $n+2$ האיברים האחרונים גדול פי 16

מסכום $n+2$ האיברים הראשונים.

מצא את המנה ואת n .

(59) הסדרה $a_1, a_2, \dots, a_n$ היא סדרה הנדסית.

נסמן $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$. הוכח:

א. $\left(\frac{S}{T}\right) = a_1 \cdot a_n$.
 ב. $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$.

(60) האיבר ה- n של סדרה נתון ע"י $a_n = a_1 q^{n-1}$ (a_1 ו- q קבועים, $q \neq \pm 1$).

נסמן $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $R_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$. הוכח:

א. $R_n = \frac{a_1 q (q^n - 1)}{(q - 1)^2} - \frac{n a_1}{q - 1}$.
 ב. $(1 - q) R_n + q S_n = n a_1$.

$$(61) \text{ הוכח: } 1+2q+3q^2+\dots+nq^{n-1} = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

(הדרכה: כפול את הסכום שמשמאל ב- $(1-q)$.)

- (62) נתונה סדרה שבה כל איבר גדול פי מספר קבוע p מסכום כל האיברים שלפניו.
- א. הוכח: הסדרה הנ"ל ללא האיבר הראשון, היא סדרה הנדסית שהמנה שלה $p+1$.
- ב. בסדרה הנ"ל האיבר הראשון הוא 2 והאיבר השלישי 24. מצא את האיבר השני ואת p .
- ג. מצא את האיבר הרביעי בסדרה.

הערה: תרגילים הכוללים קבוצות של סדרות הנדסיות וחלוקת סדרה הנדסית לקבוצות ראה החל מעמ' 168.

תשובות (הסכום של סדרה הנדסית):

- (1) 49205 (2) -27305 (3) 3060 (4) 2886 (5) 2 (6) 1785 (7) $n=5, q=-3$
- (8) 4118 או 926 (9) א. $\sqrt{2}$ ב. 20 ג. 84.50 (10) 47616 (11) $2(3^n-1)$
- (12) $\frac{1}{4}(5^n-1)$ (13) $-3((-2)^n-1)$ (14) 3^n-1 (16) $\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{4})^n)$ (17) א. $8 \cdot 3^{n-1}$
- ב. $a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 8$ (18) א. $3 \cdot 2^{n+1}$ ב. $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 12$ (19) א. $-30 \cdot (-5)^n$
- ב. $a_{n+1} = -5a_n, a_1 = 150$ (20) 8 (21) 7 (22) 6 (23) 10 (24) 6 (25) 10
- (26) א. 6250 מטר. ב. 23058 מטר. (28) 7 ימים. (29) 315 מ"ק. (30) 6 ימים.
- (31) 6 פרסים. (32) 783360 (33) 3 או -9 (34) 12 (35) 10761680
- ב. 3587226 (36) א. 16383 ב. 3 (37) א. 59048 ב. (1) 44286 (2) 14762 ג. 2
- (38) 2, 10 (40) 2 ו-3 או -3 ו-4.5 (41) א. 3 ב. 2 (42) א. $\frac{3}{4}$ ב. $-\frac{1}{3}$ (43) 6
- (44) 3 ו-2 או -4 ו-1.5 (45) 5 (46) א. 65 ב. $\sqrt{2}$ (47) 3 (48) $a_5 = 162$
- (49) 4 ו-2 או 7 ו-5 (50) א. $\frac{b}{a}$ ב. 9 (51) א. 2, 1 ב. (1) $\frac{1}{4}$, 4 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 4
- (52) ב. $\frac{3}{13}$ (53) ב. 6 (56) 4 (57) 6 (58) $\sqrt{2}$, 10 (62) ב. 6 ו-3 או -8 ו-4.

ו. 96 או 77-

תרגילים (סדרה הנדסית אינסופית וסכומה)

תרגילים יסודיים — סדרה הנדסית אינסופית וסכומה

$S = \frac{a_1}{1-q}$	$(q \neq 0, -1 < q < 1)$	הנוסחה:
-----------------------	--------------------------	---------

חשב את הסכום של הסדרות האינסופיות הבאות:

(1) $24, 18, 13.5, \dots$

(2) $75, 30, 12, \dots$

(3) $9, 0.9, 0.09, \dots$

(4) $45, -30, 20, \dots$

(5) $10.1, -0.101, 0.00101, \dots$

(6) $\frac{3}{5}, -\frac{3}{5^2}, \frac{3}{5^3}, \dots$

© כל הזכויות שמורות — בני גורן (מתמטיקה 5 יח"ל - חלק ב'-1) * הצילום מספר זה הוא עבירה על החוק 147

(7) הסכום של טור הנדסי אינסופי יורד הוא 375 והמנה היא $\frac{3}{5}$. מצא את סכום איברי הטור החל מהאיבר השלישי.

