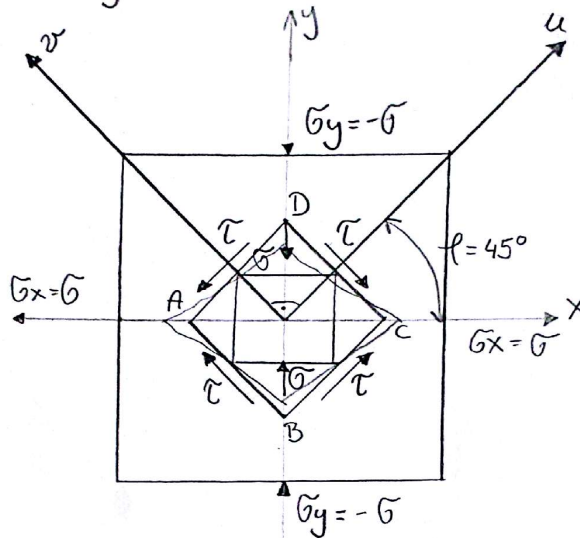


① ČISTO SMICANJE. OBJASNITI NA DIF. PARALELOPIPEDU

U svakoj tački napregnutog tijela možemo odrediti ravninu u kojoj su posmična naprezanja jednaka nuli, a normalna naprezanja primaju ekstremne vrijednosti.

Neka na paralelopedu djeluju samo normalna naprezanja $\sigma_x = \sigma$ i $\sigma_y = -\sigma$



$$\sigma_u = \sigma_x \cdot \cos^2 l + \sigma_y \sin^2 l = \sigma \cdot \cos^2 l - \sigma \cdot \sin^2 l = \sigma \cos 2l$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot \sin 2l = -\sigma \sin 2l$$

$l = 45^\circ$; normalno naprezanje je: $\sigma_u = 0$,
a posmično naprezanje je: $\tau_{uv} = \tau = -\sigma$

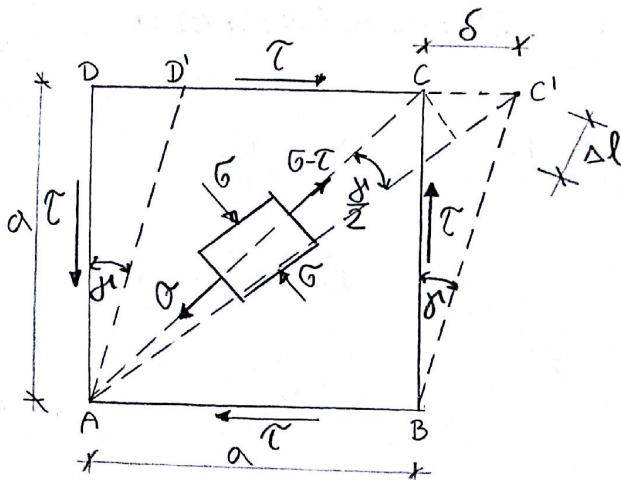
ČISTO SMICANJE JE NAPONSKO STANJE EKVALENTNO ISTODOBNOM ZATEZANJU I PRITISKU TAČKE SA JEDNAKIM INTENZITETOM U MEĐUSOBNO OKOMITIM SMJEROVIMA.

$$\epsilon = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \phi$$

Svaki element ima jednak volumen prije i nakon deformacije. Prema tome, posmična naprezanja mijenjaju samo oblik tijela, a ne mijenjaju njegov volumen.

ČISTO SMICANJE

STRANA: 1/2



δ - apsolutno smicanje
 μ - relativno smicanje

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\delta}{a}$$

$$\operatorname{tg} \mu \approx \mu \approx \frac{\delta}{a}$$

$$\mu_{xy} = 2 \epsilon_{xy}$$

$$\mu_{yz} = 2 \epsilon_{yz}$$

$$\overline{AC} = a\sqrt{2}$$

\overline{AC} - početna dijagonala

$$\Delta l = \overline{C'C''} = \overline{CC'} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \approx \overline{CC'} \cdot \cos 45^\circ = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\delta}{\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{a} = \frac{1}{2} \mu$$

$$\epsilon = \epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E};$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 + \tau$$

$$\frac{\tau}{E} (1 + \nu) = \frac{\mu}{2}$$

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \mu = G \cdot \mu$$

modul smicanja

$$T = A \cdot \tau$$

T - rezultantna sila smicanja

$$\tau = \frac{T}{A}$$

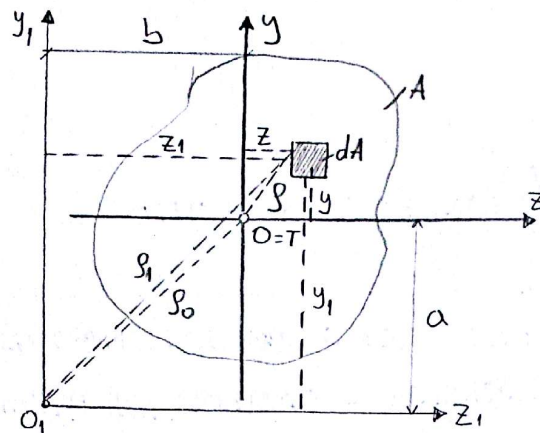
Pod djelovanjem posmičnih naprezanja τ nastupit će smicanje stranice DC usporedno sa stranicom AB za veličinu $\overline{DD'} = \overline{CC'} = \delta$, koju nazivamo **APSOLUTNO SMICANJE**.

Kvadrat ABCD prelazi u romb ABC'D'. Dužine stranica se ne mijenjaju, mijenjaju se samo uglovi među stranicama, pravi uglovi su postali oštri, odnosno tupi uglovi i njihova je promjena određena uglom μ . Taj ugao nazivamo: **RELATIVNO SMICANJE** i služi kao mjera deformacije.

