

Корпоративный симулятор гидроразрыва пласта: от математической модели к программной реализации

Corporate fracturing simulator: from a mathematical model to the software development

A.V. Aksakov, O.S. Borschuk, I.S. Zheltova
(RN-UfaNIPIneff LLC, RF, Ufa),

A.V. Dedurin, Z. Kaludzhher, A.V. Pestrikov, K.V. Toropov
(Rosneft Oil Company PJSC, RF, Moscow)

E-mail: a_pestrikov@rosneft.ru

Key words: hydraulic fracturing, HF, fracturing design, fracturing simulation, minifrac, mathematical modeling, geomechanics, hydrodynamics, rock deformation, fracture fluid flow, proppant transport, fluid leakage into the formation, numerical methods

Article is devoted to mathematical modeling of the fracturing mechanics and software development for fracturing simulation and decision making support in design and conduct of fracturing treatments. We discuss the basic software elements for modeling hydraulic fracturing, the existing mathematical models of hydraulic fracturing process (KGD, PKN, Radial, Cell-based-Pseudo3D, Lumped-Pseudo3D, Planar3D), history of development, characteristics and limitations. It is noted the practical importance for the fracturing planning tasks and risk minimization to correctly describe the fracture height growth, this pushed the development of Pseudo3D (P3D) and Planar3D (PL3D) models.

We show the general mathematical formulation of hydraulic fracturing process, based on coupled solution of the formation elasticity equations, fluid hydrodynamics and proppant transport. In details discussed the mathematical formulation for Planar3D model and common assumptions that are made. Software interface examples are shown for common methods of fracturing injection tests analysis and hydraulic fracturing design simulation on the example of corporate fracturing simulator. Typical functional requirements for hydraulic fracturing simulators are given. It is noted that the combination in a one fracturing simulator Planar3D and Cell-based-P3D models provides a flexible software solution to specific geological conditions and requirements for the calculation speeds. It has been shown that for certain geological conditions fracturing simulations using Planar3D and Pseudo3D models may vary in term of evaluating hydraulic fracture geometry. The attention made that the task of speed increasing for Planar3D-models is the actual point of application for scientific and engineering community efforts.

Необходимость постоянного повышения технико-экономической эффективности операций гидроразрыва пласта (ГРП), а также актуальность достижения высокого уровня технологической независимости в условиях риска ограничения доступности отдельных технологий ставят перед крупными добывающими компаниями задачу постоянного повышения внутренних технических компетенций в области ГРП. Одним из направлений повышения технических компетенций и обеспечения технологической независимости является разработка собственных инженерных инструментов и программных комплексов для моделирования ГРП. Использование таких инструмен-

А.В. Аксаков, к.ф.-м.н.,
О.С. Борщук,
И.С. Желтова
(ООО «РН-Уфанипинефть»),
А.В. Дедурин,
З. Калуджер,
А.В. Пестриков,
К.В. Торопов
(ПАО «НК «Роснефть»)

Адрес для связи: a_pestrikov@rosneft.ru

Ключевые слова: гидроразрыв пласта (ГРП), дизайн ГРП, симулятор ГРП, мини-ГРП, математическое моделирование, геомеханика, гидродинамика, деформация горной породы, течение жидкости в трещине, перенос проппанта, утечки жидкости в пласт, численные методы

тов позволяет специалистам нефтегазовых компаний осуществлять объективный контроль процессов проектирования, выполнения и анализа операций ГРП, а также решать широкий круг задач по определению оптимальных проектных параметров ГРП с целью выбора системы и стратегии разработки месторождений с массовым применением данной технологии.