(8) הסכום של טור הנדסי אינסופי יורד הוא 216. האיבר הראשון הוא 36. מצא את סכום איברי הטור ללא האיבר השלישי.

(9) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת סכום האיברים הראשון והשלישי הוא 78. סכום האיברים השני והרביעי הוא 52.
א. מצא את מנת הסדרה.
ב. מצא את סכום הסדרה.

(10) בטור הנדסי אינסופי יורד סכום הטור גדול פי 4 מהאיבר הראשון. סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 74. מצא את סכום הטור.

(11) סכום טור הנדסי יורד הוא 162. סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 114. מצא את המנה ואת האיבר הראשון.

מצא את x עפ"י הנתון בסדרות האינסופיות הבאות שבהן המנה היא בין -1 ל- 1 :

$$(12) \quad x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{2} \quad (13) \quad x + \frac{1}{3}x^2 + \dots = x + 4 \quad (14) \quad \sqrt{x} + x + \dots = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$$

(15) סכום שני האיברים הראשונים של טור גיאומטרי אינסופי שהמנה שלו בין -1 ל- 1 הוא 8 וסכום שאר האיברים הוא 1. מצא את מנת הטור ואת האיבר הראשון.

(16) בטור הנדסי אינסופי יורד, שבו המנה שווה לאיבר הראשון, גדול האיבר הראשון מסכום כל שאר האיברים ב- $\frac{1}{6}$. מצא את המנה.

(17) סכום שני האיברים הראשונים בטור גיאומטרי אינסופי יורד הוא 5. האיבר השני גדול ב- $\frac{2}{3}$ מסכום כל האיברים שאחריו. מצא את מנת הטור.

(18) סכום האיברים הראשון והשני בטור הנדסי אינסופי יורד הוא 10. סכום הטור גדול פי $4\frac{1}{2}$ מהאיבר השני. מצא את סכום הטור.

סדרות הנדסיות המתקבלות מסדרה הנדסית אינסופית נתונה

- (19) האיבר הראשון של טור גיאומטרי אינסופי יורד הוא 14. סכום כל האיברים במקומות הזוגיים הוא 24.
מצא את סכום כל האיברים במקומות האי זוגיים.
- (20) סכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת גדול פי 5 מסכום האיברים במקומות הזוגיים.
מצא פי כמה גדול סכום הסדרה מסכום האיברים במקומות האי זוגיים.
- (21) סכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 3 וסכום ריבועי איבריה הוא 1.
מצא את המנה ואת האיבר הראשון של הסדרה הנייל.
- (22) ריבוע הסכום של סדרה הנדסית אינסופית יורדת גדול פי 4 מסכום ריבועי איבריה.
מצא את מנת הסדרה.
- (23) האיבר השני של טור הנדסי אינסופי יורד הוא $\frac{6}{7}$ וסכום הטור אחרי שהחליפו בו את סימני האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 1.4.
מצא את מנת הטור, את האיבר הראשון ואת סכומו.
- (24) מסדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה בין -1 ל- 1 וסכומה 3 יצרו סדרה הנדסית אחרת ע"י שחיברו כל שני איברים סמוכים (כלומר הראשון והשני, השני והשלישי וכו').
סכום הסדרה שהתקבלה הוא 2.
מצא את מנת הסדרה הראשונה ואת איברה הראשון.
- (25) מסדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה בין -1 ל- 1 יצרו את הסדרה $a_1 + a_2 + a_3, a_3 + a_4 + a_5, a_5 + a_6 + a_7, \dots$ שסכומה גדול פי 1.9 מסכום הסדרה המקורית.
מצא את המנה של הסדרה המקורית.
- (26) סכום סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה בין -1 ל- 1 וכל איבריה חיוביים הוא 25.
סכום השורשים (החיוביים) של כל איברי הסדרה הוא 15.
מצא את המנה ואת האיבר הראשון.
- (27) מסדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה בין -1 ל- 1 וסכומה 3 יצרו את הסדרה האינסופית $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, \dots$ שסכומה 1.5.
מצא את a_1 .

