

# TEOREMA PONTE

$A =$  intervallo o unione finita di intervalli

$x_0 =$  punto appartenente o all'estremo dell'intervallo;  $\in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$\Uparrow$  necessaria  
e sufficiente  
 $\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A - \{x_0\} / |x - x_0| < \delta$$

(si usa per la VERIFICA DI UN LIMITE)

## DIMOSTRAZIONE

1) IPOTESI  $\forall \varepsilon > 0 \dots$       TESI  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$

si fissa una qualsiasi  $x_n / x_n \rightarrow x_0$   
 $n \rightarrow +\infty$

dalla ipotesi si prende un  $\varepsilon > 0$  e quindi  $\exists \delta$

se è vero che  $x_n \rightarrow x_0$  allora  $\exists \nu$

quindi  $|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n > \nu$

essendo del tipo  $|x - x_0| < \delta$

per la definizione di limite è vero che  $|f(x_n) - l| < \varepsilon$

il che significa

$$\boxed{f(x_n) \rightarrow l \quad n \rightarrow +\infty}$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \infty$$

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A - \{x_0\} / x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \pm \infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(x) > \varepsilon \quad \forall x \in A - \{x_0\} / |x - x_0| < \delta$$

•  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = l$  (da limitato prima superiormente e poi inferiormente)

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A - \{x_0\} / x_n \rightarrow \pm \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A / x > \delta$$

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

C.E.  $1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$

$$x < -1 \vee x > 0$$

$$]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$$

poichè

$$x_n \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e$$

allora  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$



2) IPOTESI  
 $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

TESI  
 $\forall \varepsilon > 0$

si ragiona per assurdo...

quindi

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in A - \{x_0\} \text{ s.t. } |x_\delta - x_0| < \delta \text{ s.t. } |f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon_0$$

prendo ad esempio  $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n \in A \mid \left( |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \right) \text{ e } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$$

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$$

$$\text{e } n \rightarrow +\infty \Rightarrow x_n \rightarrow x_0 \quad \left( \text{ma } \frac{1}{n} \neq 0 \right)$$

quindi esiste una successione  $x_n$

$$\text{per cui } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0 \leftarrow$$

ma per ipotesi  $f(x_n) \rightarrow l$   
 $n \rightarrow +\infty$  (non è che si allontana...)

e quindi sono in contraddizione



# LIMITI NOTEVOLI

$$x \rightarrow 0 : \quad \frac{\sin x}{x} \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 1$$

$$\cancel{\frac{(1+x)^n - 1}{x}} \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} =$$

$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad n \quad \quad \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{\tan x}{x} = 1 \quad \frac{\arcsin x / \arctan x}{x} = 1$$

$$x \rightarrow \infty : \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$



$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$y_m > y_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$y_{m-1} > y_m \quad \forall m \geq 2$$

$$\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m > 1 + \frac{1}{m}$$

$$\left(\frac{m}{m-1} \cdot \frac{m+1}{m+1}\right)^m > 1 + \frac{1}{m}$$

$$\frac{m^2}{m^2-1} > 1 + \frac{1}{m}$$

$$(1+x)^m > 1+mx \quad \forall m \geq 2$$

$$\left(1 - \frac{1}{m^2+1}\right)^m > 1 - \frac{1}{m}$$

$$\left(1 - \frac{1}{m^2+1}\right)^m > 1 - \frac{1}{m}$$



$$1 + \frac{1}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n}$$

$$\frac{n^2}{n^2-1} > 1 \quad \Rightarrow \quad n^2 > n^2-1 \quad \checkmark \text{ BQ6}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = 4$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4$$

$$1 < 1 + \frac{1}{n}$$

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4$$



## TEOREMA DEGLI ZERI

IP:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua  
e  $f(a) \cdot f(b) < 0$

allora  $\exists f(x) \in ]a, b[ : 0$

DIM: (con la DIM situata solo l'ultimo punto)

- $f(a) < 0$   $f(b) > 0$
- $\exists \delta \in ]0, b-a[$
- per la permanenza del segno

$\exists$  un intorno  $[a, a+\delta[ \rightarrow f(x) < 0$

un intorno  $]b-\delta, b] \rightarrow f(x) > 0$

• si costruisce  $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$   
non è vuoto perché ci sta l'intorno di  $a$   
almeno

$$[a, a+\delta[ \subseteq A \subseteq [a, b]$$

quindi l'intorno ha il sup = 0



I teorema esistenza valori intermedi

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  assume <sup>assumendo</sup> tutti i valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$

CASO 1

$$f(a) = f(b)$$

dato che c'è un solo punto,  
che è in comune, è ovvio

CASO 2

$$f(a) \neq f(b)$$

quindi  $\forall y_0 \in [f(a), f(b)] \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = y_0$

mi fissa  $y \in ]f(a), f(b)[$

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = f(x) - y$$

$$g(a) < 0 \quad f(a) - y < 0$$

$$g(b) > 0 \quad f(b) - y > 0$$

X TEOREMA DEGLI ZERI

$$\Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / g(x_0) = 0 = f(x_0) - y$$

quindi esiste il punto  $x$  compreso tra  $a$  e  $b$



II teorema dei valori intermedi  
data un  $f$  continua nell'intervallo

$$f([a, b]) = [m, M]$$

x il teorema di Weierstrass

$f$  ha min e max

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$m = f(x_1) \quad M = f(x_2)$$

CASO 1

$$x_1 = x_2$$

$$m = M$$

quindi  $f(a) = m$

CASO 2

$$x_1 \neq x_2$$

suppongo  $x_1 < x_2$

$f[x_1, x_2]$  continua

osserva tutti i valori x il 1° teorema

$f[x_1, x_2]$  è  
una  $f$  ristretta  
non è un intervallo

se una  $f$  ristretta prende tutti i valori  
anche quella allargata la fa, e li prende  
tra  $m$  e  $M$



# Teorema della continuità delle f. monotone

IP:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotona

TH:  $f$  continua  $\Leftrightarrow f([a, b]) = [f(a), f(b)]$   
se crescente

DIM:  $\Rightarrow$

\* 1° teorema Jordan  $f([a, b]) = [m, M]$

ma se è crescente  $f(a) = m$   
 $f(b) = M$

$\Leftarrow$

dimostrare che  $[f(a), f(b)]$  è continua

\* ASSURDO non è continua

ipotizziamo che in  $x_0 \in [a, b]$  non è continua

quindi  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

$f(a) \leq \sup_{x \in [a, x_0[} f(x) < \inf_{x \in ]x_0, b]} f(x) \leq f(b)$

~~quindi  $f$  non è continua~~

\*  $]l_1, l_2[ \subseteq [f(a), f(b)]$



$$\forall x_0 = a$$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l = \inf f([a, b])$$

$$]f(a), l[ \subseteq [f(a), f(b)]$$

ASSUADO

Teorema continuità delle  $f$  elementari

Tutte le  $f$  elementari sono continue nel loro insieme di definizione

DERIVA DAL TEOREMA PRECEDENTE

$$\text{ES: } y = e^x$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{in } [a, b] \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{crescente}$$

$$x \mapsto e^x$$

$$f[a, b] = [e^a, e^b] \text{ e il Teorema delle } f \text{ monotone}$$



# TEOREMA CONTINUITÀ DELL'INVERSE

IP:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{Q}$  strett. monotona e continua