Базовые элементы симулятора ГРП

Любой современный программный комплекс промышленного класса для моделирования ГРП (далее симулятор ГРП) представляет собой программную реализацию основных физических подмоделей, требующих описания и решения в рамках единой системы математических уравнений и замыкающих соотношений (рис. 1). Неотъемлемой частью промышленных симуляторов ГРП являются программная реализация общепринятых методик анализа тестовых закачек, а также наличие актуальной базы данных различных свойств жидкостей разрыва и проппантов, учет которых необходим для корректного моделирования ГРП. Методики анализа тестовых закачек базируются на отдельной группе математических моделей и инженерных практик [1], их программная реализация является отдельной большой задачей процесса разработки симулятора ГРП. В рамках разработки корпоративного

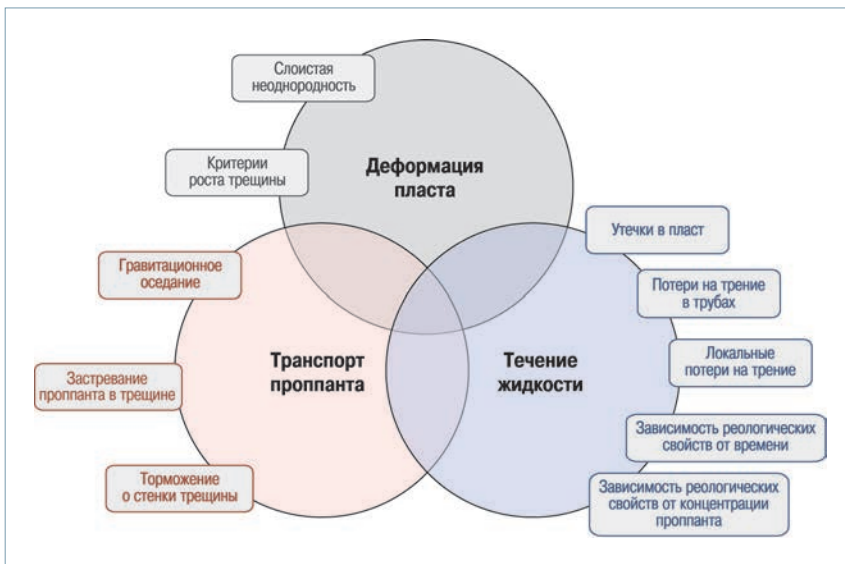


Рис. 1. Основные математические подмодели симулятора ГРП

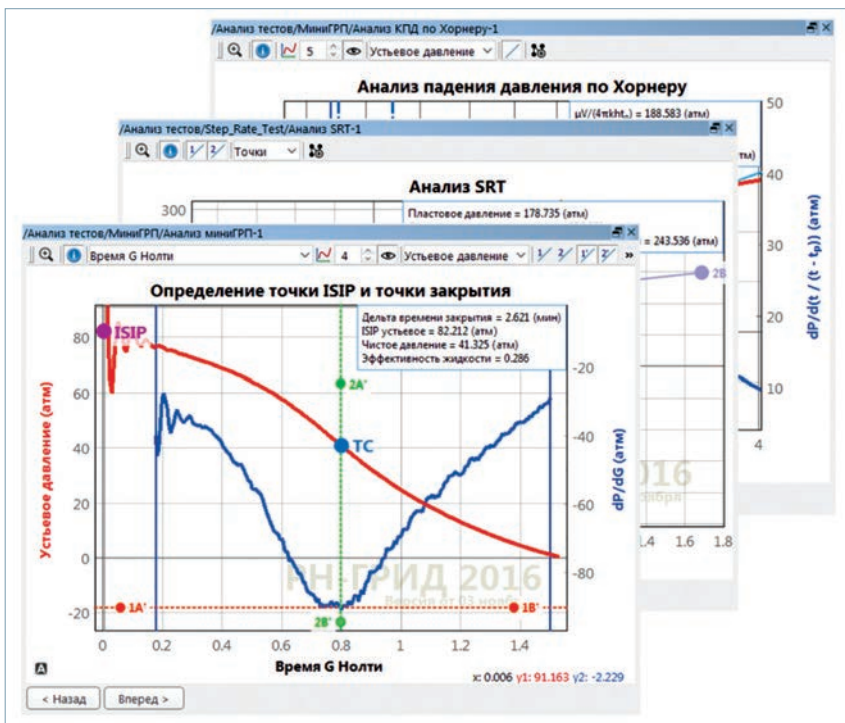


Рис. 2. Пример программной реализации методик анализа тестовых закачек в корпоративном симуляторе ГРП «РН-ГРИД» (SRT – тест со ступенчатым увеличением расхода, ISIP – давление в момент остановки насосов)

симулятора ГРП «РН-ГРИД» данная задача решена одной из первых. Модуль анализа тестовых закачек в составе «РН-ГРИД» включает следующий стандартный для любого промышленного симулятора ГРП набор методик: анализ кривой падения давления (КПД) до закрытия трещины методом Нолти; анализ тестов со ступенчатым увеличением/снижением закачки; анализ КПД после закрытия трещины методами Хорнера и Нолти (рис. 2).