ČISTO SMICANJE

STRANA: 2/2

② PROMJENA MOMENTA INERCIJE PRI TRANSLACIJI KOORD. SISTEMA.
(ŠTAJNEROVO PRAVILO)



Neka su nam poznati momenti inercije presjeka s obzirom na coord. osi z i y koje prolaze težištem presjeka T :

$$I_z = \int_A y^2 dA ; I_y = \int_A z^2 dA ; I_{zy} = \int_A yz dA$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA ; I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA ; I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA$$

$$z_1 = z + b$$

$$y_1 = y + a$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA$$

$$I_{y_1} = \int_A (z+b)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2b \int_A z dA + b^2 \int_A dA$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A (z+b)(y+a) dA = \int_A zy dA + a \int_A z dA + b \int_A y dA + ab \int_A dA$$

$$S_z = S_y = 0$$

$$\left. \begin{aligned} I_{z_1} &= I_z + a^2 \cdot A \\ I_{y_1} &= I_y + b^2 \cdot A \\ I_{z_1 y_1} &= I_{zy} + a \cdot b \cdot A \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{MOMENTI INERCIJE} \\ \text{KOD TRANSLACIJE} \end{array}$$

ŠTAJNEROVO
PRAVILO

STRANA: 112

- Polarni momenat inercije

$$I_{P_1} = \int_A \rho_1^2 dA$$

$$I_{P_1} = I_z + I_y + (a^2 + b^2) \cdot A$$

$$a^2 + b^2 = \rho_0^2$$

$$I_{P_1} = I_P + \rho_0^2 \cdot A \rightarrow \text{ŠTAJNEROVO PRAVILO}$$

AKSIJALNI MOMENT INERCIJE PRESJEKA S OBZIROM NA ZADANU OS JEDNAK JE ZBIRU MOMENTA INERCIJE S OBZIROM NA PARALELNU TEŽIŠNU OS I PROIZVODA POVRŠINE PRESJEKA I KOORDINATA TEŽIŠTA PRESJEKA U ZADANOM KOORD. SISTEMU.

③ GLAVNE OSI I GLAVNI MOMENTI INERCIE

Pri rotaciji koordinatnog sistema mijenja se ugao φ .
 To znači da postoji takav ugao φ pri kojem će jedan od aksijalnih momenata inercije imati maksimum, a drugi minimum.

$$\frac{dl_{z1}}{d\varphi} = -2 \left(\frac{l_z - l_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + l_{zy} \cos 2\varphi \right) = -2 l_{zy} \varphi$$

$$\frac{dl_{y1}}{d\varphi} = 2 \left(\frac{l_z - l_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + l_{zy} \cos 2\varphi \right) = 2 l_{zy} \varphi$$

$$\left(\frac{dl_{z1}}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = -2 l_{zy} \varphi_0 = \phi \quad ; \quad \left(\frac{dl_{y1}}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 2 l_{zy} \varphi_0 = \phi$$

$$l_{zy} = \frac{l_z - l_y}{2} \sin 2\varphi_0 + l_{zy} \cos 2\varphi_0 = 0$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{-2 l_{zy}}{l_z - l_y}} \quad (1)$$

Ugao koji zatvaraju glavne osi inercije

Veličine glavnih momenata inercije možemo dobiti ako uvrstimo da je $\varphi = \varphi_0$

$$l_u = l_z \cos^2 \varphi_0 + l_y \sin^2 \varphi_0 - l_{zy} \sin 2\varphi_0 \quad (2)$$

$$l_v = l_z \sin^2 \varphi_0 + l_y \cos^2 \varphi_0 + l_{zy} \sin 2\varphi_0 \quad (3)$$

$$l_u + l_v = l_z + l_y \quad (3)$$

$$l_u - l_v = l_z - l_y \cos 2\varphi_0 - 2 l_{zy} \sin 2\varphi_0 \quad (4)$$

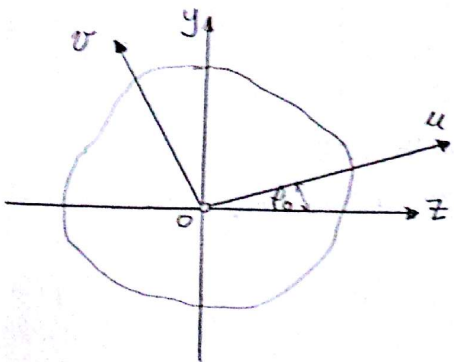
$$-2 l_{zy} = (l_z - l_y) \operatorname{tg} 2\varphi_0 \quad (5)$$

$$(5) \rightarrow (4)$$

$$l_u - l_v = l_z - l_y \cos 2\varphi_0 + (l_z - l_y) \operatorname{tg} 2\varphi_0 \sin 2\varphi_0$$

$$l_u - l_v = (l_z - l_y)$$

$$\cos 2\varphi_0 + \operatorname{tg} 2\varphi_0 (\sin 2\varphi_0) = \cos 2\varphi_0 + \frac{\sin^2 2\varphi_0}{\cos 2\varphi_0}$$



GLAVNE OSI I GLAVNI
 MOMENTI INERCIE

STRANA: 1/2

$$I_u - I_v = (I_z - I_y) \cdot \frac{1}{\cos 2\theta_0} \quad (6)$$

$$= \frac{\cos^2 2\theta_0 + \sin^2 2\theta_0}{\cos 2\theta_0} = \frac{1}{\cos 2\theta_0}$$

$$\cos 2\theta_0 > 0 \rightarrow I_z > I_y, \\ I_u > I_v$$

$$\left. \begin{aligned} I_u &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \frac{1}{\cos 2\theta_0} \\ I_v &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \frac{1}{\cos 2\theta_0} \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\frac{1}{\cos 2\theta_0} = \pm \sqrt{1 + \tan^2 2\theta_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4I_{zy}^2}{(I_z - I_y)^2}}$$

$$I_u = \frac{I_z - I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$$

$$I_v = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$$

$$I_{uv} = 0$$

GLAVNI MOMENTI INERCIE presjeka su ekstremne vrijednosti momenta inercije, a pripadajuće osi se zovu GLAVNE OSI INERCIE PRESJEKA.