TH:  $f^{-1}$  è continua

DIM: indicando che  $f$  è strett. crescente  
 $\Rightarrow f^{-1}$  strett. crescente

$$f^{-1}: f([a, b]) \rightarrow [a, b]$$

teorema  
della continuità  
della  $f$  monotona  
✓

$$[f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

$$\parallel$$
$$[f(a), f(b)] \rightarrow [f^{-1}(f(a)), f^{-1}(f(b))]$$

segue per il teorema della continuità della  $f$  monotona  
 $f^{-1}$  È CONTINUA



# DERIVATE

$$f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in ]a, b[$$

$$\exists \varepsilon > 0 \mid ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[ \subseteq ]a, b[$$

$\uparrow$   
dipende da  $x_0$

mi prendo un  $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$

$$- \varepsilon < \underbrace{x - x_0}_{h} < \varepsilon$$

$$x = x_0 + h$$

mi vedo una  $f_2: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\downarrow$   
rapporto incrementale  
relativo a  $f$  e a  $x_0$

$f$  è derivabile in  $x_0$

$\Leftrightarrow$

$\exists$  ed è finita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$



Teorema

se  $f$  è derivabile in  $x_0 \Rightarrow f$  è continua in  $x_0$   
il viceversa NO

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - h + f(x_0)}{h} \right] =$$

$$f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

TEOREMA SOMMA DERIVATE

$f, g$  derivabili in  $]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$h \neq 0 \rightarrow \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$



## TEOREMA PRODOTTO DERIVATE

$f \cdot g$  derivabile,  $f$  e  $g$  derivabili in  $x$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

per  $h \neq 0$   
suff. piccolo

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$\Downarrow \pm f(x)g(x+h)$$

$$(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x))$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}$$

$$= g(x) f'(x) + f(x) g'(x)$$

## TEOREMA RAPPORTO DERIVATE

$g(x) \neq 0$  sempre  $f$  e  $g$  derivabili in  $x$

$$\frac{f}{g} \text{ derivabile in } x = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$



se  $g(x) \neq 0$  allora  $\forall h \in ]-\delta, \delta[ / g(x+h) \neq 0$ \*

TEOREMA  
PERM. SEGNO  
DELLE CONTINUE

quindi per  $h \in ]-\delta, \delta[ \setminus \{0\}$

$$\frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h)} - \frac{f(x) - f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-g(x+h)f(x) + f(x+h)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{h \cdot g(x+h)g(x)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$$\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$



# TEOREMA DERIVAZIONE E INVERSE

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, str. monotona

$x \in ]a, b[$   $f$  derivabile in  $x$  e  $f'(x) \neq 0$   
 $\Rightarrow f$  derivabile in  $y = f(x)$  e  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

DIM  
 $f$  str. ~~monotona~~  $\Rightarrow f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$

$k \neq 0$   
 suff. piccolo  $\rightarrow \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k}$

$$f^{-1}(y+k) = x+h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{f(x+h) - f(x)} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}$$



# TEOREMA DERIVAZIONE F COMPOSITE

$$f: X \rightarrow Y \quad g: Y \rightarrow \mathbb{R} \quad X, Y \text{ intervallo}$$

$f$  derivabile in  $x \in X$ ,  $g$  derivabile in  $y = f(x)$

$\rightarrow g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $x$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

supponiamo caso particolare

$$\exists \delta > 0 \mid f(x+h) \neq f(x) \quad \forall h \in ]-\delta, \delta[ \setminus \{0\}$$
$$h \in ]-\delta, \delta[ \setminus \{0\} \rightarrow \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \right) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$k = f(x+h) - f(x)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(f(x+k)) - g(f(x))}{k} = g'(f(x))$$



$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \}$$

forma algebrica

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (MODULO)}$$

$$\bar{z} = x - iy \text{ (COMPLESSO CONIUGATO)}$$

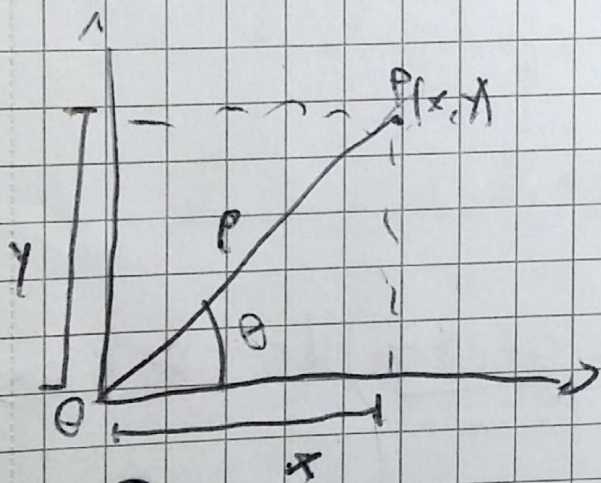
$$\text{COR: } z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

DIM

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|$$

→



l'angolo  $\theta$  che  
rischi il sistema  
è chiamato ARGOMENTO  
PRINCIPALE

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto z = x + iy$$

$(r, \theta)$  COORDINATE POLARI

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \cdot r \\ y = \sin \theta \cdot r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = x/r \\ \sin \theta = y/r \end{cases}$$

$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

FORMA  
TRIGONOMETRICA



## FORMULA DI DE MOIVRE

$$k > 0 \rightarrow z^k = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_k = \rho^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) = \rho^k e^{-ik\theta}$$

## FORMA ESPONENZIALE

$$z = \rho e^{i\theta} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z \cdot z' = \rho \rho' e^{i(\theta + \theta')} \quad \frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$$

## RADICI N-ESIME DI UN COMPLESSO

$w$  radice  $n$ -esima di  $z \Leftrightarrow w^n = z$

in  $\mathbb{R} \Rightarrow$  la radice è unica

in  $\mathbb{C} \Rightarrow$  le radici sono  $n$

~~sono~~

$$w_k = \rho^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad 0 \leq k \leq n-1$$

DIM

$$\text{IP: } w^n = z \\ w, z \in \mathbb{C}$$

$$\text{TH: } w = \rho^{\frac{1}{n}} \dots$$

$$w = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w^n = z \Leftrightarrow (\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \Leftrightarrow$$



$$\Rightarrow z^n = \rho \quad e \quad n\varphi = 2k\pi + \theta \Rightarrow n\varphi - \theta = 2k\pi$$

$$\varphi = \frac{2k\pi + \theta}{n}$$

$$w = \rho^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

DIM

QIP:  $\exists$  radice  $n$ -esima

TH:  $\exists$   $n$  radici  $n$ -esime

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, n-1\} \quad \exists k_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$w_k = w_{k_0} \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} / k - k_0 = nh$$

Sia  $h$  il più grande intero  $\leq \frac{k}{n}$

$$h \leq \frac{k}{n} < h+1 \Leftrightarrow nh \leq k < nh+n \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq k - nh$$

$$\text{quindi } \exists k, k' / w_k = w_{k'} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \in \mathbb{Z} \quad \in \{0, 1, \dots\}$$

$$\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, n-1\}, w_i \neq w_j$$

poiché  $k - k' = nh$  ma  $k \notin \{0, 1, \dots, n-1\}$



# TEOREMA DI FERMAT

IP:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  max/min ul.,  $x_0 \in ]a, b[$ ,  $x_0$  deriv.