Далее более детально рассмотрим математические подходы к моделированию непосредственно процесса ГРП, которые были использованы при разработке корпоративного симулятора ГРП.

Основные классы математических моделей ГРП

Для описания процесса развития трещины ГРП можно выделить четыре основных класса моделей (рис. 3). Во всех двумерных моделях используется решение, полученное И. Снеддоном для плоскодеформированного состояния линейно-упругой теории трещины [3]. основополагающими работами по построению первых аналитических 2D моделей ГРП следует считать работы [4, 5]. В них была предложена первая замкнутая модель развития трещины гидроразрыва в предположении ее постоянной высоты h_f и горизонтальной плоской деформации при росте трещины в длину x_f . Предложенная модель впоследствии получила название Христиановича-Герцсма-де

	Модели				
	аналитические 2D (PKN, KGD, Rad)	псевдотрехмерные Pseudo3D (P3D) Lumped (LP)	Cell-based (CB)	планарная трехмерная Planar3D (P3D)	трехмерная (Full3D)
«Физичный» контур трещины:	✗	✓	✓	✓✓	✓✓✓
Сквозное сопряжение задач упругости, гидродинамики и переноса проппанта:	✓	✓	✓	✓✓	✓✓
Требования к вычислительным ресурсам:	ультра низкие	низкие	низкие	средние	ультра высокие

Рис. 3. Четыре основных класса моделей для описания процесса развития трещины ГРП (2)

Клерка (KGD). В рамках принятых допущений модель KGD хорошо описывает развитие трещины гидроразрыва на ранней стадии закачки, пока выполняется условие $h_f \gg x_f$, т.е. в момент начала роста трещины от интервала перфорации, высота которого равна высоте трещины гидроразрыва.

Модель развития радиальной трещины (coin-shared, или Radial) [3] подходит для описания трещин, образующихся на малых глубинах, где вертикальное напряжение меньше горизонтальных напряжений, и трещина возникает в горизонтальной плоскости. Кроме того, радиальная модель достаточно хорошо описывает начальный этап развития вертикальной трещины, радиально растущей из точечного интервала перфорации в однородном поле горизонтальных напряжений. В случае вертикальной трещины радиальный характер роста трещины эквивалентен равенству высоты и длины трещины.

Первой моделью для описания трещин, геометрия которых не удовлетворяет условию $h_f \gg x_f$, можно считать модель, предложенную в работе [6] и дополненную в работе [7]. Эта модель называется моделью Перкинса – Керна – Нордгрена (PKN). Она описывает течение жидкости с утечками в пласт в раскрывающемся канале эллиптического сечения переменной площади. На стенках трещины выполняется условие плоского напряженного состояния. Уравнение течения является одномерным, усредненным по сечению. Необходимость выполнения условия плоского напряженного состояния на поверхности трещины ограничивает область применения модели: $h_f \gg x_f$ – эквивалентно принятию постоянства высоты трещины, являющейся входным параметром. Утечки жидкости в пласт в модели PKN описываются в рамках модели фильтрации жидкости через фильтрационную корку низкой проницаемости на поверхности стенок трещины, образованную высокомолекулярными компонентами жидкости разрыва, так называемой модели Картера [8].

В целом 2D модели (за исключением радиальной) основаны на допущении полного отсутствия роста вертикальной трещины в высоту. Это возможно при существенном различии горизонтальных напряжений или наличии сдвиговых разрушений на границе с выше- и нижележащими пластами, но является крайне редким случаем на практике.