תרגילים שונים – סדרה הנדסית אינסופית

חשב את סכום הסדרות ההנדסיות האינסופיות הבאות וקבל את התוצאה מימין:

$$(3 + \sqrt{3}) + 1 + \frac{1}{3 + \sqrt{3}} + \dots = 6 \quad (29)$$

$$2 - \sqrt{2} + 1 - \dots = 4 - 2\sqrt{2} \quad (28)$$

חשב את הסכומים משמאל (המורכבים משתי סדרות הנדסיות אינסופיות) וקבל את התוצאה מימין:

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \dots = \frac{3}{16} \quad (30)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2^6}{3^6} + \dots = \frac{47}{40} \quad (31)$$

$$\frac{5}{5} + \frac{13}{25} + \frac{35}{125} + \frac{97}{625} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{5^n} + \dots = 2\frac{1}{6} \quad (32)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{7}{27} + \frac{17}{81} + \dots + \frac{2^n + (-1)^n}{3^n} + \dots = 1\frac{3}{4} \quad (33)$$

מצא את x עפ"י הנתון בסדרות האינסופיות הבאות שבהן המנה היא בין -1 ל- 1 :

$$\sqrt{x} + x + \dots = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \quad (36)$$

$$x + \frac{1}{3}x^2 + \dots = x + 4 \quad (35)$$

$$x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{2} \quad (34)$$

(37) נתון טור הנדסי אינסופי מתכנס. אם מחליפים את סימניהם של כל האיברים שבמקומות הזוגיים מתקבל טור שסכומו קטן פי 3 מסכום הטור הנתון.

א. מצא את מנת הטור הנתון.

ב. מצא את האיבר הראשון אם סכום הטור הראשון (המקורי) גדול ב-4 מסכום הטור השני.

ג. מצא את סכום הטור המקורי מבלי להיעזר בתוצאות של סעיפים א' ו-ב'.

(38) א. הוכח: בסדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה q היא בין -1 ל- 1 ($q \neq 0$) היחס

$$\frac{1-q}{q}$$

בין כל איבר לסכום כל האיברים שאחריו הוא $\frac{1-q}{q}$.
ב. נתון שהיחס הנ"ל הוא k . הבע באמצעות k את היחס בין סכום הסדרה לאיבר הראשון.

(39) הסכום של טור גיאומטרי אינסופי שהמנה שלו בין -1 ל- 1 הוא 1280. סכום ששת האיברים הראשונים של הטור הוא 1260.

מצא את המנה ואת האיבר הראשון.

תרגילים שונים – סדרה הנדסית אינסופית

חשב את סכום הסדרות ההנדסיות האינסופיות הבאות וקבל את התוצאה מימין:

$$(3 + \sqrt{3}) + 1 + \frac{1}{3 + \sqrt{3}} + \dots = 6 \quad (29)$$

$$2 - \sqrt{2} + 1 - \dots = 4 - 2\sqrt{2} \quad (28)$$

חשב את הסכומים משמאל (המורכבים משתי סדרות הנדסיות אינסופיות) וקבל את התוצאה מימין:

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \dots = \frac{3}{16} \quad (30)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2^6}{3^6} + \dots = \frac{47}{40} \quad (31)$$

$$\frac{5}{5} + \frac{13}{25} + \frac{35}{125} + \frac{97}{625} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{5^n} + \dots = 2\frac{1}{6} \quad (32)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{7}{27} + \frac{17}{81} + \dots + \frac{2^n + (-1)^n}{3^n} + \dots = 1\frac{3}{4} \quad (33)$$

מצא את x עפ"י הנתון בסדרות האינסופיות הבאות שבהן המנה היא בין -1 ל- 1 :

$$\sqrt{x} + x + \dots = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \quad (36)$$

$$x + \frac{1}{3}x^2 + \dots = x + 4 \quad (35)$$

$$x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{2} \quad (34)$$

37 נתון טור הנדסי אינסופי מתכנס. אם מחליפים את סימניהם של כל האיברים שבמקומות הזוגיים מתקבל טור שסכומו קטן פי 3 מסכום הטור הנתון.

א. מצא את מנת הטור הנתון.

ב. מצא את האיבר הראשון אם סכום הטור הראשון (המקורי) גדול ב-4 מסכום הטור השני.

ג. מצא את סכום הטור המקורי מבלי להיעזר בתוצאות של סעיפים א' ו-ב'.

38 א. הוכח: בסדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה q היא בין -1 ל- 1 ($q \neq 0$) היחס

$$\frac{1-q}{q}$$

ב. נתון שהיחס הנ"ל הוא k . הבע באמצעות k את היחס בין סכום הסדרה לאיבר הראשון.

39 הסכום של טור גיאומטרי אינסופי שהמנה שלו בין -1 ל- 1 הוא 1280. סכום ששת האיברים הראשונים של הטור הוא 1260.

מצא את המנה ואת האיבר הראשון.