$$\text{TH: } f'(x_0) = 0$$

DIM

supp.  $x_0$  max relativo

$$\exists \delta > 0 / f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \cap ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \rightarrow f(x_0) \geq f(x_0 + h)$$

$$-\delta < x - x_0 < \delta$$

"h"

$$\Rightarrow h \in ]-\delta, \delta[ \setminus \{0\} \rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\text{poiché } f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0, D \leq 0 & \text{se } h > 0 \\ \geq 0, D \geq 0 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

$$\text{quindi } \lim_{h \rightarrow 0^+} \text{rap. I.} = f'(x_0) \leq 0 \quad \Rightarrow f'(x_0) = 0$$
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \text{R. I.} = f'(x_0) \geq 0$$



# TEOREMA DI ROLLE

IP:  $f$  continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ ,  
 $f(a) = f(b)$

TH:  $\exists x_0 \in ]a, b[ \mid f'(x_0) = 0$

D.M:

per il teor di Weierstrass

$\exists$  min e max  
 $m = f(x_1) \quad M = f(x_2) \quad x_1, x_2 \in [a, b]$

CASO 1

supp. che  $x_1 \in ]a, b[$

s' hanno tutte le ipotesi per FERMAT

quindi  $f'(x_1) = 0$

CASO 2

supp che  $x_1, x_2 \notin ]a, b[$

allora  $x_1 = a$  o  $b$  e  $x_2 = b$  o  $a$

supp.  $x_1 = a \quad x_2 = b$

$f(a) = f(b) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow m = M$

quindi  $f$  è costante

quindi  $\forall x \in ]a, b[, f'(x) = 0$



# TEOREMA LAGRANGE

IP:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua  $[a, b]$ , derivabile  $]a, b[$   
TH:  $\exists x_0 \in ]a, b[ \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

DIM:

$y = mx + q$  tangente per  $a$  e  $b$

$$\begin{cases} f(a) = ma + q \\ f(b) = mb + q \end{cases}$$

$$f(b) - f(a) = m(b - a)$$

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$q = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \end{aligned}$$



mi occorrono una  $g(x)$  deriv. e continua in  $]a, b[$

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a)$$

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) - f(a) = 0$$

$$g(a) = g(b) = 0$$

si hanno le ipotesi di ROLLE

$$\text{quindi } \exists x_0 \in ]a, b[ / g'(x_0) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



## CRITERIO DI MONOTONIA

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$ , derivabile in  $]a, b[$

$$\begin{array}{l} \text{f crescente} \\ \text{[decrecente]} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} D \geq 0 \\ [D \leq 0] \end{array}$$

" $\Rightarrow$ "

$$x \in ]a, b[, h \in ]-\delta, \delta[ \setminus \{0\} \rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

SE  $h > 0$

$$x+h > x \rightarrow f(x+h) \geq f(x) \rightarrow \text{R.I.} \geq 0$$

SE  $h < 0$

$$x+h < x \rightarrow f(x+h) \leq f(x) \rightarrow \text{con } h < 0 \text{ R.I.} \geq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{R.I.} = f'(x) \geq 0 \quad \text{x permanenza del segno}$$

" $\Leftarrow$ "

$[x_1, x_2]$  estrazione di  $[a, b]$ , continua e derivabile

$$\text{X LAGRANGE } \exists x_0 \in ]x_1, x_2[ \quad / \quad f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'(x_0) \geq 0 \text{ x I.P.}, \quad x_2 > x_1 \quad \text{x COSTRUZIONE}$$

$$\rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \quad \text{ovvero CRESCENTE}$$



## CARATTERIZZAZIONE F COSTANTI IN $]a, b[$

$f$  è costante in  $]a, b[ \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in ]a, b[$

$\Rightarrow$  BANALE (significherebbe fare la derivata di un numero o la tangente di una retta orizzontale)

" $\Leftarrow$ "

se  $f'(x) = 0$  allora  $f(x)$  è crescente ma anche decrescente

$$\begin{cases} f(x) \leq f(a) \\ f(x) \geq f(a) \end{cases} \rightarrow f(x) = f(a) \text{ costante}$$

## CRITERIO STRETTA MONOTONIA

$f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua, derivabile in  $]a, b[$

$f$  strett. crescente  $\Leftrightarrow 1) f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$

2)  $\emptyset \neq \{x \in ]a, b[ / f'(x) = 0\}$   
non deve contenere intervalli

" $\Rightarrow$ " 1) se  $f$  è strett. crescente, è anche crescente, quindi  $f'(x) \geq 0$

2) Per assurdo  $\exists [x_1, x_2] \subset \{x \in ]a, b[ / f'(x) = 0\}$

in  $[x_1, x_2]$  quindi  $f$  è costante, ASSURDO con l'ipotesi



- 1) dato che  $f'(x) \geq 0$ ,  $f$  è strettamente crescente
- 2) se non è strettamente crescente,  $\exists x_1, x_2 \in ]a, b[$   
 con  $x_1 < x_2$  e  $f(x_1) = f(x_2)$

dato che  $f$  è crescente

c'è una  $x$  /  ~~$x_1 < x < x_2$~~   $x_1 < x < x_2$

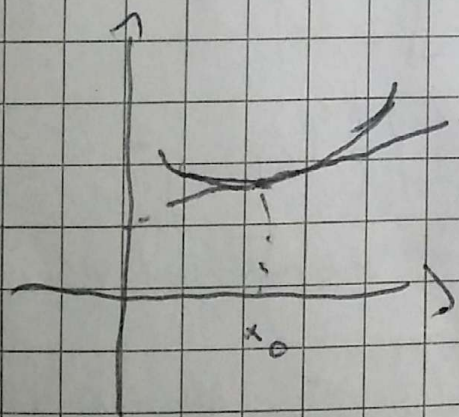
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

ma  $f(x_1) = f(x_2)$

quindi  $\exists$  un intervallo  $[x_1, x_2]$  dove  $f$  è costante

ma  $\{x \in ]a, b[ / f'(x) = 0\}$  non deve essere intervallo  
 quindi ASSURDO

DEF. di CONVESSITÀ



$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ogni punto della  $f$  è  $\geq$   
 di ogni punto della tangente



## CRITERIO DI CONVESSITÀ

$f$  derivabile in  $[a, b]$ ,  $f'$  continua,  $f'$  derivabile in  $]a, b[$

- 1)  $f'$  continua in  $[a, b]$
- 2)  $f'$  crescente in  $[a, b]$
- 3)  $f''(x) \geq 0$  in  $]a, b[$

$$\frac{1-2}{1} \Rightarrow 1$$

$$IP: f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$$TH: f'(x_1) \leq f'(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \text{ con } x_1 < x_2$$

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) \\ f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x-x_2)$$

come  $x$  generico prendo  $x_2$  e  $x_1$

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1)$$

$$f(x_2) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1-x_2)$$

sottraendo:

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f(x_1) - f(x_2) + (x_2-x_1)(f'(x_1)-f'(x_2))$$

$$(f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1) \leq 0$$

poiché  $x_2 > x_1$ ,  $(x_2 - x_1) > 0$ , quindi  $f'(x_1) - f'(x_2) \leq 0$

$f'(x_1) \leq f'(x_2)$   $f'$  crescente



• caso  $x < x_0$  BANALE

• caso  $x \neq x_0$

ad esempio  $x > x_0$

quindi  $f$  su  $[x_0, x]$  e  $f$  su  $[x_0, x]$

per LAGRANGE  $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_1)$

$$x_1 \in ]x_0, x[$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$$

poiché  $f$  è crescente,  $f'(x_1) \geq f'(x_0)$

$$f'(x_1)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x < x_0$$

per LAGRANGE  $\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(x_1)$

$$f(x_0) - f(x) = f'(x_1)(x_0 - x) \leq f'(x_0)(x_0 - x)$$

$$f(x) \geq f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x) =$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2.5.2)  $\times$  MONOTONIA



