MATH01 - Bases mathématiques pour l'ingénieur

Chapitre I : L'expression mathématique

Équipe des enseignants de mathématiques

UTT

Automne 2016

Chapitre I
L'expression mathématique

I.1 Opérations logiques élémentaires

I.1.1 Qu'est-ce que l'expression mathématique ?

Documents :
Document C.1

Il s'agit de se familiariser à l'expression mathématique du raisonnement et à quelques règles de raisonnement logique constamment utilisées en mathématiques et ailleurs.

Ces règles permettent, à partir de **propositions** sur (ou **propriétés**, ou **relations** entre) des objets mathématiques (nombres, figures géométriques, fonctions, ...), connues ou admises pour être **vraies**, de déduire d'autres propositions ou propriétés vraies.

Ici, le mot "proposition" signifie toute assertion qu'on peut énoncer sur les objets considérés, par exemple :

— (P1) $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel,
— (P2) par deux points il passe une droite et une seule,
— (P3) une fonction dérivable est continue.

Quant à la vérité en question, il s'agit d'une **valeur logique** associée à chaque proposition. Une importante hypothèse est qu'à toute proposition considérée, on sait associer sa valeur logique qui est l'un des deux mots **vraie** ou **fausse** (*principe du tiers exclu*). Ainsi (P1) est fausse et (P3) est vraie. Les opérations logiques entre propositions, que l'on va étudier ensuite, peuvent être représentées par des tables de vérité (voir le document référencé).

Un certain nombre de propositions sont considérées comme vérités premières, c'est-à-dire qu'elles ne se déduisent pas d'autres propositions vraies, mais traduisent en langage mathématique les propriétés les plus évidentes des objets concrets auxquels on pense. On les appelle des **axiomes**. Par exemple, (P2) est un des axiomes de la géométrie euclidienne. Les autres propositions vraies le sont par déduction des axiomes ou d'autres propositions dont la vérité est déjà démontrée. Les axiomes sont en petit nombre et possèdent une cohérence interne importante, en ce sens qu'on ne peut déduire d'eux aucune proposition à la fois vraie et fausse.

Attention : Des propositions en apparence différentes peuvent se révéler identiques, ce n'est que leur énoncé qui varie. Ainsi "x positif ou nul" est la même proposition que "x n'est pas strictement négatif". On dira que ces propositions sont identiques (ou équivalentes).

Remarque I.1.1. *Lorsque l'on présente des résultats mathématiques dans un cours, l'emploi du mot "proposition" sous-entend qu'il s'agit d'une proposition* ***vraie****, même si, comme cela vient d'être expliqué, une proposition est initialement une assertion "décidable", c'est-à-dire une assertion vraie ou fausse.*

I.1.2 Négation d'une proposition : non P

Exercices :
Exercice A.1.1

En langage courant, lorsque l'on énonce une proposition P, on considère qu'elle est vraie et donc la négation "**non** P" traduit tous les cas où P est fausse. Voici la définition mathématique :

Définition I.1.1. *Si P est une proposition, sa **négation**, notée* **non** $\boldsymbol{P}$, *est une proposition qui est fausse si P est vraie et qui est vraie si P est fausse.*

Il résulte de cette définition que **non(non** P) est P elle-même.

Par exemple

— P : Tous les dimanches je vais au restaurant,
  non P : Il existe au moins un dimanche où je ne vais pas au restaurant
— P : Je vais au restaurant au moins un dimanche par an,
  non P : Je ne vais jamais au restaurant le dimanche.

Remarque I.1.2. ***non*** *P se note aussi* $\neg \boldsymbol{P}$.

I.1.3 Disjonction de deux propositions : P ou Q

Exercices :
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4
Exercice A.1.5

Définition I.1.2. *Si P et Q sont deux propositions, la* ***disjonction****, notée* **P ou Q**, *est une proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie et qui est fausse si les deux propositions sont fausses.*

Il résulte de cette définition que les propositions (P **ou** Q) et (Q **ou** P) sont identiques.

Par exemple, si on considère les deux propositions :

— P : Tous les lundis je vais au cinéma,

— Q : Le 15 de chaque mois je vais au cinéma,

La proposition (P **ou** Q) est vraie si elle s'applique à quelqu'un qui va au cinéma tous les lundis ou à quelqu'un qui va au cinéma le 15 de chaque mois (il peut évidemment faire les deux). Elle est fausse dans tous les autres cas. En particulier elle est fausse s'il s'agit de quelqu'un qui ne va au cinéma que les lundis 15.

Attention, le "fromage ou dessert" du restaurant n'est pas un "ou mathématique" car il est exclusif.

Si dans une démonstration on veut utiliser l'hypothèse (P **ou** Q) est vraie, alors deux cas sont possibles :

— soit P est vraie et on utilise ce résultat dans la démonstration,

— soit P est fausse, alors Q est vraie et l'on utilise ces deux résultats dans la démonstration.

Pour montrer que (P **ou** Q) est vraie, il faut démontrer que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

— soit P est vraie et donc (P **ou** Q) est vraie,

— soit P est fausse et ceci peut être utilisé pour montrer que Q est vraie.

La disjonction est associative dans le sens où (P **ou** Q)**ou** R est identique à P **ou** (Q **ou** R).

Remarque I.1.3. *P* ***ou*** *Q se note aussi* $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$.

I.1.4 Conjonction de deux propositions : P et Q

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9

Exemples :
Exemple B.1.1

Documents :
Document C.1

Définition I.1.3. *Si P et Q sont deux propositions, la* ***conjonction****, notée* **P et Q***, est la proposition qui est vraie si les deux propositions sont vraies et qui est fausse si au moins l'une des deux propositions est fausse.*

Il résulte de cette définition que les propositions (P **et** Q) et (Q **et** P) sont identiques.

Par exemple, soient les deux propositions :
— P : Tous les lundis je vais au cinéma,
— Q : Le 15 de chaque mois je vais au cinéma,

La proposition (P **et** Q) est vraie si elle s'applique à quelqu'un qui va au cinéma tous les lundis et le 15 de chaque mois. Elle est fausse dans tous les autres cas. Attention, (P **et** Q) ne correspond pas à : Tous les lundis 15 je vais au cinéma.