- (40) סכום סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה בין $1 -$ ל- 1 , בלי האיבר הראשון, הוא $18 -$ ובלי האיבר השני (בלבד) הוא 57 .
 א. מצא את המנה ואת האיבר הראשון.
 ב. מצא את סכום האיברים השליליים של הסדרה.

- (41) סכום סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה בין $1 -$ ל- 1 הוא 16 וסכום ארבעת האיברים הראשונים הוא 15 . מצא:
 א. את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.
 ב. משתי הסדרות שהתקבלו בסעיף א' יצרו סדרה באופן הבא: חיברו את שני האיברים שבמקום הראשון, את שני האיברים שבמקום השני, את שני האיברים שבמקום השלישי וכו'. מהו הסכום של הסדרה שהתקבלה? נמק את תשובתך. (אין צורך לבצע חישובים מסובכים).
 ג. מהו סכום כל האיברים החל מהאיבר השני של הסדרה החדשה?

- (42) א. מצא את המנה של טור גיאומטרי אינסופי יורד שבו סכום שלושת האיברים הראשונים גדול פי 7 מסכום שאר האיברים.
 ב. מהטור הני"ל בונים טור חדש שהמקומות של האיברים שלו הם האיברים של הסדרה החשבונית שהאיבר הכללי שלה הוא $a_n = 3n - 1$. מצא פי כמה גדול סכום הטור המקורי מהטור החדש.

- (43) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ שהמנה שלה q היא בין $1 -$ ל- 1 . נסמן: $S_1 = a_2 - a_4 + a_6 - a_8 + \dots$, $S_2 = a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} + \dots$. נתון: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4}$.
 א. מצא את q .
 ב. מחברים את כל האיברים של שתי הסדרות הני"ל (שסכומן S_1 ו- S_2) ומקבלים סדרה אינסופית חדשה. ענה על הסעיפים הבאים עבור q החיובי שמצאת בסעיף א':
 (1) מצא את היחס בין סכום הסדרה הנתונה לסכום הסדרה החדשה.
 (2) נתון: $a_1 = 65$. מצא את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של הסדרה החדשה.

תרגילים נוספים – סדרה הנדסית אינסופית וסכומה

- (44) נתונים n טורים הנדסיים אינסופיים יורדים שהאיברים הראשונים שלהם הם בהתאמה $1, 2, 3, \dots, n$ והמנות הן בהתאמה $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}$.
 מצא את n אם סכום כל הטורים הוא 135 .

45 א. סכום סדרה הנדסית אינסופית שכל איבריה חיוביים והמנה שלה q היא בין 0 ל-1

הוא S . סכום n האיברים הראשונים של הסדרה הוא T . הוכח: $q = \sqrt[n]{\frac{S-T}{S}}$

ב. בסדרה כני"ל T הוא הסכום של 6 האיברים הראשונים. נתון: $\frac{T}{S} = \frac{665}{729}$. מצא את q .

46 נתון שבסדרה הנדסית אינסופית יורדת $a_1, a_2, \dots$ שכל איבריה חיוביים והמנה שלה q

מתקיים: $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots = 5$, $a_2 + a_6 + a_{10} + a_{14} + \dots = 2$.

א. מצא את q ואת a_1 .

ב. מצא את סכום כל האיברים שמופיעים בסדרה המקורית ולא מופיעים בשתי הסדרות האחרות.

47 נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \dots$ בונים

מהסדרה הני"ל שתי סדרות:

$$(1) a_1, -a_3, a_5, -a_7, \dots \quad (2) a_1, -a_5, a_9, -a_{13}, \dots$$

נסמן ב- S את סכום הסדרה הנתונה, ב- T את סכום הסדרה (1) וב- R את סכום

הסדרה (2). נתון: $\frac{T}{R} = \frac{17}{20}$, $\frac{S}{R} = \frac{17}{8}$. מצא את המנה של הסדרה המקורית.

48 מהסדרה ההנדסית האינסופית המתכנסת $a_1, a_2, a_3, \dots$ יצרו שתי סדרות הנדסיות

אינסופיות: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$ ו- $a_3, -a_6, a_9, -a_{12}, \dots$ שהסכומים שלהן

בהתאמה הם 3 ו-1.

מצא את a_1 .

49 שתי סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות $a_1, a_2, a_3, \dots$ ו- $b_1, b_2, b_3, \dots$ מקיימות

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$$

מצא את המנה q של הסדרה השנייה אם המנה של הסדרה הראשונה היא $-\frac{1}{8}$. $(\frac{1}{8} < |q| < 1)$.

50 $a_1, a_2, \dots$ הוא טור הנדסי אינסופי יורד שהמנה שלו היא q וכל איבריו חיוביים.