Teorema sufficiente per  $f$  di max e min

•  $f$  derivabile 2 volte in  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset [a, b]$

•  $f'(x_0) = 0$  •  $f''(x_0) < 0$

allora  $x_0 = \max$  relativo

DIM. Se esiste un intervallo  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  dove la derivata seconda è negativa,  $f$  è concava verso il basso

$$\rightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{poiché } f'(x_0) = 0 \rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

$$\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

ovvero  $x_0 = \max$

## LEMMA R INTEGRALI

$$\lambda(P) \leq S(Q)$$

•  $\exists$  una Partizione  $P$  di  $[a, b]$  tale che  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$$\lambda(P) = \text{base} \times \text{altezza} = \inf_{k=1, \dots, n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

DIM.

•  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata  $P, Q$  partizioni

$$R = P \cup Q$$

$$\lambda(P) \leq \lambda(R) \text{ poiché } R \text{ ha gli stessi punti di } P \text{ o di più}$$



supponiamo che  $R \setminus P = \{\bar{x}\}$   $\bar{x} \in ]x_{k-1}, x_k[$

$$\Delta(R) - \Delta(P) =$$

$$\inf f_{[x_{k-1}, \bar{x}]}(\bar{x} - x_{k-1}) + \inf f_{[\bar{x}, x_k]}(x_k - \bar{x}) - m_k(x_k - x_{k-1})$$

$$\geq m_k \left( \bar{x} - x_{k-1} + x_k - \bar{x} + x_{k-1} - x_k \right) = 0$$

$$\Delta(R) - \Delta(P) \geq 0$$

$$\Delta(R) \geq \Delta(P)$$

$$\Delta(P) \leq \Delta(R) \leq S(R) \leq S(Q)$$

diventa  $\leq m_k \dots$

## INTEGRALI SECONDO RIEHMAN

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata

con  $A = \{ \Delta(P) / P \text{ partizione di } [a, b] \}$

e  $B = \{ S(P) / P \text{ partizione di } [a, b] \}$

$A$  e  $B$  separati perché  $S(P) \leq S(P) < \text{LEMMA}$

quindi  $\sup A \leq \inf B$

$f$  integrabile  $(\Leftrightarrow) \sup A = \inf B = \int_a^b f(x) dx$



# TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE

DEF. DI PRIMITIVA

$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  intervallo e non finita

$F: A \rightarrow \mathbb{R}$  primitiva  $\Leftrightarrow F$  derivabile con  $F' = f$

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\Leftrightarrow \exists F$  primitiva di  $f$   
e integrabile

DIM.

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

$$h \neq 0 \rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t) dt$$

$$\rightarrow \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) / h =$$

$$\left( \int_x^{x+h} f(t) dt + \int_a^x f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) / h =$$

$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

c'1



$$\int_{x-h}^{x+h} f(t) dt = \frac{f(x_0)(x+h-x)}{h} = f(x_0) \quad \text{se } h > 0$$

$$\int_{x+h}^x f(t) dt = -\frac{f(x_0)(x-x-h)}{h} = f(x_0) \quad \text{se } h < 0$$

## INTEGRAZIONI PER PARTI

$$f, g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$f, g$  derivabili

$f', g'$  continue

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

Dim:

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x)$$

e quindi ~~per~~



# 1° TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

(La somma delle aree dei rettangoli in cui è definito  $f$  come l'area di un preciso rettangolo)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e integrabile

$$m = \inf \quad M = \sup$$

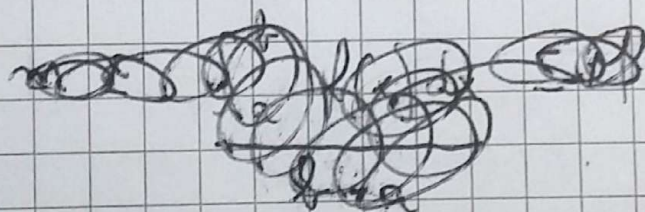
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

DIM.

X DEF. di INTEGRALE

$$m(b-a) \leq \Delta(P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(P) \leq M(b-a)$$

# 2° TEOREMA DELLA MEDIA



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  continua

$$\exists x_0 \in [a, b] / f(x_0)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

DIM.

X WEIERSTRASS

$f$  ha minimo  $= m$  e massimo  $= M$



x 1° TEOREMA

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$

x 2° TEOREMA dei VALORI INTERMEDI:

f assume ogni valore tra m e M

$$\rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b-a)$$



# TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO E CONTINUE

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad f \text{ continua}$$

$$x_0 \in [a, b] \quad f(x_0) > 0$$

$$\exists [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b] / f(x) > 0 \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

DIN.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$$

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

$$\rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Intervall}_0$$



# SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

"DIM."

$$A_n = \sum_{k=1}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 & \text{converge} \Rightarrow \frac{1}{1-x} \\ x > 1 & \text{diverge} \end{cases}$$

per  $x \leq -1$  e' indeterminata

# SERIE ARMONICA

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

"DIM."

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad n \geq k \quad \text{allora} \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \int_k^{k+1} dx = \frac{1}{k}$$



quindi

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$$

$$H_n \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1)$$

$$+\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log(n+1) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$$

quindi anche la serie diverge

## SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \leq x \leq k+1 \quad \text{allora} \quad \frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{k^p}$$

$$\text{e anche} \quad \frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{k^p}$$

passando agli integrali e alle somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = S_n$$



$$A_{n+1} - 1 \leq \int \frac{dx}{x^p} \leq A_n$$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx = \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

se  $p < 1$  sappiamo che

$$A_n \geq \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} = +\infty$$

quindi diverge

se  $p > 1$

$$A_{n+1} \leq 1 + \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} \quad \text{e} \quad \text{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} = 0 \quad \text{e} \quad \text{converge}$$



# CRITERIO DELLA RADICE

data  $a_n$ , supponiamo esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

se  $l < 1$  converge, se  $l > 1$  diverge  
D.M.

## CASO $l < 1$

poiché  $l < 1$ ,  $\exists \epsilon > 0$  /  $l + \epsilon < 1$   
per def. di limite

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \epsilon$$

$$l - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon$$

$$\text{quindi } a_n < (l + \epsilon)^n$$

~~osserva~~  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \sum_{n=1}^{\infty} (l + \epsilon)^n$

$l + \epsilon < 1$ , quindi per le regole della serie geometrica  
CONVERGE

e CONVERGE anche  $a_n$

## CASO $l > 1$

se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n > 1$



Fine a cadere la condizione necessaria  
per le serie ( $\lim a_n = 0$ ) quindi diverge

## CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

Supponiamo che con  $p \in \mathbb{R}$  esista

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = l$$

1) se  $l \neq \infty$  e  $p > 1 \rightarrow$  converge

2) se  $l \neq 0$  e  $p \leq 1 \rightarrow$  diverge

DIM.