Soient deux propositions P et Q, vous montrerez en exercice les deux résultats suivants :
— la proposition **non** (P **et** Q) est identique à la proposition (**non** P) **ou** (**non** Q),
— la proposition **non** (P **ou** Q) est identique à la proposition (**non** P) **et** (**non** Q).

Pour démontrer ce genre de résultat, on peut aussi utiliser les tables de vérité (données dans le document référencé), ce qui est plus technique et donc parfois plus facile.

La conjonction est associative dans le sens où (P **et** Q)**et** R est identique à P **et** (Q **et** R).

Remarque I.1.4. *P* ***et*** *Q se note aussi* $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$.

I.1.5 Implication logique de deux propositions : $P \Rightarrow Q$

Exercices :	Exemples :	Cours :
Exercice A.1.10	Exemple B.1.3	Disjonction de deux propositions
Exercice A.1.11		

Définition I.1.4. *Soient P et Q deux propositions, on appelle l'**implication logique (de** Q **par** P**)** la proposition, notée $\mathbf{P \Rightarrow Q}$, qui est vraie si*

— *soit P est fausse,*

— *soit P est vraie et Q est vraie.*

Elle est fausse dans le seul cas où P est vraie et Q est fausse.

Attention, $P \Rightarrow Q$ n'est pas identique à $Q \Rightarrow P$.

L'implication se dit, en langage courant, "P implique Q" et signifie que Q est vraie dès que P l'est. D'ailleurs pour prouver que cette implication est vraie, on n'a qu'une seule chose à faire : démontrer que *si* P est vraie, alors Q aussi l'est. Mais il faut faire attention car elle ne donne aucun renseignement sur Q si P est fausse, comme on le voit dans l'exemple suivant :

Soient 3 nombres réels x, y, z. On a l'implication (bien connue) suivante :

$$(x = y) \Rightarrow (xz = yz)$$

On voit sur cet exemple que quand la proposition (P) est fausse ($x \neq y$), la conclusion (Q) peut être vraie (si $z = 0$) ou fausse (si $z \neq 0$) .

Pourtant, dans la pratique, par abus de langage, quand la notation ($P \Rightarrow Q$) est utilisée, on entend que cette implication est vraie : on dira "démontrer $P \Rightarrow Q$" plutôt que "démontrer que ($P \Rightarrow Q$) est vraie".

Proposition I.1.1. *$P \Rightarrow Q$ s'écrit également ((**non** P) **ou** Q).*

Démonstration - On a vu dans le paragraphe référencé que ((**non** P) **ou** Q) est vraie si **non** P est vraie (donc P fausse) ou si **non** P est fausse (P vraie) et Q est vraie. Ceci correspond bien à $P \Rightarrow Q$.

Au lieu de dire que "P implique Q" on dit aussi que "P est une condition suffisante de Q" (pour que Q soit vraie, il suffit que P le soit), ou que "Q est une condition nécessaire de P" (si P est vraie, nécessairement Q l'est).

Corollaire I.1.1. ***non** ($P \Rightarrow Q$) s'écrit (P **et** (**non** Q)).*

Attention ! La négation d'une implication n'est pas une implication.

Enfin, l'implication est transitive, soit

$$\{(P_1 \Rightarrow P_2) \textbf{ et } (P_2 \Rightarrow P_3)\} \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_3)$$

I.1.6 Equivalence logique de deux propositions : $P \Leftrightarrow Q$

Exercices :	Cours :
Exercice A.1.12	Implication logique
Exercice A.1.13	
Exercice A.1.14	

Définition I.1.5. *Si P et Q sont deux propositions, l'**équivalence**, notée $\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}$, est la proposition $(P \Rightarrow Q)$* **et** *$(Q \Rightarrow P)$.*

On dit aussi que P (resp. Q) est une condition nécessaire et suffisante de Q (resp. P), ou que P (resp. Q) est vraie si et seulement si Q (resp. P) est vraie. Dans ce cas, les deux propositions sont vraies ou fausses simultanément.

Un premier exemple, en langage courant, serait : le soleil brille à midi si et seulement si il n'y a pas de nuage devant le soleil.

Un deuxième exemple, un peu plus mathématique :

$$\{(x \geq 0)\mathbf{et}(x \leq 0)\} \Leftrightarrow (x = 0).$$

L'équivalence est transitive, soit

$$\{(P_1 \Leftrightarrow P_2) \textbf{ et } (P_2 \Leftrightarrow P_3)\} \Rightarrow (P_1 \Leftrightarrow P_3)$$

Et enfin, un résultat important utilisant les implications et l'équivalence est le suivant

Proposition I.1.2. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\textbf{non } Q \Rightarrow \textbf{non } P)$

La démonstration est à faire en exercice.

I.2 Application au raisonnement déductif

Un raisonnement est une manière d'arriver à une conclusion en partant d'une (ou de plusieurs) hypothèse(s), et en utilisant les règles de déduction d'une proposition à partir d'une autre. Vous connaissez déjà le raisonnement par équivalence qui consiste à partir d'une proposition vraie (l'hypothèse par exemple) et à construire par équivalence d'autres propositions (qui sont donc vraies), dont la dernière est la conclusion. Vous connaissez le raisonnement par récurrence que nous formaliserons plus tard. Voici deux autres formes de raisonnement qui découlent des règles de logique précédentes.

I.2.1 Raisonnement par contraposée

Exercices :	Cours :
Exercice A.1.15	Equivalence logique

La proposition du cours référencé donne une autre manière de démontrer que $P \Rightarrow Q$. En effet il est équivalent de montrer que (**non** Q) $\Rightarrow$ (**non** P), c'est-à-dire que si la proposition Q est fausse alors la proposition P est fausse, ce qui est parfois plus simple. C'est ce que l'on appelle un raisonnement par contraposée.

Un premier exemple emprunté à Racine est : "Si Titus est jaloux, il est amoureux". En effet, s'il n'est pas amoureux, il n'a aucune raison d'être jaloux !