Для описания развития вертикальной трещины в неоднородных пластах с изменением по глубине напряженного состояния, механических и фильтрационных свойств было необходимо развитие новых подходов. Практическая важность корректного описания роста трещины в высоту для решения задач планирования и выполнения ГРП способствовала развитию моделей класса Pseudo3D (P3D) и Planar3D (PL3D).

К классу моделей P3D [9] относят параметрические (Lumped-P3D, или LP-P3D) [10, 11] и кусочно-заданные (Cell-based-P3D, или CB-P3D) [12] модели. В моделях LP-P3D геометрия трещины в базовой постановке описывается двумя сочлененными полуэллипсами, в моделях CB-P3D – набором связанных ячеек, каждая из которых имеет собственную высоту.

По схеме решения модели P3D основаны на расширении двумерного решения уравнения упругости до псевдотрехмерного путем разбиения расчетной области на несколько элементов. В пределах одного элемента решение находят так же, как для модели 2D, далее решения сшиваются.

Следующим по сложности классом моделей ГРП является планарная трехмерная модель (Planar3D, или PL3D). В предположении роста трещины в пределах вертикальной плоскости модель PL3D [2, 12, 13] включает решение связанной трехмерной задачи упругости и гидродинамики в двумерной постановке: связь двумерного поля давления жидкости внутри трещины и минимальных горизонтальных напряжений на стенке трещины. Данный аспект является основным отличием модели PL3D от моделей 2D и P3D, при разработке которых изначально допускалось наличие градиента давления только в горизонтальном направлении роста трещины.

Полностью трехмерные модели (Full3D) являются физически наиболее полными из-за отсутствия каких-либо ограничений по геометрии трещины [14]. Однако расчет модели Full3D требует существенных вычислительных ресурсов, которые не доступны в инженерной практике. Модели Full3D применяются для решения преимущественно научных задач, например, для моделирования процесса зарождения трещины сложной пространственной формы в неоднородном трехмерном поле напряжений.

В настоящее время все промышленные симуляторы ГРП в качестве основных рабочих моделей используют решения на основе моделей классов Pseudo3D или Planar3D.

Допущения модели ГРП в постановке модели Planar3D

Математическое описание процесса ГРП включает:

- 1) уравнения теории упругости, связывающие деформацию пород пласта с действующими на них внешними напряжениями и давлением, оказываемым жидкостью гидроразрыва или смесью с проппантом на стенки трещины;
- 2) критерии роста трещины гидроразрыва, следующие, как правило, из предположений теории линейно-упругой механики разрушения;
- 3) уравнения гидродинамики, описывающие распространение по трещине жидкости гидроразрыва и переносимого ею проппанта;
- 4) уравнения фильтрации жидкости гидроразрыва из трещины в пласт.

Из практических соображений физической достаточности описания рассматриваемого процесса при моделировании ГРП в модели Planar3D принимаются следующие общепринятые допущения:

- 1) материал породы считается линейно-упругим;
- 2) перераспределением порового давления во время проведения ГРП можно пренебречь;
- 3) трещина ГРП развивается в вертикальной плоскости в направлении максимального горизонтального напряжения пласта;

4) двумерный поток несжимаемой жидкости в трещине, его течение подчиняются уравнению течения Пуазеля; жидкости, закачанные в различные моменты времени, не смешиваются;

5) фильтрация жидкости разрыва из объема трещины в пласт описывается одномерным однофазным течением, толщину зоны проникновения жидкости в пласт по сравнению с длиной трещины можно считать небольшой;

6) процесс переноса проппанта описывается без учета эффектов, слабо влияющих на конечное решение (взаимодействие частиц проппанта между собой, слипание частиц, изменение шероховатости стенок трещины).

Математическая модель ГРП в постановке модели Planar3D

Решение основных уравнений модели Planar3D записывается на двумерной сетке, покрывающей поверхность трещины, задача решается численными методами. Сетка снабжена механизмом, учитывающим рост трещины с течением времени.