1) per def. di limite

$$l - \varepsilon < n^p a_n < l + \varepsilon$$

poniamo  $\varepsilon = 1$

$$a_n < \frac{l+1}{n^p}$$

quindi  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n < \sum \frac{l+1}{n^p}$

poiché  $\sum \frac{l+1}{n^p}$  è una serie generalizzata

e  $p > 1 \rightarrow$  converge

e per confronto converge anche  $a_n$



2) si pone  $\varepsilon = 1/2$

quindi  $n^p a_n > 1/2$

e si procede analogamente



# CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE

$F(x), G(x)$  primitive di  $f(x)$

allora  $F(x) = G(x) + C$

DIM.

poniamo  $H(x) = F(x) - G(x)$

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

~~QED~~

× LAGRANGE  $\exists x_0 \in [a, x]$  ( ~~$\forall x \in [a, b]$~~ )

$$/ \quad H'(x_0) = \frac{H(x) - H(a)}{x - a}$$

$$H(x) - H(a) = H'(x_0)(x - a) = 0$$

$$H(x) = H(a) = C$$

quindi  $F(x) - G(x) = C \rightarrow F(x) = G(x) + C$



# INTEGRABILITÀ DELLE F CONTINUE

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\rightarrow f$  integrabile  
in  $[a, b]$

DIM.

X CANTOR  $f$  è uniformemente continua

ovvero  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{b-a}$

$\forall x, x_0 \in [a, b] / |x - x_0| < \delta$

Data una Partizione  $[x_0, x_1, \dots, x_n]$  con  $a = x_0$   
tale che  $|x_k - x_{k-1}| < \delta$   $b = x_n$

$$m_k = \inf [f(x) / x \in [x_{k-1}, x_k]]$$

$$M_k = \sup [f(x) / x \in [x_{k-1}, x_k]]$$

quindi  $M_k - m_k < \frac{\epsilon}{b-a}$

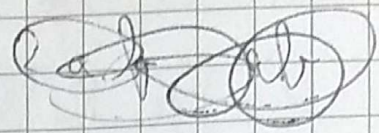
$$S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1}) <$$

$$\frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \epsilon$$

perciò  $S(P) - s(P) < \epsilon$   
 $f$  integrabile

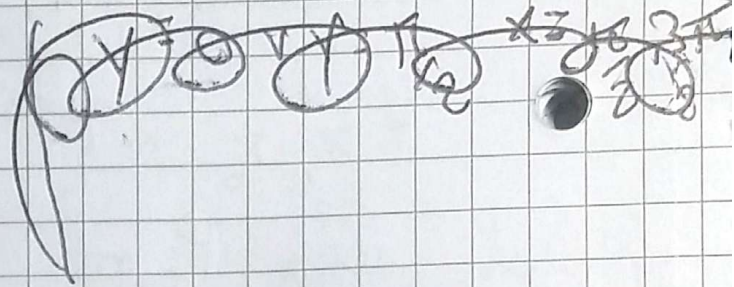


$$f(x, y) = -\sin x \sin 2y$$



$$D^2 f = \begin{cases} f_x = -\cos x \sin 2y \\ f_y = -2 \sin x \cos 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2y = 0 & \cos x = 0 \\ \sin x = 0 & \cos 2y = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin 2y = 0 \\ \cos 2y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin 2y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \vee$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2y = 0 \end{cases} = \begin{cases} y = 0 \vee y = \pi/2 \\ x = 0 \vee x = \pi \end{cases} \vee$$

A

$$\begin{cases} x = \pi/2 \vee x = 3\pi/2 \\ x = \pi/4 \vee x = 3\pi/4 \end{cases}$$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \sin x \sin 2y & -2 \cos x \cos 2y \\ -2 \cos x \cos 2y & \sin x \sin 2y \end{pmatrix}$$



# DERIVABILITÀ

## • DERIVATA PARZIALE

• Caso 2 variabili:

Dato  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$   
derivata parziale rispetto a  $x$  nel punto  $(x, y)$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

• Caso  $n$  variabili:

Dato  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

derivata parziale rispetto a  $x_i$  nel punto  $X$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X + h e_i) - f(X)}{h}$$

•  $f$  derivabile  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists$  tutte le derivate parziali in  $X$

$f$  derivabile  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$  derivabile  $\forall X \in A$

GRADIENTE vettore con derivate parziali come componenti

•  $f$  ammette gradiente  $\Leftrightarrow f$  è derivabile in  $X$



# DIFFERENZIABILITÀ

$f$  differenziabile in  $(x, y) \in A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^n$ )

se 1)  $f$  derivabile in  $(x, y)$ , cioè esistono le derivate parziali

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - (Df(x), h)}{\|h\|} = 0$$

il vettore di  $\mathbb{R}^n$

caso 2 variabili:

$$2) \lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f'_x(x, y)h - f'_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

si può scrivere anche

$$f(x+h) - f(x) = (Df(x), h) + o(|h|)$$

dove  $o$  indica una funzione che

$$g_1(h) = o(g_2(h))$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} g_2(h) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_1(h)}{g_2(h)} = 0$$

## DERIVATA DIREZIONALE

Fissato un vettore  $\lambda = (\alpha, \beta)$

$$|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

la derivata direzionale di  $f$  in  $(x, y)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = (Df, \lambda)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = f'_x \cdot \alpha + f'_y \cdot \beta$$



# TEOREMA DI SCHWARZ

Sia  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile 2 volte

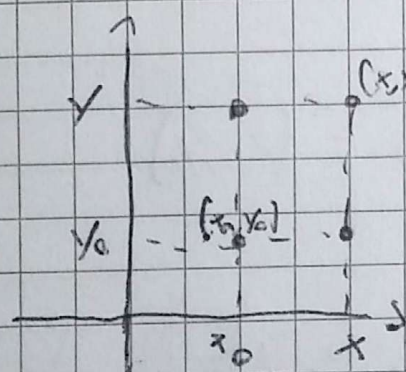
● Se  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  continue nel punto  $x_0$

$$\text{allora } f_{xy}(x_0) = f_{yx}(x_0)$$

DIM.

$$\text{caso } n=2 \rightarrow x_0 = (x_0, y_0)$$

● Sia  $(x, y)$  punto generico di  $A$  con  $x \neq x_0, y \neq y_0$



Definiamo le seguenti funzioni  
ad 1 VARIABLE

$$F(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$$

$$G(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$$

$$F(x) - F(x_0) \stackrel{\text{xLAG.}}{=} F'(x_1)(x - x_0)$$

$$F(x_1) = f(x_1, y) - f(x_1, y_0) \text{ quindi}$$

$$F'(x_1) = f_{x_0}(x_1, y) - f_{yx}(x_1, y_0)$$

$$\rightarrow F(x) - F(x_0) = [f_{x_0}(x_1, y) - f_{yx}(x_1, y_0)](x - x_0) \stackrel{\text{xLAG.}}{=}$$

$$f_{xy}(x_2, y_2)(y - y_0)(x - x_0)$$

$$\text{analogamente per } G(y) - G(y_0) = f_{yx}(x_2, y_2)(y - y_0)(x - x_0)$$



$$\text{ma } F(x) - F(x_0) = f(x, y) - f(x, y_0) - [f(x_0, y) - f(x_0, y_0)] =$$

$$= f(x, y) - f(x_0, y) - [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)] = A(y) - G(y_0)$$

$$\text{quindi } f_{xy}(x_1, y_1)(x-x_0)(y-y_0) = f_{yx}(x_2, y_2)(y-y_0)(x-x_0)$$

$$\text{ovvero, quando } x \neq x_0 \text{ e } y \neq y_0 \quad f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2)$$

I punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  sono interni al  
tettando

$$\text{quindi } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_{xy}(x_1, y_1) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_{yx}(x_2, y_2) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

$$\text{per continuit  } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_{xy}(x_1, y_1) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

$$\text{!!}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_{yx}(x_2, y_2) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

$$\text{ovvero } f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

\* caso in cui non vale

funzioni con derivate seconde parziali non continue



# TEOREMA DEL DIFFERENZIALE

Sia  $f$  derivabile in  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$

- Se  $f_x$  e  $f_y$  ~~sono~~ continue in  $(x,y) \in A$  allora  $f$  differenziabile in  $(x,y)$

DIM.

consideriamo  $f(x+h, y+k) - f(x, y) =$

$$= \underbrace{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}_{\text{part 1}} + \underbrace{f(x, y+k) - f(x, y)}_{\text{part 2}}$$

Utilizzando LAGRANGE,  $\exists \xi_1 \in ]x, x+h[$   
 $\xi_2 \in ]y, y+k[$

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = f_x(\xi_1, y+k)h + f_y(x, \xi_2)k$$

consideriamo il rapporto per la differenziabilità

$$\left| \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{f_x(\xi_1, y+k)h - f_x(x, y)h + f_y(x, \xi_2)k - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right|$$

$$\leq |f_x(\xi_1, y+k) - f_x(x, y)| \cdot \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |f_y(x, \xi_2) - f_y(x, y)| \cdot \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$



$$\leq |f_x(x_2, y_2) - f_x(x, y)| + |f_y(x_2, y_2) - f_y(x, y)|$$

Per  $(h, k) \rightarrow 0$ ,  $x_2 \rightarrow x$  e  $y_2 \rightarrow y$   
quindi  $(x_2, y_2) \rightarrow (x, y)$

Per continuità nel punto  $(x, y)$  di  $f_x$  e  $f_y$

$$\lim_{(h, k) \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

## TEOREMA DERIVAZIONE DI COMPOSITE

Se  $x(t)$  e  $y(t)$  derivabili in  $t \in I$  intervallo  
e  $f(x, y)$  differenziabili in  $(x(t), y(t)) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$   
allora  $F(t) = f(x(t), y(t))$    derivabile e

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

DIM.

Scriviamo il differenziale in un punto generico  $(x_2, y_2)$

$$f(x_2, y_2) = f(x, y) + f_x(x, y)(x_2 - x) + f_y(x, y)(y_2 - y) + o(\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2})$$

tal  che  $(x_2, y_2) = (x(t+h), y(t+h))$  e  $(x, y) = (x(t), y(t))$   
con  $t+h \in I$ , quindi  $h$  piccolo



$$f(x_1, y_1) - f(x, y) = f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t)) =$$

$$\bullet \quad f_x(x(t), y(t)) [x(t+h) - x(t)] + f_y(x(t), y(t)) [y(t+h) - y(t)] + o\left(\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2}\right)$$

quindi  $F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$

$$\bullet \quad f_x(x(t), y(t)) \lim_{h \rightarrow 0} [x(t+h) - x(t)] + f_y(x(t), y(t)) \lim_{h \rightarrow 0} [y(t+h) - y(t)] =$$

$$f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t) = F'(t)$$

per def. di o ricado

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o\left(\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2}\right)}{h} = 0$$

~~per def. di o ricado~~

~~lim\_{h \rightarrow 0} \frac{o(\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2})}{h} = 0~~



## CONDIZIONE NECESSARIA (I°)

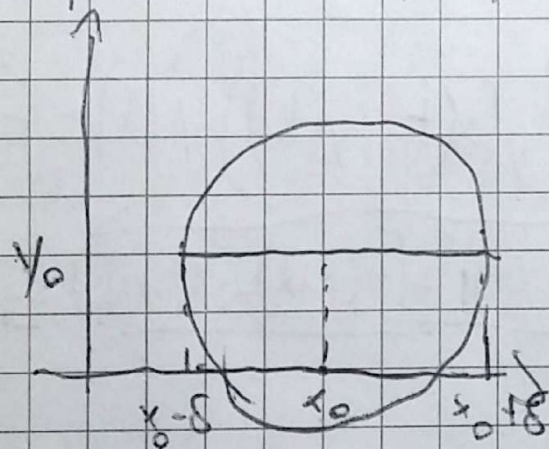
Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $(x_0, y_0)$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$   
con  $(x_0, y_0)$  max/min relativo  $\in A$   
allora  $Df(x_0, y_0) = 0$

DIM.

Se  $(x_0, y_0)$  è, per esempio, max relativo  
allora  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$

prendendo un intorno circolare  $I_\delta(x_0, y_0)$  con  $\delta > 0$

fixando  $y = y_0$



$$\text{se } F(x) = f(x, y_0)$$

vediamo che  $F(x_0) \geq F(x)$

quindi è max anche per  $F$

con  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$0 = F'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$$

quindi  $f_x = 0$ , analogamente  $f_y = 0$ , quindi

$$Df = 0$$



CONDIZIONE SUFFICIENTE [c'è il REPRISÉ]

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R}^2, \quad f \in C^2 \quad (x_0, y_0) \in A$$

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta f(x_0, y_0) = 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \\ Hf(x_0, y_0) > 0 \end{cases}$$

allora  $(x_0, y_0)$  ~~min~~ <sup>min</sup> rel in  $A$

$$(2) \quad \begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \end{cases}$$

allora  $(x_0, y_0)$  max rel in  $A$

$$(3) \quad \begin{cases} Hf(x_0, y_0) < 0 \end{cases} \text{ allora } (x_0, y_0) \text{ sella}$$

Dim. (inter min)

tenendo presente  $F(t) = f(x_0 + t h, y_0 + t k), \quad x_0 + t h = x$   
 $y_0 + t k = y$

$$F'(t) = f_x(x_0, y_0) h + f_y(x_0, y_0) k$$

$$F''(t) = f_{xx}(x_0, y_0) h^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) h k + f_{yy}(x_0, y_0) k^2$$

$$t = 0$$

$$\varphi(t) = F''(0) = f_{xx}(x_0, y_0) h^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) h k + f_{yy}(x_0, y_0) k^2$$



$$\frac{\Delta}{4} [\varphi(t)] = f_{xy}^2(x_0, y_0) - f_{xx} \cdot f_{yy}$$

Per ipotesi  $Hf(x_0, y_0) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

quindi  $\frac{\Delta}{4} < 0$ , essendo  $f_{xx} > 0$  per ipotesi

$$\text{allora } \varphi(t) > 0$$

$\varphi(t)$  è una funzione a due variabili,  $h$  e  $k$

$$\varphi(t) = g(h, k)$$

continua (per ip.  $f \in C^2$ ) e positiva in

$$D = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 / h^2 + k^2 = 1\}$$

Per Weierstrass,  $g$  ammette minimo

$$g(h, k) \geq m$$

normalizzando il vettore  $(h, k)$

$$g\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) \leq m \quad \left[ \begin{array}{l} \text{non perde il vettore} \\ \text{normalizzato ha modulo 1} \\ \text{e quindi } \in D \end{array} \right]$$

ovvero

$$f_{xx}(x_0, y_0) h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) h k + f_{yy}(x_0, y_0) k^2 \leq m(h^2 + k^2)$$



Utilizzando Taylor con Peano

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$$

$$\frac{1}{2} \left[ f_{xx}(x_0, y_0) h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) h k + f_{yy}(x_0, y_0) k^2 \right] + o(h^2 + k^2)$$

$$\geq \frac{m}{2} (h^2 + k^2) + o(h^2 + k^2) =$$

$$(h^2 + k^2) \left[ \frac{m}{2} + \frac{o(h^2 + k^2)}{h^2 + k^2} \right]$$

poiché  $\frac{o(h^2 + k^2)}{h^2 + k^2} \rightarrow 0$

$$f(x_0+h, y_0+k) \geq f(x_0, y_0) \left[ \frac{m}{2} (h^2 + k^2) \right]$$

ovvero  $(x_0, y_0)$  min. rel.