Un deuxième exemple mathématique : Si n est un entier impair alors le chiffre des unités de n est impair. On va montrer la contraposée, à savoir :

$$(\text{le chiffre des unités de } n \text{ est pair}) \;\Rightarrow\; (n \text{ est pair}).$$

En effet, si le chiffre des unités de n est pair, on peut écrire $n = 10q + 2p$ soit $n = 2(5q + p)$ c'est-à-dire n est pair.

Attention à l'ordre des propositions P et Q : La proposition($P \Rightarrow Q$) $\Leftrightarrow$ (**non** P $\Rightarrow$ **non** Q) est fausse. Elle peut conduire à de nombreuses erreurs, par exemple la suivante : étant donné que "tout homme est mortel", cet énoncé pourrait servir à prouver que "toute vache est immortelle".

I.2.2 Raisonnement par l'absurde

Exercices :	Cours :
Exercice A.1.16	Conjonction de deux propositions
	Implication logique

Le principe du raisonnement par l'absurde est le suivant : pour démontrer qu'une proposition R est vraie, on suppose le contraire (c'est-à-dire R fausse), et on essaye d'arriver à un résultat contradictoire (absurde).

Par exemple, pour montrer qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif (alors que toute calculette possède un tel nombre puisque ses capacités de stockage ne sont pas infinies), on va supposer qu'il en existe un, noté a (donc $0 < a$ est tel qu'il n'existe aucun réel x tel que $0 < x < a$). Or le réel $\frac{a}{2}$ est tel que $0 < \frac{a}{2} < a$, ce qui contredit les hypothèses.

On peut appliquer ce principe par exemple à la proposition $(P \Rightarrow Q)$, notée R. On a vu dans les cours référencés que $(P \Rightarrow Q)$ s'écrit (Q **ou** (**non** P)) et que **non**(Q ou (**non** P)) est identique à ((**non** Q) **et** P). On peut donc montrer l'implication $(P \Rightarrow Q)$ en montrant que ((**non** Q) **et** P) est fausse. Plus précisément on suppose que P est vraie et Q est fausse et l'on démontre que cela aboutit à un résultat contradictoire.

Par exemple, pour montrer que, n étant un entier,

(n impair) $\Rightarrow$ (le chiffre des unités de n est impair),

on va supposer à la fois que n est impair et que le chiffre de ses unités est pair, ce qui donne :

$$2m + 1 = 10q + 2p \Leftrightarrow 1 = 2(5q + p - m)$$

ce qui est impossible puisque 1 ne peut pas être le produit de deux entiers dont l'un est 2.

I.3 Notions sur les ensembles

I.3.1 Définition d'un ensemble

Un **ensemble** E est considéré comme une collection d'objets (mathématiques) appelés **éléments**.

— $\boldsymbol{x \in E}$ signifie x est un élément de E,

— $\boldsymbol{x \notin E}$ signifie x n'est pas un élément de E.

Un ensemble E est donc défini si, pour chaque objet x considéré, une et une seule des deux éventualités $x \in E$ et $x \notin E$ est vraie. En pratique, on définit un ensemble, soit en exhibant tous ses éléments, soit en donnant un critère permettant de vérifier la vérité de $(x \in E)$ ou de $(x \notin E)$. Par exemple l'ensemble des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

Dans la suite, nous supposerons connus les ensembles suivants :

— l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels,

— l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs,

— l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels,

— l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels,

— l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

— l'ensemble $\mathbb{R}_*$ des nombres réels non nuls,

— l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des nombres réels positifs ou nuls,

— l'ensemble $\mathbb{R}^-$ des nombres réels négatifs ou nuls.

Par exemple, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $1+i \in \mathbb{C}$, $1+i \notin \mathbb{R}$.

I.3.2 Définition d'un sous-ensemble et de l'ensemble vide

Cours :
Implication logique

Exercices :
Exercice A.1.17
Exercice A.1.18

Soit E un ensemble, une **partie** ou **sous-ensemble** de E est un ensemble A vérifiant la propriété suivante :

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in E)$$

On dit aussi que ***A* est inclus dans *E***, et on note $\boldsymbol{A \subset E}$, par exemple $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.

Pour montrer l'égalité de deux ensembles on procède par double inclusion, c'est-à-dire

$$(A = B) \Leftrightarrow \{(A \subset B) \textbf{ et } (B \subset A)\}$$

ou par équivalence, c'est-à-dire

$$(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$$

qui est la traduction de la double inclusion.

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble qui ne contient aucun élément, c'est-à-dire qui est tel que la propriété $(x \in \emptyset)$ est fausse quel que soit x. Donc $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E. En effet $x \in \emptyset$ étant toujours fausse l'implication $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in E)$ est vraie (voir la définition de l'implication dans le paragraphe référencé).

I.3.3 Intersection et union d'ensembles

Exercices :	Cours :
Exercice A.1.19	Ensemble - définition
Exercice A.1.20	
Exercice A.1.21	

Si A et B sont deux parties de E, on appelle **intersection** de A et B, notée $\boldsymbol{A\cap B}$ l'ensemble des éléments communs à A et B, et l'on a :

$$(x\in A\cap B)\Leftrightarrow((x\in A)\ \textbf{et}\ (x\in B))\,.$$

Par exemple, soit $E=\mathbb{N}$, A l'ensemble des entiers multiples de 3, B l'ensemble des entiers multiples de 5, alors $A\cap B$ est l'ensemble des entiers multiples de 15. De manière générale, si A est l'ensemble des entiers multiples de n et B l'ensemble des entiers multiples de m, alors $A\cap B$ est l'ensemble des entiers multiples du plus petit multiple commun de n et m. (à propos vous souvenez-vous du calcul de ce plus petit multiple commun ?)

On appelle **union** de A et B, notée $\boldsymbol{A\cup B}$ l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B, et l'on a : $(x\in A\cup B)\Leftrightarrow((x\in A)\ \textbf{ou}\ (x\in B))$.

Ainsi, soit $E=\mathbb{N}$, A l'ensemble des entiers multiples de 3, B l'ensemble des entiers multiples de 5, alors $A\cup B$ est l'ensemble des entiers qui sont multiples de 3 ou de 5.