Линейно-упругая модель породы с учетом принятых допущений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\rho g_i, \quad (1)$$

где $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \alpha p \delta_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}$ – тензор полных напряжений; σ'_{ij} – тензор напряжений скелета породы; ρ – плотность горной породы; g – ускорение свободного падения; α – коэффициент порозластичности; p – поровое давление;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ – тензор деформаций; $\lambda = \nu E / (1 + \nu) \times \times (1 - 2\nu)$, $G = E / 2(1 + \nu)$ – коэффициенты Ламе; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга; u_i – компонента вектора смещения; ε_{kk} – след тензора деформаций.

Модель гидродинамики жидкости. Двумерные уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости в трещине строятся на основе закона сохранения объема с учетом модели утечек по Картеру [8]

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) = Q - \frac{2C_l [t > t_0(x, z)]}{\sqrt{t - t_0(x, z)}} - 2\nu_{sp} \delta [t - t_0(x, z)], \quad (2)$$

где w – поле раскрытия трещины; t – время; \vec{q} – поток жидкости; Q – функция плотности источников жидкости; C_l – коэффициент утечек; $t_0(x, z)$ – момент достижения фронтом жидкости точки с координатами (x, z) ; ν_{sp} – удельный объем мгновенных утечек на единицу площади.

Для ньютоновской степенной жидкости и течения Пуазеля между двумя плоскопараллельными пласти-

нами с расстоянием между стенками w уравнение для потока задается в следующем виде:

$$\vec{q} = -\frac{2n}{1+2n} \left(\frac{1}{K} \right)^{1/n} \left(\frac{w}{2} \right)^{\frac{1+2n}{n}} |\vec{\nabla} p - \rho \vec{g}|^{\frac{1-n}{n}} (\vec{\nabla} p - \rho \vec{g}), \quad (3)$$

где $0 \leq n \leq 1$ – показатель поведения степенной жидкости, зависящий от времени; K – коэффициент густоты потока жидкости, зависящий от концентрации проппанта и времени; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Модель переноса проппанта строится на основе закона сохранения объема проппанта каждой фракции

$$\frac{\partial (w_{pf})}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_{pf}) = Q_{pf}, \quad (4)$$

где w_{pf} – толщина проппанта фракции f ; $q_{pf} = w_{pf} \cdot \vec{v}_{pf}$ – поток проппанта фракции f ; \vec{v}_{pf} – скорость проппанта, учитывающая застревание, торможение проппанта относительно жидкости и его гравитационное оседание (эти процессы описываются корреляционными зависимостями); Q_{pf} – источник проппанта.

Замыкание уравнений происходит через поля давления и раскрытия нестационарных уравнений гидродинамики, которые представляют собой граничные условия для уравнений упругости в плоскости трещины.

Решением данной системы дифференциальных уравнений, представляющих собой краевую задачу с подвижной границей, являются поля давления, раскрытия трещины, концентрации проппанта, геометрия фронта трещины гидроразрыва.

Программная реализация симулятора ГРП

Ключевой задачей при разработке симулятора ГРП является обеспечение скорости расчетов, приемлемой для оперативного моделирования дизайнов ГРП и принятия инженерных решений. С учетом того, что решение данного класса математических моделей представляет определенную новизну для отечественной школы моделирования, актуальной является задача увеличения скорости расчета моделей Planar3D.

Принимая во внимание необходимость разработки программного решения, позволяющего как моделировать сложный профиль развития трещины ГРП, так и выполнять более упрощенное, но менее ресурсоемкое моделирование, при разработке корпоративного симулятора ГРП «РН-ГРИД» принята концепция совмещения в одном программном комплексе моделей Planar3D (основная) и Cell-based-P3D (опция).

С точки зрения практического применения, кроме разработки эффективных методов численного решения математической модели ГРП, симулятор ГРП должен иметь широкие интерфейсные возможности.