$I_z > I_y$ gornji predznak ; $I_z > I_y \rightarrow I_u = I_{\max}, I_v = I_{\min}$

$I_z < I_y$ donji predznak ; $I_z < I_y \rightarrow I_u = I_{\min}, I_v = I_{\max}$

Ako poznamo glavne momente inercije za koje je zarotiran sistem, onda moment inercije možemo dobiti:

$$I_z = I_u \cos^2 \theta + I_v \sin^2 \theta$$

$$I_y = I_u \sin^2 \theta + I_v \cos^2 \theta$$

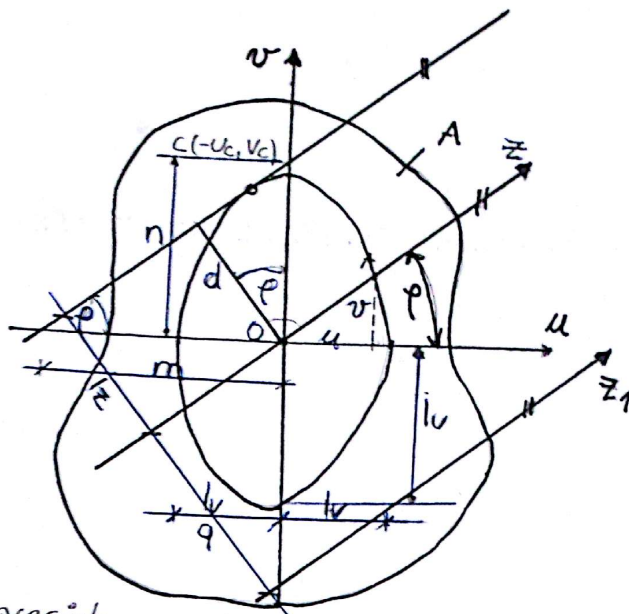
$$I_{zy} = \frac{I_u - I_v}{2} \cdot \sin 2\theta$$

Ako se ishodište podudara sa težištem popr. presjeka, onda se glavne osi nazivaju GLAVNE SREDIŠNJE OSI INERCIE, a glavni momenti inercije GLAVNI SREDIŠNI MOMENTI INERCIE.

GLAVNE OSI I GLAVNI
MOMENTI INERCIE

STRANA: 2/2

4.) ELIPSA INERCIJE



Moment inercije presjeka u odnosu na proizvoljnu osu z će biti

$$I_z = I_u \cos^2 \varphi + I_v \sin^2 \varphi \quad | \cdot A$$

$$i_z^2 = i_u^2 \cos^2 \varphi + i_v^2 \sin^2 \varphi \quad (*)$$

$$\overline{OA} = \frac{i_u \cdot i_v}{i_z}$$

$$\sin \varphi = \frac{v}{\overline{OA}} = \frac{i_z}{i_u \cdot i_v} \cdot v$$

$$\cos \varphi = \frac{u}{\overline{OA}} = \frac{i_z}{i_u \cdot i_v} \cdot u$$

(**)

(**) → (*)

$$i_z^2 = i_u^2 \cdot \frac{i_z^2}{i_u^2 \cdot i_v^2} \cdot u^2 + i_v^2 \cdot \frac{i_z^2}{i_u^2 \cdot i_v^2} \cdot v^2$$

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1$$

JEDNAČINA ELIPSE
(elipsa inercije presjeka)

$i_u = i_v = i \Rightarrow$ prelazi u KRUŽNICU

$$u^2 + v^2 = i^2$$

ELIPSA INERCIJE

STRANA: 1/2

Ako na elipsu povučemo tangentu paralelnu sa osi z i potražimo udaljenost do osi z , dobijemo:

$$m = \frac{d}{\sin \varphi} \quad ; \quad n = \frac{d}{\cos \varphi}$$

$$\frac{u}{-m} + \frac{v}{n} = 1$$

JEDNAČINA TANGENTE NA ELIPSI

$$-\frac{u}{\left(\frac{d}{\sin \varphi}\right)} + \frac{v}{\left(\frac{d}{\cos \varphi}\right)} = 1 \quad (a)$$

$$\frac{u(-u \cdot c)}{i \cdot v^2} + \frac{v(v \cdot c)}{i \cdot a^2} = 1$$

$$\frac{u}{\left(-\frac{c v^2}{u}\right)} + \frac{v}{\left(\frac{c u^2}{v}\right)} = 1 \quad (b)$$

$$\frac{i v^2}{u c} = \frac{d}{\sin \varphi} \quad ; \quad \frac{i u^2}{v c} = \frac{d}{\cos \varphi}$$

$$u c = \frac{i v^2}{d} \cdot \sin \varphi \quad ; \quad v c = \frac{i u^2}{d} \cdot \cos \varphi \quad (c)$$

$v = u \tan \varphi + n \rightarrow$ eksplicitni oblik j -ne pravca

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot u + \frac{d}{\cos \varphi} \Rightarrow d = u \cdot c \cdot \sin \varphi + v c \cdot \cos \varphi \quad (d)$$

(c) \rightarrow (d)

$$d^2 = i u^2 \cos^2 \varphi + i v^2 \sin^2 \varphi$$

$$d = i \cdot z$$

$$|z| = |z^2| \cdot A$$

Ako nam je poznata središnja elipsa inercije, moment inercije u odnosu na os z_1 možemo odrediti prema Štajnerovu pravilu:

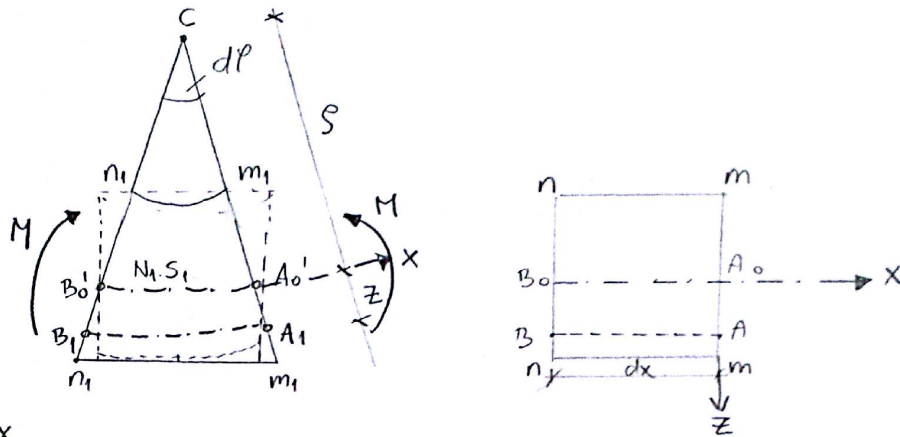
$$|z_1| = |z| + a^2 \cdot A = (i z^2 + a^2) \cdot A$$

ELIPSA INERCIJE

STRANA: 2/2

5) DEFINIRATI IZRAZ ZA ODREĐIVANJE UGLA ZAOKRETA PRI ČISTOM SAVIJANJU U POPR. PRESJEKU.