Soit E un ensemble quelconque, pour toutes parties A,B et C de l'ensemble E, on a les égalités ensemblistes suivantes :
- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,
- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

que l'on peut démontrer par équivalence.

I.3.4 Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Exercices :	Cours :
Exercice A.1.22	Ensemble - définition

Soit E un ensemble, pour toute partie A de E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A s'appelle le **complémentaire** de A et se note $\complement_E A$ ou $E \setminus A$.

Lorsque, du fait du contexte, il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E, on se contente souvent de noter $\complement A$, le complémentaire de A dans E.

Par exemple,

— soit $E = \mathbb{N}$ et soit A l'ensemble des entiers pairs, alors $\complement A$ est l'ensemble des entiers impairs,

— soit $E = \mathbb{R}$ et soit $A = \{0\}$, alors $\complement A = \mathbb{R}_*$,

— soit $E = \mathbb{R}$ et soit $B = \{2\}$ alors $\complement B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

— soit $E = \mathbb{R}$ et soit $A = \mathbb{R}^+$, alors $\complement A = \mathbb{R}^-_*$.

Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, on a les propriétés suivantes

— $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$,

— $\complement(\complement A) = A$,

— $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$,

— $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.

Notons bien que le complémentaire d'une intersection est l'union des complémentaires et de même le complémentaire d'une union est l'intersection des complémentaires.

Notons aussi que lorsque l'on définit un ensemble E comme l'ensemble des éléments vérifiant une propriété P, soit

$$E = \{x, P(x)\},$$

le complémentaire de E est l'ensemble des éléments vérifiant **non** P.

De même, si A et B sont définis à l'aide des propriétés P et Q, alors $A \cap B$ est défini par "P **et** Q" et $A \cup B$ par "P **ou** Q".

I.3.5 Cardinal d'un ensemble

> Exercices :
> Exercice A.1.23
> Exercice A.1.24

On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il a un nombre fini d'éléments. Le nombre de ses éléments est appelé **cardinal** de E et se note **card(E)**.

Par exemple, si $E = \{1,2,3\}$, alors card(E)$= 3$.

On note $\mathscr{P}(\boldsymbol{E})$ l'ensemble des parties de E.

Proposition I.3.1. *Le nombre des parties d'un ensemble fini de cardinal n est égal à* 2^n.

Démonstration - Il suffit de dénombrer le nombre des parties de $E = \{a_1,\dots,a_n\}$:

— partie vide $\emptyset$,

— parties ne contenant qu'un élément, il y en a n : $\{a_1\},\dots,\{a_n\}$,

— parties formées de deux éléments, il y en a $\binom{n}{2}$ de la forme $\{a_i, a_j\}$ avec $i \neq j$,

— ...

— parties formées de p éléments obtenues en prenant toutes les combinaisons de p éléments parmi n, il y en a $\binom{n}{p}$,

— ...

— E lui-même ($E \subset E$).

Le nombre d'éléments est donc

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{p} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

Cette dernière relation est une application de la formule du binôme de Newton qui est donnée en exercice.

I.3.6 Produit cartésien d'ensembles

Exercices :
Exercice A.1.25

Si E et F sont deux ensembles, le **produit cartésien** de E par F, noté $\boldsymbol{E \times F}$, est constitué des **couples** $\boldsymbol{(x, y)}$, où x parcourt E et où y parcourt F. Les couples (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Si E est un ensemble, le produit cartésien $E \times E$ se note $\boldsymbol{E^2}$.

Par exemple, le produit cartésien $\mathbb{R}^2$ est formé des couples de nombres réels ; ceux-ci permettent de déterminer un point du plan par ses coordonnées, lorsqu'on s'est donné un repère (appelé aussi repère cartésien) c'est-à-dire la donnée d'une origine O et de deux vecteurs non colinéaires $(\vec{i}, \vec{j})$.

Plus généralement, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le produit cartésien de E par lui-même n fois se note $\boldsymbol{E^n}$. Les éléments de E^n sont les **n-uples**(ou n-uplets) $\boldsymbol{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ où les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appartiennent à E.

Les n-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ sont égaux si et seulement si on a $x_i = x'_i$, pour tout i tel que $1 \le i \le n$.

Attention ! lorsque $E \neq F$, $E \times F$ est différent de $F \times E$.

I.4 Quantificateurs

I.4.1 Proposition dépendant d'une variable : $P(x)$

Exercices :
Exercice A.1.26

Si P est une proposition dont l'énoncé dépend de la valeur d'une variable x on peut la noter $\boldsymbol{P(x)}$ et considérer les cas particuliers $P(a)$ où a est une valeur particulière de x.

Par exemple, soit dans $\mathbb{R}$ la proposition suivante $P(x) : x^2 - 1 < 0$. Alors $P(2)$ est fausse et $P(0)$ est vraie, et plus généralement $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de x appartenant à $]-1, +1[$.

Soit P une proposition dépendant de l'entier n, le **raisonnement par récurrence** permet de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa formalisation est à faire en exercice.

I.4.2 Quantificateur universel : $\forall$

Exercices :
Exercice A.1.27
Exercice A.1.28

Pour exprimer qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble de E, on écrit :

$$\boldsymbol{\forall x \in E, P(x).}$$

(La virgule dans cette "phrase" peut être remplacée par un autre signe séparateur, couramment le point-virgule (;) ou le trait vertical (|)).

Par exemple

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0,$
- $\forall x \in [2, +\infty[, x^2 - 4 \geq 0,$
- $E \subset F$ s'écrit : $\forall x \in E, x \in F$.

Proposition I.4.1. *On a l'équivalence suivante :*

$$(\forall x \in E, (P(x) \textbf{ et } Q(x))) \Leftrightarrow ((\forall a \in E, P(a)) \textbf{ et } (\forall b \in E, Q(b)))$$

Démonstration - En effet $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies pour tout élément de E est bien équivalent à $P(x)$ est vraie pour tout élément de E et $Q(x)$ est vraie pour tout élément de E.