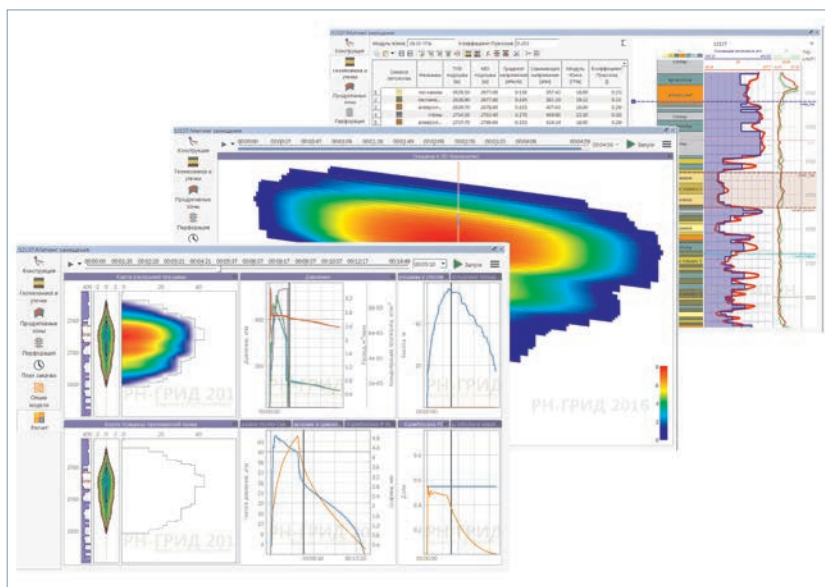


Рис. 4. Примеры интерфейсной части корпоративного симулятора ГРП «РН-ГРИД»

К основным интерфейсным элементам относятся:

- развитые механизмы распознавания форматов для импорта/экспорта объемных цифровых массивов (данные геофизических исследований скважин (ГИС), конструкция скважины, регистрируемые параметры при мини-ГРП и ГРП);
- инструменты создания геомеханической модели пласта, в том числе с привязкой к результатам ГИС;
- формирование плана закачки для расчета как плановых, так и фактических дизайнов ГРП по импортированным данным, включая взаимодействие с базами данных жидкостей и пропантов;
- общепринятый набор графиков и карт для отображения результатов расчета;
- проектная организация системы входных данных и результатов расчета, возможность расчета нескольких

вариантов отдельного дизайна ГРП, нескольких дизайнов ГРП для одной скважины, например, для многостадийных ГРП в горизонтальных скважинах.

С учетом многолетнего успешного опыта ПАО «НК «Роснефть» в области разработки, поддержки и применения собственного корпоративного программного обеспечения для проектирования, мониторинга и разработки месторождений задача программной реализации интерфейсной части с начала проекта разработки симулятора ГРП выполняется на уровне решений промышленного класса (рис. 4).

Особенности практического применения моделей Planar3D и Cell-based-Pseudo3D

Главное отличие планарной трехмерной модели PL3D от псевдотрехмерной модели P3D состоит в том, что уравнения записываются и решаются на двумерной сетке. На отдельном, но распространенном на практике примере реализации геологических условий рассмотрим, когда результаты моделирования существенно различаются.

Форма трещины всех моделей P3D может изменяться только в пределах фиксированной геометрии, форма трещины PL3D ограничена только условием планарности. Моделирование развития трещины для случая, когда распределение профиля горизонтальных напряжений эквивалентно трехслойной модели напряжений (условно глины – песчаник – глины), дает схожие результаты (рис. 5). Моделирование развития трещины в случае прорыва в нижележащий (вышележащий) прослой с меньшим напряжением дает существенное различие в геометрии трещины после прорыва.