נגדיר סדרה חדשה שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = \frac{a_1 q^n}{1-q}$.

א. הוכח שסדרת ה- b_n היא סדרה הנדסית ומצא את המנה שלה.

ב. נסמן $a_1 + a_2 + \dots = S$, $b_1 + b_2 + \dots = T$. הבע את q באמצעות S ו- T .

ג. נתון: $S = 9$, $T = 4\frac{1}{2}$. מצא את a_1 .

- (51) האיבר הכללי של סדרה הוא $a_n = 2^{c-3n}$ (c פרמטר).
 א. הוכח שהסדרה היא סדרה הנדסית יורדת ומצא את המנה שלה.
 ב. נתון שסכום אינסוף איברי הסדרה הנ"ל הוא $\frac{4}{7}$. מצא את c.
 ג. נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = 2^{-117}$. חשב את n.

- (52) משני טורים הנדסיים אינסופיים מתכנסים יצרו טור הנדסי אינסופי ע"י שהכפילו את שני האיברים הראשונים זה בזה, את שני האיברים השניים זה בזה וכו'.
 א. הוכח שאם מכפלת סכומי שני הטורים הנ"ל שווה לסכום הטור שיצרו מהם אז מכפלת המנות של שני הטורים שווה למחצית סכומן.
 ב. מצא עפ"י התוצאה של סעיף א' באיזה תחום מספרים צריכות להימצא שתי המנות כדי שיהיה פתרון.
 ג. נתונים שני טורים כנ"ל שהאיבר הראשון בשניהם שווה. הסכום של טור אחד גדול פי 2 מהסכום של הטור השני. מצא את המנות של שני הטורים.

- (53) בין כל שני איברים סמוכים של טור הנדסי אינסופי יורד שכל איבריו חיוביים והמנה שלו q מכניסים איבר נוסף כך שנוצר טור הנדסי חדש שסכומו גדול פי k מסכום הטור המקורי.
 א. הבע את k באמצעות q אם כל האיברים שנוספו הם: (1) חיוביים. (2) שליליים.
 ב. מהו תחום הערכים האפשריים ל-q במקרה (1) ובמקרה (2)?
 ג. נסמן ב- P_1 את ה-q שבמקרה (1) וב- P_2 את ה-q שבמקרה (2).
 נתון: $a_1 = 6$, $\frac{P_1}{P_2} = 3$. חשב את סכום הטור המקורי.

תשובות (סדרה הנדסית אינסופית וסכומה):

- (1) 96. (2) 125. (3) 10. (4) 27. (5) $\frac{1}{2}$. (6) 135. (7) 191. (8) 9. (9) $\frac{2}{3}$. (10) 128. (11) $\frac{2}{3}$, 54. (12) $-\frac{1}{2}$. (13) 2. (14) $\frac{1}{4}$. (15) $\frac{1}{3}$ ו-6 או $-\frac{1}{3}$ ו-12. (16) $\frac{1}{3}$ או $\frac{1}{4}$. (17) $\frac{1}{4}$ או $\frac{2}{7}$. (18) 18 או $11\frac{1}{4}$. (19) 32. (20) $1\frac{1}{4}$. (21) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$. (22) $\frac{3}{5}$. (23) $\frac{3}{7}$, 2, $3\frac{1}{2}$. (24) $-\frac{1}{3}$, 4. (25) -0.6. (26) $\frac{16}{25}$, 9. (27) 1.5 או 2. (28) $-\frac{1}{2}$. (29) 2. (30) $\frac{1}{4}$. (31) $\frac{1}{2}$. (32) 0. (33) $\frac{1}{2}$. (34) $3\frac{1}{2}$. (35) 43. (36) $\frac{1}{4}$. (37) $\frac{1}{2}$. (38) $\frac{k+1}{k}$. (39) $\frac{1}{2}$ ו-640 או $-\frac{1}{2}$ ו-1920. (40) $-\frac{2}{3}$, 45. (41) -54. (42) $\frac{1}{2}$. (43) $\frac{2}{3}$ או $-\frac{2}{3}$. (44) $\frac{65}{18}$. (45) $\frac{1}{2}$. (46) $\frac{1}{2}$. (47) $\frac{1}{2}$. (48) $4\frac{1}{2}$. (49) $-\frac{1}{2}$ או $\frac{1}{4}$. (50) q. (51) $\frac{1}{8}$. (52) 9. (53) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. (54) $1+\sqrt{q}$. (55) $1-\sqrt{q}$. (56) $0 < p < 1$. (57) $1 < p < 2$. (58) 8.