Notons que la propriété

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

s'écrit de manière équivalente

$$(x \in E) \Rightarrow P(x)$$

et toujours de manière équivalente

$$\forall y \in E,\ P(y)$$

I.4.3 Quantificateur existentiel : $\exists$

Exercices :	Exemples :
Exercice A.1.29	Exemple B.1.4
Exercice A.1.30	
Exercice A.1.31	
Exercice A.1.32	

Pour exprimer qu'une propriété $P(x)$ est vérifiée pour au moins un élément x d'un ensemble E, on écrit :

$$\boldsymbol{\exists x \in E, P(x)}$$

qui se traduit par : "il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ est vraie".

S'il existe un unique élément x de E tel que $P(x)$ est vraie, on écrira

$$\boldsymbol{\exists! x \in E, P(x)}$$

Par exemple,

$$\exists x \in \mathbb{R},\, x^2 = 1$$

mais

$$\exists! x \in \mathbb{R},\, x^2 = 1$$

ne peut pas s'écrire. Par contre, vous pouvez écrire

$$\exists! x \in \mathbb{R}^+,\, x^2 = 1.$$

Soit E un ensemble, P une propriété dépendant d'une variable x de E, on est souvent amené à considérer l'ensemble des éléments a de E tels que $P(a)$ soit vraie (on dit aussi, les a qui vérifient la propriété P). On le note

$$\boldsymbol{A_P = \{x \in E, P(x)\}}$$

La propriété $(\exists x \in E, P(x))$ se traduit alors par "$A_P \neq \emptyset$".

Proposition I.4.2. *On a l'équivalence suivante :*

$$\exists x \in E,\, [P(x) \textbf{ ou } Q(x)] \;\Leftrightarrow\; [\exists a \in E,\, P(a)] \textbf{ ou } [\exists b \in E,\, Q(b)]$$

Cette proposition est démontrée en exercice par double implication.

I.4.4 Quantificateurs multiples

Exercices :
Exercice A.1.33
Exercice A.1.34

Il s'agit simplement de successions de "$\forall$" et "$\exists$". Mais il faut faire très attention à l'ordre dans lequel on les écrit. En revanche, on a le résultat évident suivant :

Proposition I.4.3. *Deux quantificateurs de même nature qui se suivent peuvent être échangés.*

Par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0.$$

De même

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0 \ \Leftrightarrow \ \exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y = 0.$$

Proposition I.4.4. *On a les équivalences suivantes :*

$$\textbf{non}(\forall x \in E, P(x)) \ \Leftrightarrow \ (\exists a \in E, \textbf{non}\ P(a))$$

$$\textbf{non}(\exists a \in E, Q(a)) \ \Leftrightarrow \ (\forall x \in E, \textbf{non}\ Q(x))$$

Démonstration - La négation de "la proposition P est vérifiée pour tout élément de E" est "il existe au moins un élément de E pour lequel la proposition P est fausse". Ce qui s'exprime mathématiquement par :

$$\textbf{non}\,(\forall x \in E, P(x)) \ \Leftrightarrow \ \exists a \in E, \textbf{non}\ P(a)$$

et la deuxième proposition n'est que la négation de cette première proposition, si l'on appelle Q la proposition (**non** P).

Par exemple, la négation de

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$$

est

$$\exists a \in \mathbb{R}, a \leq 0$$

Proposition I.4.5. *Soient E et F deux ensembles et P une proposition dépendant de deux indéterminées et à chaque couple d'éléments (a,b) du produit cartésien $E \times F$, on associe $P(a,b)$. Alors on a*

$$\textbf{non}\,(\forall a \in E, \exists b \in F, P(a,b)) \ \Leftrightarrow \ (\exists a \in E, \forall b \in F, \textbf{non}\ P(a,b))$$

$$(\exists a \in E, \forall b \in F, P(a,b)) \ \Rightarrow \ (\forall b \in F, \exists a \in E, P(a,b))$$

Démonstration - La première est une application directe de la proposition précédente. La deuxième est admise ou laissée au lecteur courageux.

Attention ! L'implication inverse de celle de la proposition ci-dessus est fausse.

Attention ! "$\exists x, \forall y$" n'a pas le même sens que "$\forall y, \exists x$".

Proposition I.4.6. *Dans une proposition comportant deux quantificateurs différents, l'**ordre** dans lequel ceux-ci sont placés est très important ; Les "échanger" peut complètement changer le sens de la proposition !!! L'ordre des quantificateurs va permettre de comprendre le sens de l'énoncé.*

Par exemple $\left[\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \ / \ \ x + y = 0\right]$ est vraie ......
mais : $\left[\exists y \in \mathbb{R} \ / \ \ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x + y = 0\right]$ est fausse ....

I.4.5 Relation d'équivalence

Exercices :	Documents :
Exercice A.1.35	Document C.2

Définition I.4.1. *On appelle* ***relation dans E*** *une partie de* $E \times E$*. Plus précisément, soit* $\mathcal{R} \subset E \times E$*, on dit que* ***x et y sont liés par la relation*** $\mathcal{R}$ *si* $(x, y) \in \mathcal{R}$*. On écrit souvent* $x\mathcal{R}y$ *pour indiquer que x et y sont liés par la relation* $\mathcal{R}$*.*

Par exemple $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x \leq y\}$ définit une partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et la relation associée est la relation (d'ordre) "inférieur ou égal". Autre exemple, $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathcal{R} = \{(p, q), (p', q')) \in E \times E \,|\, pq' = p'q\}$ définit un exemple de relation qui va être appelée relation d'équivalence.

Définition I.4.2. *On appelle* ***relation d'équivalence*** *une relation qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

— *elle est* ***réflexive*** *:* $(x, x) \in \mathcal{R}$*,*
— *elle est* ***symétrique*** *:* $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$*,*
— *elle est* ***transitive*** *:* $\{(x, y) \in \mathcal{R}\ \mathbf{et}\ (y, z) \in \mathcal{R}\} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$*.*

Si $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence, on écrit souvent* $\boldsymbol{x \equiv y}$*, ou* $\boldsymbol{x \sim y}$*, au lieu de* $(x, y) \in \mathcal{R}$*.*

Dans un ensemble quelconque, la relation x "est égal à" y est une relation d'équivalence. À partir d'une relation d'équivalence, on peut définir des classes d'équivalence (voir le document référencé).