Iskrivljenje osi štapa vezano je na uzajamno zaokretanje popr. presjeka. Prema slici dužina A_0B_0 jednaka je $A_0B_0 = dx = A_0'B_0' = S d\varphi$. Odatle slijedi da je ugao zaokreta dva popr. presjeka na udaljenosti dx :



$$d\varphi = \frac{dx}{\rho}$$

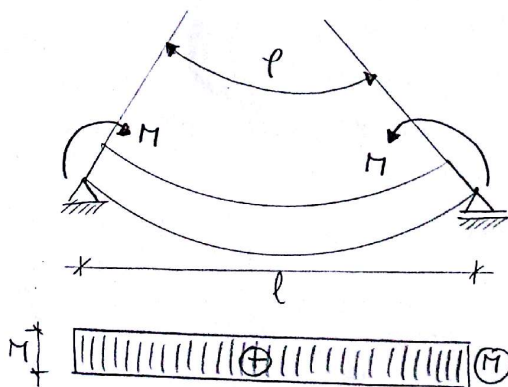
Ako umjesto $\frac{1}{\rho}$ uvrstimo $\frac{M}{E \cdot I_y}$, dobijemo: $d\varphi = \frac{M \cdot dx}{E \cdot I_y}$

Ugao zaokreta između krajnjih tačaka štapa dužine l , dobićemo integriranjem gornjeg izraza:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M dx}{E \cdot I_y}$$

Pri čistom savijanju štapa konst. krutosti dobivamo

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{E \cdot I_y}$$



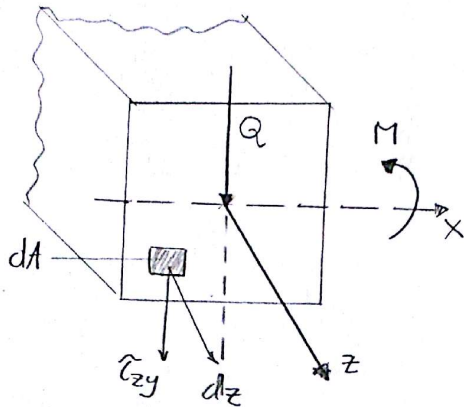
Iz izraza slijedi da je ugao zaokreta između dvije tačke presjeka jednak površini dijagrama momenta savijanja podjeljenoj sa fleksijskom krutošću štapa.

DEFINIRATI IZRAZ ZA ODREĐIVANJE UGLA ZAOKRETA PRI ČISTOM SAVIJANJU

⑥ RAZLIKA IZMEĐU ČISTOG SAVIJANJA I SAVIJANJA SILAMA

Kod savijanja silama u nekom popr. presjeku štapa, osim momenta savijanja M javlja se i poprečna sila Q .

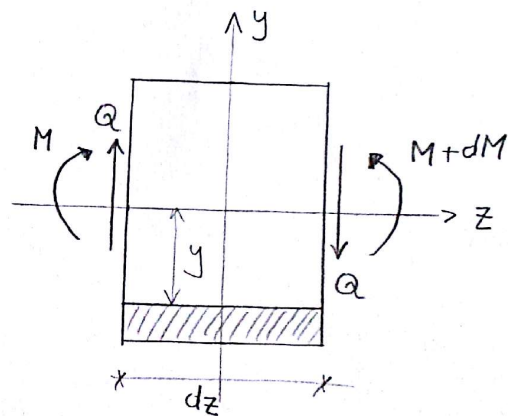
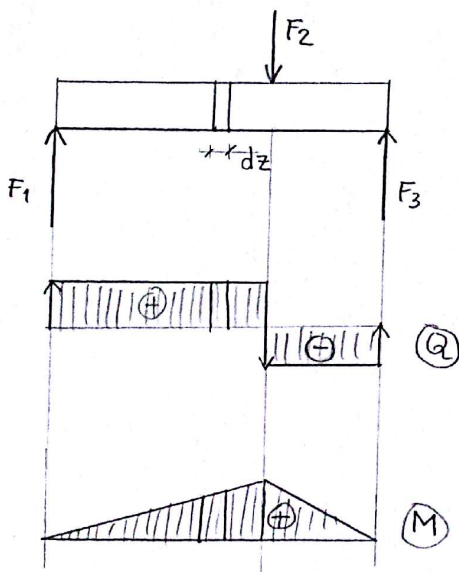
Moment savijanja uzrokuje normalno naprezanje $\tilde{\sigma}_z$, a poprečna sila tangencijalno naprezanje $\tilde{\tau}_{xy}$ i predstavlja rezultantu unutrašnjih sila.



$$Q = \int_A \tilde{\tau}_{xy} dA$$

IZRAZ ZA POSMIČNO NAPREZANJE
PRI SAVIJANJU SILAMA

Veličinu tangencijalnog naprezanja $\tilde{\tau}_{xy}$ dobit ćemo razmatranjem elementa dužine dz .



RAZLIKA IZMEĐU ČISTOG
SAVIJANJA I SAVIJANJA
SILAMA

STRANA: 112

Ako vrijedi da je $\tilde{\tau}_{yz} = \tilde{\tau}_{zy}$, čija se raspodjela može smatrati konstantnom po površini bdz onda vrijedi:

$$\sum z = 0$$

$$-\int_{A_1} \tilde{\sigma}_z dA_1 - \tilde{\tau}_{yz} b dz + \int_{A_1} (\tilde{\sigma}_z + d\tilde{\sigma}_z) dA_1 = 0$$

Ako znamo da je $\tilde{\sigma}_z = \frac{Mx}{Ix} \cdot y$ onda vrijedi:

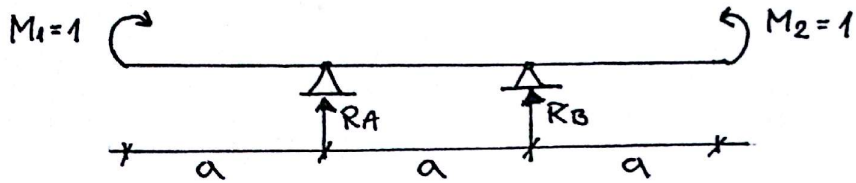
$$\tilde{\tau}_{yz} = \frac{dM}{dz} \cdot \int_{A_1} y dA_1$$

Budući da je $\frac{dM}{dz} = Q$, onda konačan izraz glasi:

$$\tilde{\tau}_{zy} = \tilde{\tau}_{yz} = \frac{Q \cdot S_x}{b \cdot I_x}$$

gdje je $S_x = \int_{A_1} y dA_1$ - STATIČKI MOMENT POUVRŠINE A_1 .