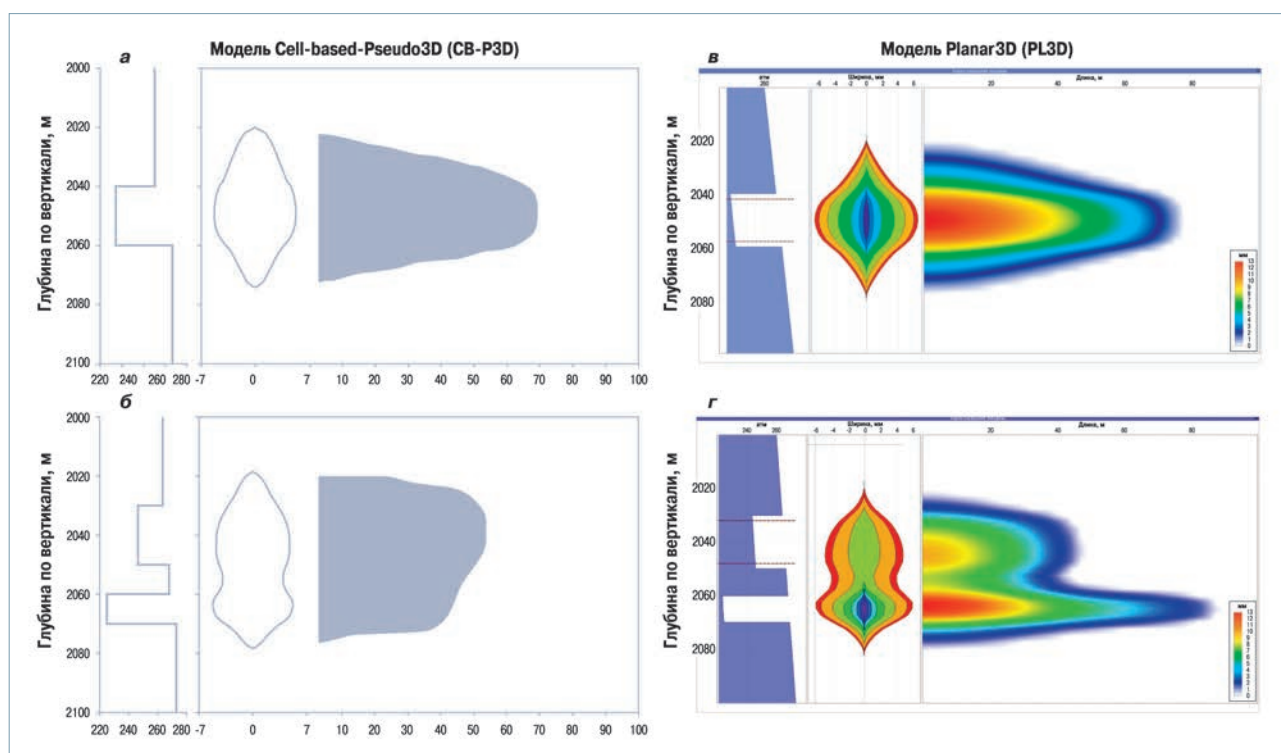


Рис. 5. Примеры моделирования развития трещины без прорыва (а, в) и с прорывом (б, г) в нижележащий прослой (б, г) для разных моделей

Для сложного профиля напряжений модель PL3D дает с физической точки зрения более адекватную оценку достигаемых параметров трещины по сравнению с моделью P3D.

Выводы

1. Симулятор ГРП является инструментом накопления всех научных знаний и практических сведений о процессе ГРП. Выбор специалистом математической модели ГРП часто определяет его дальнейшее представление о ГРП и влиянии данного процесса на разработку нефтегазовых месторождений.

2. Текущие задачи в части объектов и способов применения ГРП, уровень современного промышленного математического моделирования способствуют развитию симуляторов ГРП на основе модели Planar3D. Задача увеличения скорости расчета Planar3D моделей также является крайне актуальной.

3. Совмещение в одном симуляторе ГРП моделей Planar3D и Cell-based-P3D позволяет получить гибкое программное решение для конкретных геологических условий и требований к оперативности расчетов.

4. Обеспечение технологической независимости отечественной нефтяной и газовой промышленности в части инженерных инструментов для моделирования ГРП является решаемой задачей для российского научно-инженерного сообщества.

5. Переход от этапа разработки к промышленному внедрению корпоративного симулятора ГРП «РН-ГРИД» запланирован на 2017 г.

Коллектив авторов благодарит специалистов в области ГРП из ОАО «Самотлорнефтегаз», АО «Самаранефтегаз», ООО «РН-Юганскнефтегаз», ООО «ЦЭПИТР», ООО «РН-УфаНИПИнефть» и ООО «НК «Роснефть-НТЦ» за помощь и ценные замечания, полученные при тестировании «РН-ГРИД».