FORMULA DI TAYLOR CON PEANO

Sia  $f \in C^2$  e  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x \in A$

per  $h \rightarrow 0$

$$f(x+h) = f(x) + (Df(x), h) + \frac{1}{2} (D^2 f(x) \cdot h, h) + o(|h|^2)$$



# TEOREMA CONTINUITÀ DEL LIMITE

Sia  $f_k: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  successione di funzioni  
continue convergenti  
uniformemente in  $I$  verso  $f$

Allora  $f$  continua

DIM.

Per convergenza uniforme  
 $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \nu_\varepsilon > 0 / |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k > \nu_\varepsilon, \forall x \in I$$

Fissando  $K_0 > \nu_\varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{K_0}(x)| + |f_{K_0}(x) - f_{K_0}(x_0)| + |f_{K_0}(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq \varepsilon + |f_{K_0}(x) - f_{K_0}(x_0)| + \varepsilon$$

Per continuità di  $f_{K_0}$   $\exists \delta > 0 /$   
 $x \in I$

$$|x - x_0| < \delta \rightarrow |f_{K_0}(x) - f_{K_0}(x_0)| < \varepsilon$$

$$\text{quindi } |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$



# TEOREMA DI PASSAGGIO SOTTO INTEGRALE

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_a^b f_K(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

con  $f_K$  succ. di  $f$  continue  
convergenti uniformemente ad  $f$  in  $[a, b]$

DIM.

## X TEOREMA DI CONTINUITÀ DEL LIMITE

$f_1$  continua, quindi integrabile (sempre in  $[a, b]$ )

$$\left| \int_a^b f_K(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| =$$

$$\left| \int_a^b (f_K(x) - f(x)) dx \right| \leq$$

$$\int_a^b |f_K(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f_K(x) - f(x)|$$

"  $\varepsilon$



Sia  $I \subseteq R$  e  $f_k: I \rightarrow R$

PUNTUALMENTE  $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x)$

[illegible]

•  $f_k$  converge

$$|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$$

le serie convergono  
UNIFORMEMENTE / PUNTUALMENTE  
e convergono con  
le loro parti parziali

UNIFORMEMENTE

$x, V_\varepsilon$  è indipendente da  $z$

- UNIFORME  $\rightarrow$  PUNTUALE perché se  $\exists V \in \text{valida}$  allora si può porre  $V_0 = V$

- $\sum f_k(x)$  converge TOTALMENTE  $\langle Z \rangle$

$\exists M_k$  successione di reali non negativi /

$$|f_k(x)| \leq M_k \quad \text{e } M_k \text{ convergente}$$

• Una serie converge se converge il limite della <sup>successione</sup> ~~serie~~ di somme parziali.

- CONVERGENZA TOTALE ED UNIFORME

DIM.

Sia  $\sum f_k$  serie di funzioni TCT. convergenti in  $I \subseteq \mathbb{R}$  verso  $l$

e sia  $M_k$  numero costante convergente  $|f_k(x)| \leq M_k$

quindi  $\sum |f_k(z)|$  è convergente

Indicando con  $R_n$  il resto  $n$ -esimo della serie

$$R_n = \sum_{k=1}^n M_k$$



$$|f(x) - S_n(x)| \leq R_n$$

per prendere  $m > n$

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k \text{ e quindi vale per } m \rightarrow +\infty$$

perché  $M_k$  converge

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$$

ovvero  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon / R_n < \varepsilon$

ma  $|f(x) - S_n(x)| \leq R_n < \varepsilon$  quindi  
UNIFORME

SERIE ~~DI POTENZE~~ DI POTENZE

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

converge per  $x=0$  o per  $p=0$

per  $\forall x \in \mathbb{R}$  o per  $p \geq \infty$

ma con  
tale

ovvero  $\exists p \in \mathbb{R}_+ > 0$  / converge per  $|x| \leq p$

e non converge per  $|x| > p$

$p = 1/l$  il risultato limite

SERIE DI FOURIER

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ovvero  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$



## TEOREMA CONV. PUNTUALE DI FOURIER

Sia  $f$  periodica  $2\pi$ , regolare a tratti su  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{serie di Fourier} \rightarrow \frac{1}{2} [f(x_+) + f(x_-)]$$

converge alla media tra limite destro e sinistro di  $f(x)$

~~nei punti~~ nei punti  $x$  dove  $f$  è continua

~~TEOREMA DI ERLANG~~

## TEOREMA del WRONSKIANO

$u_1(x), \dots, u_n(x)$  soluzioni di  $Lu=0$

$u_1, \dots, u_n$  dipendenti  $\Leftrightarrow \exists x_0 \in (a, b) / W(x_0) = 0$

DIM.

$$\text{Sia } W(x_0) = 0$$

$$\text{allora } u_1(x_0) \gamma_1 + \dots + u_n(x_0) \gamma_n = 0$$

$$u_1^{(n-1)}(x_0) \gamma_1 + \dots + u_n^{(n-1)}(x_0) \gamma_n = 0$$

ammette soluzioni  $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$

$$\text{chiamiamo } v(x) = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$$
$$\forall x \in (a, b)$$



$v(x_0)$  risolve il seguente (P)

● (P)  $\rightarrow \begin{cases} L(v(x)) = 0 \\ v(x_0) = 0 \\ v'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$   $\leftarrow$  ~~non è una soluzione~~ ~~non è una soluzione~~

● (P) ammette una sola soluzione  
ovvero  $v(x) = 0$

e quindi  $u_1, \dots, u_n$  dipendenti

CONDIZIONE SUFFICIENTE MAX/MIN. Teorema

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$   $f \in C^2$  e Sia  $x_0 \in A$  /  $Df(x_0) = 0$   
e  $D^2 f(x_0) > 0$  allora  $x_0$  min. relativo  
D/M.