7) PRIMJENOM ANALITIČKE METODE ODREDITI IZRAZE ZA PROGIB I UGAO ZAKRETA GREDE SA DVA PREPUSTA...



$$R_A = R_B = 0$$

$$M_x = M_1 \cdot x^0 - M_2 (x-3a)^0$$

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x) = -M_1 \cdot x^0 + M_2 (x-3a)^0$$

$$\frac{dw}{dx} = -M_1 x + M_2 (x-3a) + C$$

$$E \cdot I \cdot w = -M_1 \frac{x^2}{2} + M_2 \frac{(x-3a)^2}{2} + Cx + 0$$

$$w(0) \neq 0 \rightarrow 0 \neq 0$$

$$w(a) = -M_1 \cdot \frac{a^2}{2} + M_2 \cdot 2a^2 + Ca + 0 = 0$$

$$w(2a) = -M_1 \cdot 2a^2 + M_2 \frac{a^2}{2} + 2Ca + 0 = 0$$

$$0 = M_1 \cdot \frac{a^2}{2} - M_2 \cdot 2a^2 - Ca$$

$$-M_1 2a^2 + M_2 \cdot \frac{a^2}{2} + 2Ca$$

$$= -M_1 \frac{a^2}{2} + M_2 a^2 + Ca$$

$$\boxed{C = 3Ma}$$

PRIMJER ZA PROGIB I
UGAO ZAKRETA

STRANA: 111

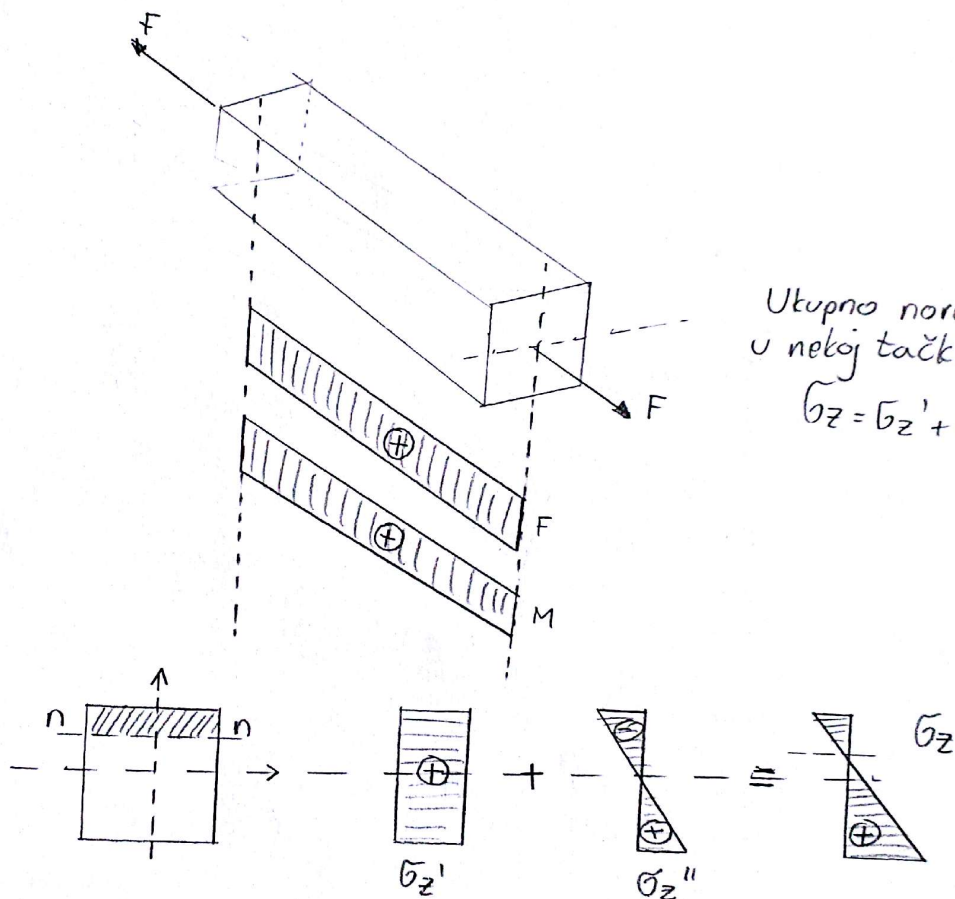
⑧ SLOŽENO OPTEREĆENJE, SAVIJANJE I AKSIJALNO OPTEREĆENJE.

Razmotrimo štap pravouglog oblika opterećenog zatežućom silom F i momentima M . Ako uzmemo da vrijedi $N=F$, onda se pojavljuje normalno naprezanje σ_z' i vrijedi:

$$\sigma_z' = \frac{N}{A}$$

Moment savijanja $M_x=M$ u istom presjeku uzrokuje pojavu normalnog naprezanja σ_z'' i vrijedi:

$$\sigma_z'' = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$



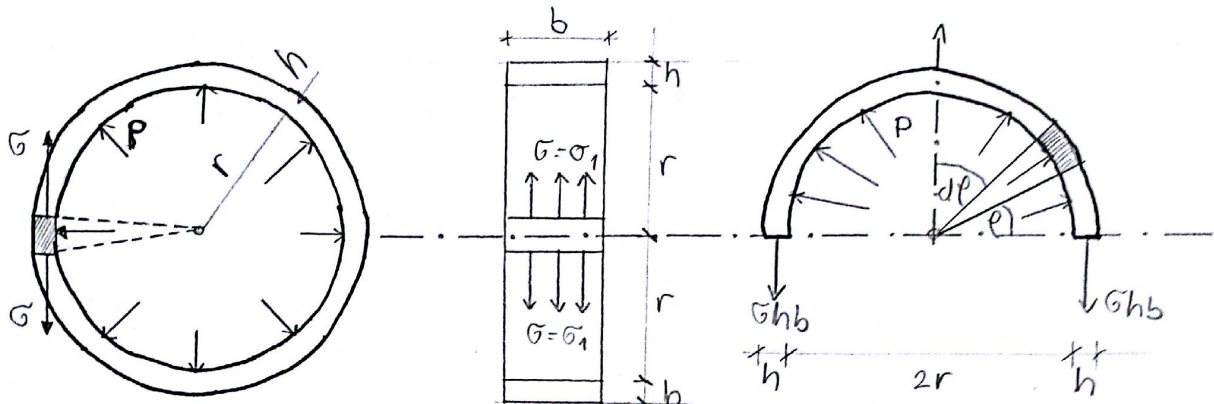
Ekstremne vrijednosti normalnog naprezanja javljaju se u gornjem odnosno donjem rubu presjeka. Neutralna osa se ne poklapa sa osom štapa već je paralelno pomaknuta i dijeli presjek na zategnutu i pritisnutu zonu. U opštem slučaju za σ_{zmax} vrijedi:

$$\sigma_{zmax} = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x}$$

SLOŽENO OPTEREĆENJE,
SAVIJANJE I AKS. OPTEREĆENJE

STRANA: 1/1

9) DEFINISATI IZRAZE ZA NAPREZANJE I DEFORMACIJU TANKOG, KRUŽNOG PRSTENA



Tanki kružni prsten poluprečnika r , debljine stijence h i širine b podvrgnut je djelovanju unutarnjeg pritiska p . Pod djelovanjem unutarnjeg pritiska p dolazi do jednolikog rastezanja prstena.

$$r_1 = r, r_2 = \mathcal{L}, \sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0$$

$$\sigma = \frac{p \cdot r}{h}$$

Na unutarnjoj površini $\sigma_3 = -p$, a na vanjskoj $\sigma_3 = 0$

Budući da je $r > h$, slijedi da je $\sigma > p$, pa se p u odnosu na σ može zanemariti i uzeti da je i $\sigma_3 = 0$, tako da se element prstena nalazi u jednoosnom stanju naprezanja.

Deformacija prstena je data izrazom:

$$\epsilon = \frac{\Delta r}{r}, \text{ pomoću Hukovog zakona dobivamo:}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{p \cdot r}{E \cdot h} = \frac{\Delta r}{r}$$

a povećanje poluprečnika je $\Delta r = \frac{p \cdot r^2}{E \cdot h}$

DEF. IZRAZE ZA NAPREZANJE I DEFORM. TANKOG, KRUŽNOG, PRSTENA

STRANA: 111

⑩ BRZA PITANJA

A.) Koji je presjek racionalniji sa aspekta nosivosti na savijanje, PRAVUGAONI ili I presjek.

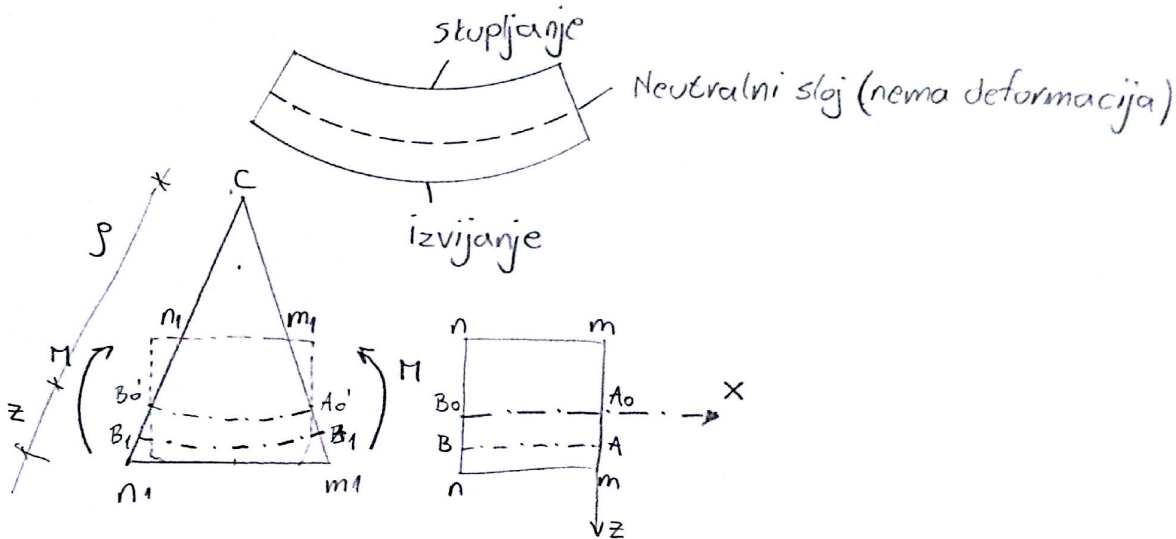
Odgovor: Racionalniji je I presjek.

B.) Koji presjek je racionalniji sa aspekta nosivosti na torziju, PUNI ili ŠUPLJI.

Odgovor: Racionalniji, odnosno bolje iskorišten materijal je kod ŠUPLJEG PRESJEKA, zato jer su max. naprezanja na rubu popr. presjeka, a min naprezanja su u osi štapa, a kod štapa šupljeg popr. presjeka uklonjen je dio materijala u blizini središta u tome bi imali veoma mala naprezanja pa tako faktički štap šupljeg popr. presjeka može izdržati jednako opterećenje ali sa manjim utroškom materijala

11. DEFINIRATI IZRAZ ZA ZAKRIVLJENOST NEUTRALNE OSI NOSAČA

Prilikom savijanja nosača njegova vlakna se izvijaju i skupljaju, ali postoji i neutralni sloj u kojem nema deformacija.