La relation d'équivalence est d'ailleurs une généralisation de la relation d'égalité. Elle est présente partout en mathématiques. Elle permet, lorsque l'on étudie certains objets mathématiques, de n'en conserver que les propriétés pertinentes pour le problème considéré.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de cours

Exercice A.1.1

Soit la proposition P : n est un entier impair,

— Donner (**non** P) lorsque l'on considère que n est un entier,

— Donner (**non** P) lorsque l'on considère que n est un réel,

et en conclure que la réponse dépend du contexte.

Exercice A.1.2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient les deux propositions :

— P : n est un entier pair,

— Q : n est un entier impair,

La proposition (P **ou** Q) est-elle vraie pour tout n ? Quel est le résultat si l'on considère $n \in \mathbb{R}$?

Exercice A.1.3

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soient les deux propositions :

— $P : x \leq 0$,

— $Q : x \geq 0$,

La proposition (P **ou** Q) est-elle vraie, quel que soit x ? Même question si l'on remplace Q par : $x > 0$. Même question enfin, si l'on remplace P par $x < 0$ et Q par $x > 0$.

Exercice A.1.4

Montrer que (P **ou** Q)**ou** R est identique à P **ou** (Q **ou** R).

Exercice A.1.5

On suppose que la proposition (P **ou** Q) est vraie. Comment doit être la proposition P pour être sûr que la proposition Q est vraie ? Application : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soient les deux propositions

— P : f est impaire ($f(-x) = -f(x)$, quel que soit x réel),

— Q : f est dérivable,

et on suppose que (P **ou** Q) est vraie pour les fonctions que l'on va considérer. Soit $f_1(x) = x^2$ et $f_2(x) = 1$ si $x > 0$, $f_2(x) = -1$ si $x < 0$ et $f_2(0) = 0$. Peut-on en déduire que les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables ?

Exercice A.1.6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient les deux propositions :
— P : n est pair,
— Q : n est impair,
La proposition (P **et** Q) est-elle vraie ?

Exercice A.1.7

Soient les deux propositions :
— P : x est un réel tel que $x \leq 0$,
— Q : x est un réel tel que $x \geq 0$,
Énoncer la proposition (P **et** Q) ?

Exercice A.1.8

Soient deux propositions P et Q, montrer les deux résultats suivants :
— la proposition **non** (P **et** Q) est identique à la proposition (**non** P) **ou** (**non** Q),
— la proposition **non** (P **ou** Q) est identique à la proposition (**non** P) **et** (**non** Q).

Exercice A.1.9

Montrer que (P **et** Q) **et** R est identique à P **et** (Q **et** R).

Exercice A.1.10

Montrer que si Q est toujours vraie, alors quelle que soit la proposition P on a $P \Rightarrow Q$. Illustrer ce résultat par un exemple.

Exercice A.1.11

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a,b]$ et soient les deux propositions :
— P : f est dérivable sur $[a,b]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[a,b]$,
— Q : f est croissante sur $[a,b]$,
P est-elle une condition nécessaire de Q ? (Quelle implication faut-il considérer ?) P est-elle une condition suffisante de Q ? Q est-elle une condition nécessaire de P ? Q est-elle une condition suffisante de P ? (Justifier toutes les réponses).

Exercice A.1.12

Donner un théorème qui s'énonce comme une condition nécessaire et suffisante. Il y en a bien sûr un très grand nombre.

Exercice A.1.13

Sachant que $P \Rightarrow Q$ s'écrit ((**non** P) **ou** Q) montrer que

$$(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; (\textbf{non}\, Q \;\Rightarrow\; \textbf{non}\, P)$$

Exercice A.1.14

— Montrer que si Q est une proposition fausse, alors $P \Leftrightarrow (P\, \textbf{ou}\, Q)$. Donner un exemple.

— Montrer que, si R est une proposition vraie, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \{(P\ \textbf{et}\ R) \Rightarrow Q\}$. Ainsi, pour démontrer une implication, on peut adjoindre à P toute vérité déjà établie, ce qui peut faciliter la démonstration. Donner un exemple.

Exercice A.1.15

Montrer par contraposée que si n est un entier premier avec 6 alors n est impair. (On rappelle que n est un entier premier avec l'entier p si n et p n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1.)

Exercice A.1.16

Démontrer par l'absurde le résultat suivant

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \;\Rightarrow a \leq b$$

Exercice A.1.17

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par : $A = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$, est-ce que $A \subset B$ ou $B \subset A$? (Justifier le résultat.)

Exercice A.1.18

Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ (x > 0)\ \ \textbf{ou}\ (x \leq 0)\}$, montrer par double inclusion que $E = \mathbb{R}$.

Exercice A.1.19

Soit $E = \mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire l'espace tout entier), soit A un plan de l'espace passant par l'origine et B une droite de l'espace passant par l'origine. Donner $A \cap B$ et $A \cup B$ en fonction de la position de la droite par rapport au plan.

Exercice A.1.20

Soient A et B deux parties d'un ensemble E telles que $A \subset B$. Donner $A \cap B$ et $A \cup B$. Que se passe-t-il si $A = \emptyset$?

Exercice A.1.21

Pour toutes parties A, B et C de l'ensemble E, montrer les égalités ensemblistes suivantes :

— $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
— $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
— $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
— $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercice A.1.22

Pour toutes parties A et B de l'ensemble E, montrer que :

— $\complement(\complement A) = A$, $(A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A)$
— $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$, $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

Exercice A.1.23

Soit $E = \{1, 2, 3\}$, montrer, en les exhibant, que le nombre de parties de E est égal à 8.

Exercice A.1.24

Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^p a^{n-p} b^p + \ldots + C_n^n b^n$$

On rappelle que $0! = 1$, $C_n^p = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$.

Exercice A.1.25

Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ est différent de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Exercice A.1.26

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier n, formaliser le raisonnement par récurrence pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice A.1.27

En raisonnant par double implication, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R};\ ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow (a = 0,\ b = 0,\ c = 0).$$

Exercice A.1.28

Soit E un ensemble et soient les deux propositions :

— $\forall x \in E,\ (P(x)$ **ou** $Q(x))$,

— $(\forall a \in E,\ P(a))$ **ou** $(\forall b \in E,\ Q(b))$.