Список литературы

1. Nolte K.G. Fracture Evaluation Using Pressure Diagnostics. Reservoir stimulation, 3rd ed. – Chichester: Wiley, 2000. – 856 p.
2. Computer simulation of hydraulic fractures/ J. Adachi, E. Siebrits, A. Peirce, J. Desroches// International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. – 2007. – P. 739–757.
3. Sneddon I.N. The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid//Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1946. – T. 187. – № 1009. – С. 229–260.
4. Khristianovich S.A., Zheltov Y.P. Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid//Proc. Fourth World Pet. Congress. – Rome. – 1955. – V. 2. – P. 579–586.

5. Geertsma J., de Klerk F.A. Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulic Induced Fractures//J. Pet Technol. – 1969. – T. 12. – P. 1571–1581.
6. Perkins T.K., Kern L.R. Widths of hydraulic fractures// J. Pet. Tech. – 1961. – P. 937–949.
7. Nordgren R.P. Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture//SPE 3009-PA. – 1972.
8. Carter R.D. Derivation of the General Equation for Estimating the Extent of the Fractured Area. Приложение к C.R. Fast G.C. Howard// Drilling and Production Practice. – New York: American Petroleum Institute, 1957. – P. 261–269.
9. Mack M.G., Warpinski N.R. Mechanics of hydraulic fracturing//Reservoir stimulation, 3rd ed. – Chichester: Wiley, 2000. – 856 p.
10. Cleary M.P. Analysis Of Mechanisms And Procedures For Producing Favourable Shapes Of Hydraulic Fractures//SPE 9260-MS. – 1980.
11. Meyer B.R. Design Formulae for 2-D and 3-D Vertical Hydraulic Fractures: Model Comparison and Parametric Studies//SPE 15240-MS. – 1986.
12. Smith M.B., Klein H.A. Practical Applications of Coupling Fully Numerical 2-D Transport Calculation With a PC-Based Fracture Geometry Simulator// SPE 30505. – 1995.
13. Barree R.D. A Practical Numerical Simulator for Three-Dimensional Fracture Propagation in Heterogeneous Media//SPE 12273-MS. – 1983.
14. Clifton R.J., Abou-Sayed A.S. On The Computation Of The Three-Dimensional Geometry Of Hydraulic Fractures//SPE 7943-MS. – 1979.

References

1. Nolte K.G., *Fracture evaluation using pressure diagnostics. Reservoir stimulation*, 3rd ed., Chichester: Wiley, 2000, 856 p.
2. Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J., *Computer simulation of hydraulic fractures*, International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2007, pp. 739-757.
3. Sneddon I.N., *The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid*, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1946, V. 187, no. 1009, pp. 229-260.
4. Khristianovich S.A., Zheltov Y.P., *Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid*, Proceedings of Fourth World Pet. Congress, Rome, 1955, V. 2, pp. 579-586.
5. Geertsma J., de Klerk F.A., *Rapid method of predicting width and extent of hydraulic induced fractures*, J. Pet Techn., 1969, V. 12, pp. 1571-1581.
6. Perkins T.K., Kern L.R., *Widths of hydraulic fractures*, J. Pet. Tech., 1961, pp. 937-949.
7. Nordgren R.P., *Propagation of a vertical hydraulic fracture*, SPE 3009-PA, 1972.
8. Carter R.D., *Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area*, Drilling and Production Practice, New York: American Petroleum Institute, 1957, pp. 261-269.
9. Mack M.G., Warpinski N.R., *Mechanics of hydraulic fracturing*, Reservoir stimulation, 3rd ed., Chichester: Wiley, 2000, 856 p.
10. Cleary M.P., *Analysis of mechanisms and procedures for producing favourable shapes of hydraulic fractures*, SPE 9260-MS, 1980.
11. Meyer B.R., *Design formulae for 2-D and 3-D vertical hydraulic fractures: model comparison and parametric studies*, SPE 15240-MS, 1986.
12. Smith M.B., Klein H.A., *Practical applications of coupling fully numerical 2-D transport calculation with a PC-based fracture geometry simulator*, SPE 30505, 1995.
13. Barree R.D., *A practical numerical simulator for three-dimensional fracture propagation in heterogeneous media*, SPE 12273-MS, 1983.
14. Clifton R.J., Abou-Sayed A.S., *On the computation of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures*, SPE 7943-MS, 1979.