Relativno produljenje A-B na udaljenosti Z od neutralnog sloja.

$$\epsilon_x = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB}$$

$AB = A_0 B_0 \Rightarrow dx = A_0' B_0' = \rho d\varphi$ - dužina prije
 $A_1 B_1 = (\rho + z) d\varphi$ - poslije izvijanja

$$\epsilon_x = \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho} \rightarrow \text{Uvodeći Hukov zakon}$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_x}{E} = \frac{z}{\rho} \Rightarrow \tilde{\sigma}_x = \frac{z}{\rho} \cdot E$$

$$\int \frac{z}{\rho} \cdot E \cdot dA = 0 \quad \frac{E}{\rho} \int z dA = 0$$

$$\frac{E}{\rho} \int z^2 dA = M$$

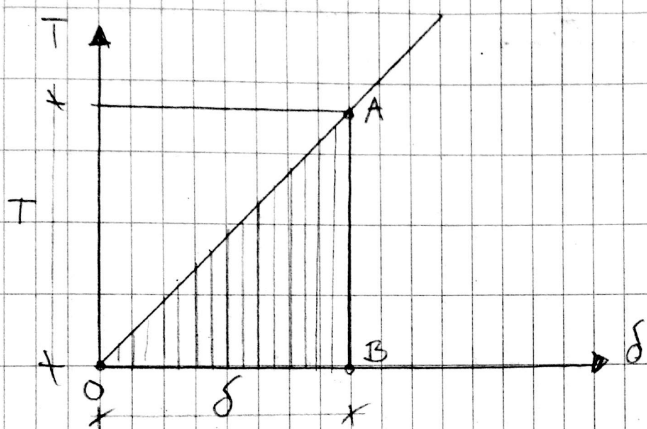
$$\frac{E}{\rho} \cdot I_y = M$$

$\frac{1}{\rho} = \frac{Mz}{I_y \cdot E}$ - krutost presjeka zakrivljenosti neutralne osi nosača.

DEFINIRATI IZRAZ ZA ZAKRIVLJENOST NEUTRALNE OSI NOSAČA

STRANA: 111

* Potencijalna energija deform. pri čistom smicanju *



$$U = W = \frac{T \cdot \delta}{2}$$

$$\frac{A}{T} = \tilde{c} \Rightarrow \tilde{c} = G \cdot \mu$$

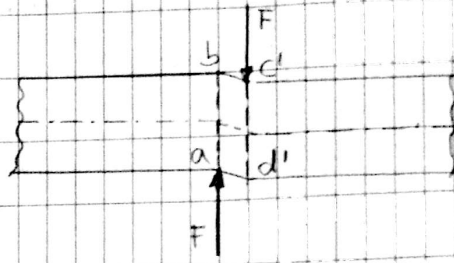
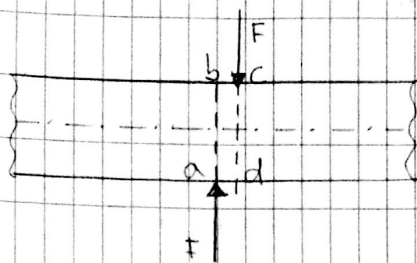
$$\mu = \frac{\delta}{A}$$

$$\delta = \frac{T \cdot a}{G \cdot A}$$

$$U = \frac{T^2 \cdot a}{2A \cdot G}$$

IZRAZ ZA POTENCIJALNU ENERGIJU DEFORMACIJA
PRI ČISTOM SMICANJU

* Proračun elemenata opterećenih na smicanje *



$$T = F$$

$$\int_A \tau dA = T$$

Ako pretpostavimo da su naprezanja τ jednako raspodjeljena po čitavome poprečnom presjeku A, dobit ćemo:

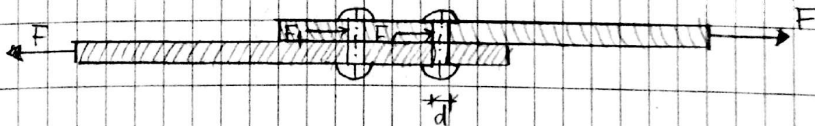
$$\tau \cdot A = T = F$$

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{F}{A} \rightarrow \text{OSREDNJO SMIČUĆE NAPREZANJE}$$

$$\sigma \leq \sigma_{dop}$$

$$\tau \leq \tau_{dop}$$

Npr: Veza dvije čelične ploče sa zatovicama



1. DOKAZ - dokaz smicanja zatovice (odjeza) koje se dešava po ravlinama

$$F_1 = \frac{F}{n} \quad (n=4)$$

$$a.) \tau = \frac{F}{A} = \frac{F_1}{\frac{d \cdot \pi}{4}} \leq \tau_{dop} \text{ po omotaču}$$

b.) Dokaz bočnog pritiska na tijelo zakovice

$$\sigma_0 = \frac{F_1}{d \cdot t} \leq \sigma_{dop}$$

d - prečnik

t - debljina čelične ploče

c.) Dokaz loma ploče u oslabljenom presjeku

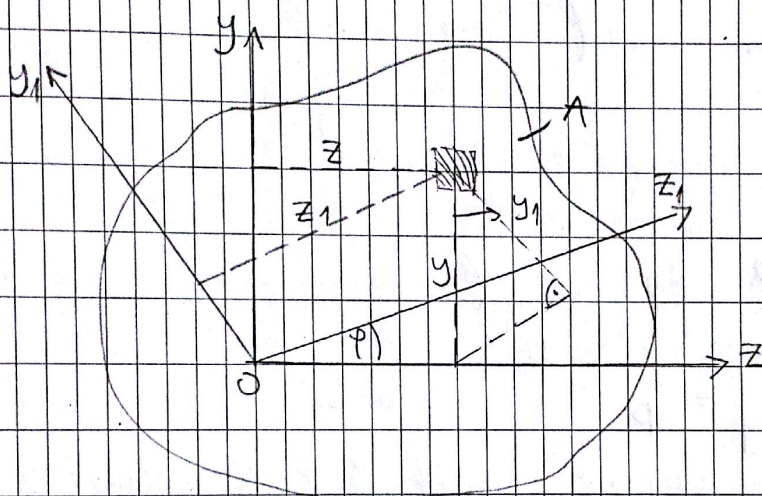
$$\sigma = \frac{F}{t \cdot (b - md)} \leq \sigma_{dop}$$

d.) Dokaz presjecanja zakovice kroz čeličnu ploču

$$\tau = \frac{F_1}{2 \cdot (c - \frac{d}{2}) \cdot t}$$

* Promjena momenta inercije pri rotaciji koordinatnog sistema *

Neka je zadano tijelo površine A , smješteno u koordinatni sistem y, z i u tom dijelu označena je dif. površina dA koja ima označene koordinate y, z i ako uvedemo drugi coord. sistem y_1, z_1 koji zarotiramo za ugao ρ u odnosu na glavni sistem, onda će naša dif. površina imati koordinate y_1, z_1 .