Trouver laquelle implique l'autre. Donner un contre-exemple pour l'implication qui n'est pas valable.

Exercice A.1.29

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, montrer que : $\exists c \in \mathbb{R},\ a < c < b$. La démonstration sera "constructive", c'est-à-dire que pour démontrer l'existence d'un tel c, vous allez en donner un explicitement.

Exercice A.1.30

Soit P une propriété dépendant d'une variable x, et soit $A_P = \{x \in E,\ P(x)\}$ l'ensemble des éléments qui vérifient cette propriété. Montrer que

$$(P \Rightarrow Q) \ \Leftrightarrow\ (A_P \subset A_Q)$$

Exercice A.1.31

Montrer par double implication que

$$\exists x \in E,\ ((P(x) \ \textbf{ou}\ Q(x)) \ \Leftrightarrow\ (\exists a \in E,\ P(a)) \ \textbf{ou}\ (\exists b \in E,\ Q(b))$$

La double implication signifie que pour démontrer que deux propositions sont équivalentes on démontre que l'une implique l'autre et réciproquement.

Exercice A.1.32

Montrer que

$$(\exists x \in E,\ P(x) \ \textbf{et}\ Q(x)) \Rightarrow (\exists a \in E,\ P(a)) \ \textbf{et}\ (\exists b \in E,\ Q(b))$$

puis trouver un contre-exemple mathématique pour démontrer que la réciproque est fausse.

Exercice A.1.33

Montrer que la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},, x + y = 0$ est vraie, alors que la proposition $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$ est fausse.

Exercice A.1.34

Soient $l \in \mathbb{R}$ et $(u_n) = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$, une suite de nombres réels. Nous nous intéresserons plus loin dans le cours à la propriété suivante, où ε désigne un réel :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

que l'on peut écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, P(n, \varepsilon)$$

En vous aidant d'un graphique, interprétez cette proposition, puis donner sa négation en précisant ce qu'est **non** $P(n, \varepsilon)$.

Exercice A.1.35

Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathscr{R} = \{(p, q), (p', q')) \in E \times E \mid pq' = p'q\}$, montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence.

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1

Écrire la négation des propositions suivantes : (on utilisera les quantificateurs)

1. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \leq 2$ et $g(x) = 0$.
2. Quel que soit n dans $\mathbb{Z}$, $n \leq 0$ ou $n > 0$.
3. Il existe au moins un x dans $\mathbb{R}$ tel que $e^x > 1$.
4. Il existe un unique x dans $\mathbb{R}$ tel que $e^x = 1$.
5. Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x}$ existe.
6. n est un entier positif implique que $n^3 - n$ est multiple de 3.

Exercice A.2.2

Soient E un ensemble et $P(x)$ une propriété satisfaite ou non par les éléments de E. Quel est le seul sous-ensemble A de E pour lequel l'implication

$$(\forall x \in A, P(x)) \Rightarrow (\exists x \in A, P(x)),$$

est fausse ?

On pourra utiliser le fait que l'assertion $(\forall x \in A, P(x))$ est une abréviation de l'assertion $\forall x (x \in A \Longrightarrow P(x))$, et que l'assertion $(\exists x \in A, P(x))$ est une abréviation de l'assertion $\exists x (x \in A \wedge P(x))$, tout particulièrement dans le cas $A = \emptyset$. On peut aussi travailler sur la négation de l'assertion initiale.

Exercice A.2.3

Soit E et F deux ensembles. Soit f une application qui à tout élément de E fait correspondre un élément, noté $f(x)$ de F. Soit la proposition

$$\forall x \in E, \forall y \in E, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y)).$$

1. Écrire la négation de cette proposition.
2. Écrire la contraposée de cette proposition.
3. Écrire la négation de la contraposée.
4. Comparer les deux négations obtenues en 1) et 3).

Exercice A.2.4

P, Q et R étant trois assertions quelconques :

1. Démontrer les **lois de Morgan** données ci dessous en utilisant une table de vérité :
   non $(P \vee Q) =$ **non** $P \wedge$ **non** Q et **non** $(P \wedge Q) =$ **non** $P \vee$ **non** Q
2. Démontrer que :
   (a) $(P \vee Q) \wedge R = (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
   (b) $(P \wedge Q) \vee R = (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
   (c) $P \vee (P \wedge Q) = P = P \wedge (P \vee Q)$

   Connues sous le nom de **lois de Boole.**

Exercice A.2.5

Soit n un entier relatif et $P(n)$ la proposition suivante :

$$(n^2 \text{ est pair}) \Rightarrow (n \text{ est pair})$$

1. Écrire la contraposée de $P(n)$ et démontrer que cette proposition est vraie.
2. Redémontrer cette proposition par l'absurde (on pourra calculer $n^2 - n$).

Exercice A.2.6

Soit E un ensemble. Soient A, B deux sous-ensembles de E. Démontrer que :

1. $A \cap B = A \iff A \subset B$.
2. $A \cup B = A \iff B \subset A$ (on pourra passer aux complémentaires).

Exercice A.2.7

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. On rappelle que $A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$. Montrer que

$$(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C.$$

2. On pose :

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

   Montrer que $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Exercice A.2.8

Démontrer par récurrence que

1. pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $2^n > n$,
2. pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p (entier que l'on déterminera), on a l'inégalité $2^n > n^2$.

Exercice A.2.9

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g sur $\mathbb{R}$;
13. f n'est pas inférieure à g.

Exercice A.2.10

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R};\ x + y = 0$
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R};\ x + y = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R};\ xy = 1$
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R};\ xy = 1$
5. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R};\ x + y = x$

Exercice A.2.11

1. Soit $P(x)$ une propriété des éléments de E. Déterminer la négation des propositions suivantes :
   (a) $\forall x \in E, P(x)$
   (b) $\exists x \in E, P(x)$
   (c) $\exists! x \in E, P(x)$
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer la négation des propositions suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2$
   (b) $\forall x \geq 2, f(x) \geq 2$
   (c) $\forall x \leq 2, f(x) \leq 2$
   (d) $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 2$

   Quels sont les liens logiques entre ces propositions ?