● Formula di Taylor con Perno

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} (D^2 f(x_0) \cdot h, h) + o(|h|^2)$$

essendo  $Df = 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} (D^2 f(x_0) \cdot h, h) + o(|h|^2) \geq 0$$

$\uparrow$  positivo  
x ipotesi  $\uparrow$  positivo  
x definit.

$$\rightarrow f(x_0 + h) \geq f(x_0)$$



## SERIE DI TAYLOR

Sia  $f(x) \in C^n$  in ~~l'intervallo~~  $I$  intervallo

sia  $x_0 \in I$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$
 è la serie di Taylor

se la serie converge a  $f(x)$  allora  $f(x)$  si dice  
SVILUPPABILE in serie di Taylor

infatti la condizione necessaria e sufficiente affinché  
 $f$  sia sviluppabile è

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0 \quad \text{con} \quad R_n = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

utilizzando  $R_n$  come resto di Lagrange

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$$\text{quindi } |R_n| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \leq M L^n$$



# PROBLEMA DI CAUCHY

data  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $t \mapsto y(t)$

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

$$(P) = \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

AMMETTE SOLUZIONI SE

- $f$  continua (con dominio  $I \times S$  con  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ )

- $f$  Lipschitziana per  $y$

$$(\text{ovvero } |f(t, y) - f(t, z)| < K |y - z|)$$

con  $K \in \mathbb{R}, K > 0$

Più in specifico, per sapere se (P) ammette soluzioni e se la soluzione è unica, interviene questo Teorema

## TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE

- Sia  $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

continua e Lipschitziana come detto

$\forall x_0 \in [a, b]$  e  $y_0 \in \mathbb{R} \exists ! y = y(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R} /$   
differenziabile

$$(P) = \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



D.M.

① è uguale anche a  $y(x) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt + y_0$

~~scribble~~

× WEIERSTRASS esiste il massimo di  $f$  (chiamando  $M$ )

$$\text{quindi } |y_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq M |x - x_0|$$

Procedendo...

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1) - f(t, y_0) dt \right| \leq \\ &= \int_{x_0}^x |f(t, y_1) - f(t, y_0)| dt \leq \int_{x_0}^x L |y_1 - y_0| dt \end{aligned}$$

× LIPSCHITZIANITÀ

$$\leq M L \int_{x_0}^x |t - x_0| dt = M L \frac{(x - x_0)^2}{2}$$

$$\text{In generale, } |y_{k+1} - y_k| \leq \frac{M L^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}$$

$$\text{a maggior ragione } |y_{k+1} - y_k| \leq \frac{M L^k}{(k+1)!} |b - a|^{k+1}$$

poiché  $\sum_k \frac{M L^k}{(k+1)!} |b - a|^{k+1}$  è una serie numerica convergente

allora anche  $\sum_k (y_{k+1} - y_k)$  converge (TOTALMENTE)



Se si considera la Trasformazione

$$T: y(x) \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

in modo che una funzione  $\bar{y}(x)$  sarà soluzione di (P) solo se  $T(\bar{y}(x)) = \bar{y}(x)$

Ci concentriamo la successione  $y_n(x)$  /

$$y_n(x) = T(y_n(x)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

e sappiamo già che  $y_n$  converge uniformemente  
Chiamiamo  $y(x)$  il limite uniforme di  $y_n$

•  $y(x)$  è continua perché limite di successioni di funzioni continue (e contrazione)

•  $y_0(x_0) = y_0$  poiché  $y_n(x_0) = y_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x, y_n(x)) = f(x, y(x))$$

poiché, per LIPSCHUTZIANITÀ,  $|f(x, y_n) - f(x, y)| \leq L |y_n - y|$

quindi, si

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

per  $n \rightarrow +\infty$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = T(y)$$



dimostriamo l'UNICITÀ

ASSUNDO  $\exists \varphi(x)$  soluzione di (P)

quindi

$$1) |\varphi(x) - y_1(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t)) - f(t, y_0)| dt \leq \int_{x_0}^x L |\varphi(t) - y_0| dt \leq kL |x - x_0|$$

$$2) |\varphi(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x L |\varphi(t) - y_1(t)| dt \leq \int_{x_0}^x L^2 K |t - x_0| dt \leq L^2 K \frac{|x - x_0|^2}{2}$$

e, come fatto precedentemente

$$|\varphi(x) - y_n| \leq L^n K \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq L^n K \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

sapendo che  $\sum L^n K \frac{|x - x_0|^n}{n!}$

è convergente e la successione è infinitesimale

allora 
$$y(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \varphi(x)$$



## TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE

sia  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  in continua,

• e Lipschitziana rispetto a  $y$

$\forall P_0(x_0, y_0) / x_0 \in [a, b] \text{ e } y_0 \in [c, d]$

$\exists!$  soluzione di (P) definita ~~da~~ e derivabile in  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

DIM.

• Sia  $\varphi$  il prolungamento di  $f$  su  $[a, b] \times \mathbb{R}$

quindi  $(P_1) = \begin{cases} y' = \varphi(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  ammette soluzione unica per TEOREMA GLOBALE

essendo  $\varphi$  continua in  $[a, b] \times \mathbb{R}$  e  $y(x_0) = y_0 \in ]c, d[$

$\exists$  un intervallo contenente  $x_0 / c \leq y(x) \leq d$

chiamiamo questo intervallo  $S$

• se prendiamo la restrizione di  $(P_1)$  a  $S$  (sia  $y_1$ )

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_0 \\ y_1' = \varphi(x, y_1) = f(x, y_1) \end{cases}$$

quindi  $y_1$  soluzione di (P)



## METODO ~~VARIABILI~~ VARIABILI SEPARABILI

- $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$\rightarrow \frac{y'}{g(y)} = f(x) \quad \Rightarrow \int \frac{y'}{g(y)} dx = \int f(x) dx$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

- $y' = g(ax + by)$

sia  $z = ax + by$ , quindi  $z' = a + by' = a + b g(z)$

quindi  $a + b g(z) = \cancel{a + b g(z)} z'$



DIM. SOTTOGRUPPO  $\rightarrow xy^{-1} \in G$  con  $x, y \in$  sottogruppo e sottogruppo  $\neq \emptyset$   
 $\langle x \rangle$  in  $(G, +) = n \cdot x$  ; in  $(G, \cdot) = x^n$

DIM. SOTTOANELLO  $\rightarrow b = a \in S, ab \in S, ba \in S$

DIM. IDEALE  $\rightarrow b = 0 \in I, a, b \in I$  ;  $ab \in I$  con  $a \in I, b \in A$

DIM. BEN POSTA  $\rightarrow a = x \rightarrow f(a) = f(x)$

DIM. OMOMORF.  $\rightarrow f(a) + f(b) = f(a+b)$  ;  $f(a)f(b) = f(ab)$

DIM. NORMALE  $\rightarrow xHx^{-1}$  oppure  $xH = Hx$

caratteristica in  $Z_m \times Z_n = m.c.m.(m, n)$

ordine in  $Z_m \times Z_n = m \cdot n$

divisori dello zero in  $Z_m \times Z_n =$  SEMPRE, almeno  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$

MOSTRARE SEMPRE CONTROESEMPIO

DIM. SOTTOSPAZIO  $v_1 + v_2 \in S$   $kv_1 \in S$   $0 \in S$

DIM. OMO TRA SPAZI  $f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$   
 $f(kv_1) = k f(v_1)$

SOTTOANELLO FOND.  $= \langle 1 \rangle = \{ m \cdot 1_A / m \in \mathbb{Z} \}$

~~GRUPPO~~ GRUPPO QUOZIENTE  $G/H = \{ H, xH, yH, \dots \}$   
 $\Rightarrow x \cdot y (o xy^{-1}) \in G$

• in  $Z_m \times Z_n$  è sempre commutativo e unitario poiché prodotto tra 2 anelli commutativi e unitari  
• se dimostro che è ideale, allora è pure sottoanello

gruppi matriciali  
e anelli