Exercice A.2.12 Les tests en informatique : UV de branche, NF04,...

En informatique, dès lors que l'on programme, on est confronté à la définition de tâches qui sont réalisées sous condition. Exprimons un cas typique de test utilisé en optimisation : on cherche une condition d'annulation de la fonction F, par une méthode utilisant la répétition de la tâche T. Le problème peut être défini comme suit :

1. Initialisation :
1.a $iteration = 0$ (iteration est un nom de variable)
1.b Génération de la variable $x(0)$
1.c Calcul de $F(x(0))$.

2. Condition de réalisation de la tâche T (test) :

Si *la valeur calculée de la fonction* $|F|$ *est supérieure à* 10^{-6} ***et*** *si le nombre d'itérations est inférieur à* 1000... **alors** début T

2.a $iteration = iteration + 1$

2.b générer la variable $x(iteration)$ au hasard

2.c Calcul de $|F(x(iteration))|$

fin T
Revenir au test 2.

(Une autre façon de voir la condition de réalisation est d'écrire : ***Tant que*** *la valeur calculée de la fonction* $|F|$ *est supérieure à* 10^{-6} ***et que*** *le nombre d'iteration est inférieur à* 1000... **alors** réaliser T.)

On exécute le programme et on constate que la tâche T n'a pas été réalisée ! Pourquoi ?

1. Écrire symboliquement la condition de réalisation de la tâche T.
2. Écrire sa contraposée.
3. Écrire sa négation.
4. Peut-on expliquer par l'une ou l'autre des deux écritures précédentes la non réalisation de la tâche T ?

Quand serait réalisée la tâche T si on changeait le **et** en **ou** dans la condition ? Répondre aux mêmes questions.

Annexe B
Exemples

B.1 Opérations logiques

Exemple B.1.1

Soient les deux propositions :

— P : n est un entier multiple de 3,

— Q : n est un entier pair,

La proposition (P **et** Q) est : n est un entier multiple de 6 (car 3 et 2 sont premiers entre eux).

Exemple B.1.2

L'implication suivante est vraie :

$$(1 = 2) \Rightarrow \text{"Tous les nombres sont nuls".}$$

En effet, si $1 = 2$, en retranchant 1 des deux membres de cette égalité on obtient $0 = 1$, puis en multipliant par un nombre x quelconque, on voit que $x = 0$.

Cet exemple montre qu'à partir d'une proposition fausse, on peut démontrer n'importe quoi.

Exemple B.1.3

P : le ciel à midi est sans nuage $\Rightarrow$ Q : le soleil brille. P est une condition suffisante de Q mais n'est pas une condition nécessaire (un nuage, bien placé dans le ciel, n'empêche pas le soleil de briller). Par contre Q est une condition nécessaire de P, en effet, à midi, pour que le ciel soit sans nuage il faut nécessairement que le soleil brille (mais ce n'est pas suffisant).

Exemple B.1.4

"Il existe des martiens riches et honnêtes" implique "il existe des martiens riches et il existe des martiens honnêtes". Par contre, "il existe des martiens riches et il existe des martiens honnêtes" n'implique pas "Il existe des martiens riches et honnêtes" (ce ne sont pas forcément les mêmes). Cet exemple montre que la réciproque de

$$(\exists x \in E,\ P(x) \ \textbf{et}\ Q(x)) \Rightarrow (\exists a \in E,\ P(a)) \ \textbf{et}\ (\exists b \in E,\ Q(b))$$

est fausse.

Annexe C
Documents

Document C.1 Tables de vérité

Définition C.0.1. *Soient P et Q deux propositions, R une proposition dépendant de P et Q (dans cet ordre). On associe à R le tableau suivant :*

P	Q	R
V	V	
F	V	
V	F	
F	F	

où l'on envisage tous les cas de figures possibles : P et Q sont vraies en même temps, P est vraie et Q est fausse ... en écrivant la valeur logique que prend R, dans la colonne qui lui correspond, pour chacun de ces cas de figure. Ce tableau est une ***table de vérité*** *de R.*
Par exemple si $R =$ **(**P **ou** Q**)**, sa table de vérité s'écrit :

P	Q	R
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Deux propositions R_1 et R_2 dépendant des mêmes propositions P et Q sont donc équivalentes si et seulement si leurs tables de vérité le sont.

Document C.2 Classes d'équivalence

Définition C.0.2. *Étant donnée une relation d'équivalence $\mathscr{R}$, on appelle* ***classe d'équivalence*** *de l'élément $a \in E$ la partie $\hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{E}$ définie par :*

$$\hat{a} = \{x \in E \mid x\mathscr{R}a\}.$$

Tous les éléments de $\hat{a}$ sont donc équivalents entre eux. On appelle ***ensemble quotient de E par*** *$\mathscr{R}$, que l'on note* ***E/***$\mathscr{R}$*, l'ensemble constitué des classes d'équivalences des éléments de E.*
L'ensemble des classes d'équivalences constitue une **partition** de E, c'est-à-dire une famille de sous-ensembles de E deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à E. En effet tout élément $a \in E$ appartient à la classe $\hat{a}$. Par ailleurs s'il existe $x \in \hat{a} \cap \hat{b}$ alors on a $x\mathscr{R}a$ et $x\mathscr{R}b$ et donc, d'après la transitivité, $a\mathscr{R}b$ ce qui implique $\hat{a} = \hat{b}$. Donc $\hat{a} \neq \hat{b} \Rightarrow \hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$, ce qui correspond bien à une partition.

Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathscr{R} = \{(p,q),(p',q')) \in E \times E \mid pq' = p'q\}$, alors la classe d'équivalence de (p,q) avec $q \neq 0$ est l'ensemble des (p',q') , $q' \neq 0$, tels que $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$. On peut alors construire un ensemble, noté $\mathbb{Q}$, comme l'ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par la relation d'équivalence précédente. Un élément de $\mathbb{Q}$, qui est appelé nombre rationnel, est donc la classe d'équivalence d'un couple (p,q), $q \neq 0$ et on le note, par abus de langage, $\frac{p}{q}$.

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.