$$z_1 = z \cos \rho + y \sin \rho$$

$$y_1 = y \cos \rho - z \sin \rho$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \rho - z \sin \rho)^2 dA$$

$$= \cos^2 \rho \int_A y^2 dA + \sin^2 \rho \int_A z^2 dA - 2 \cos \rho \sin \rho \int_A zy dA$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \rho + y \sin \rho)^2 dA$$

$$= \sin^2 \rho \int_A y^2 dA + \cos^2 \rho \int_A z^2 dA + 2 \sin \rho \cos \rho \int_A zy dA$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z \cos \rho + y \sin \rho)(y \cos \rho - z \sin \rho) dA$$

$$= (\cos^2 \rho - \sin^2 \rho) \int_A zy dA + \sin \rho \cos \rho \left(\int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA \right) \cdot \frac{\sin 2\rho}{2}$$

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - I_{zy} \sin 2\varphi$$

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \varphi + I_y \cos^2 \varphi + I_{zy} \sin 2\varphi$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} \cos 2\varphi + \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\varphi$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} ; \quad \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} I_z + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} I_y - I_{zy} \sin 2\varphi \\ \oplus &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\varphi - I_{zy} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\varphi + I_{zy} \sin 2\varphi$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\varphi + I_{zy} \cos 2\varphi$$

$$\boxed{I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y} = I_p$$

ZBIR MOMENATA INERCIE (uvijek je konstantan u svakoj ravni)

$$\varphi = 90^\circ$$

$$I_{z_1} = I_y ; \quad I_{y_1} = I_z ; \quad I_{z_1 y_1} = -I_{zy}$$

* Mohrova kružnica inercije *

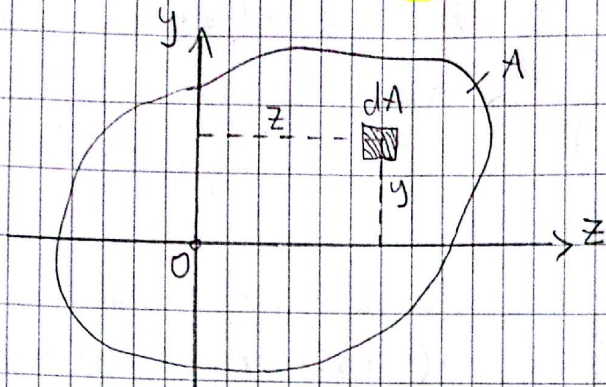
$$\left. \begin{aligned} I_z - \frac{I_u + I_v}{2} &= \frac{I_u - I_v}{2} \cos 2\varphi \quad I^2 \\ I_{zy} &= \frac{I_u - I_v}{2} \cdot \sin 2\varphi \quad I^2 \end{aligned} \right\} \oplus$$

$$\left(I_z - \frac{I_u + I_v}{2} \right)^2 + I_{zy}^2 = \left(\frac{I_u - I_v}{2} \right)^2$$

Smještena je u sistem I_z, I_{zy}

Središte $S \left(\frac{I_u + I_v}{2}, 0 \right)$

* Poluprečnik inercije *



$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Vrijednost momenta inercije neće se promijeniti ako uvrstimo srednju vrijednost y_s^2 koja bi predstavljala koordinatu tačke u koju bi se skoncentrisala površina A zadanog presjeka.

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_A y_s^2 dA = \int_A i_z^2 dA$$

$$i_z^2 \int_A dA = i_z^2 \cdot A \quad ; \quad I_y = i_y^2 \cdot A$$

(i_y, i_z) - su coord. tačke u koju bi trebalo skoncentrisati površinu A zadanog presjeka tako da on ima isti moment inercije kao površina stvarnog presjeka.

(i_y, i_z) - poluprečnici inercije presjeka
[L]

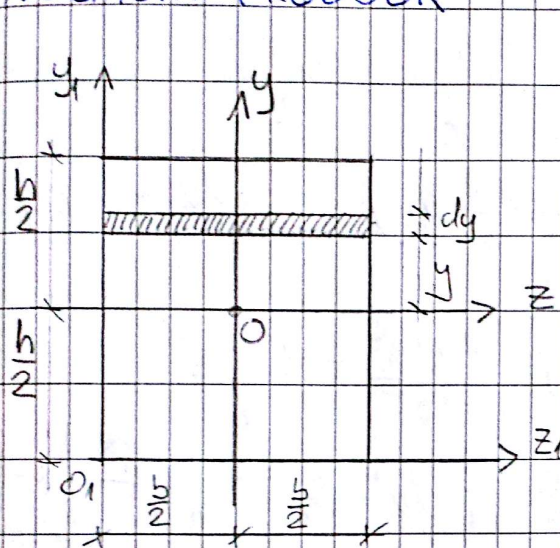
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} \quad ; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$$

* MOMENTI INERCIJE NEKIH JEDNOSTAVNIJIH PRESJEKA *

1) PRAVUGAONI PRESJEK



$$I_z = \int_A y^2 dA = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy$$

$$= z b \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \frac{h b^3}{12}$$

$$I_{zy} = 0$$

$$I_p = I_z + I_y = \frac{b h}{12} (b^2 + h^2)$$

$$I_{z_1} = I_z + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot A = \frac{b h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{b h^3}{3}$$

$$I_{y_1} = I_y + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot A = \frac{h b^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{h \cdot b^3}{3}$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + \left(\frac{b}{2}\right) \left(\frac{h}{2}\right) \cdot A = 0 + \left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{h}{2}\right) \cdot b \cdot h = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

MOMENTI INERCIJE ZA PRAVUGAONIKI PRESJEK (Štajnerovo pravilo)

MOMENTI 2.) KRUŽNI PRESJEK

y^

$$dA = 2\pi \rho d\rho$$

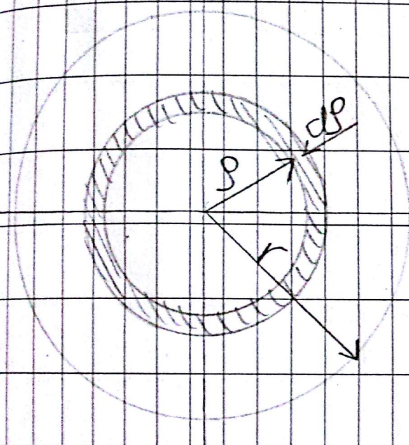
$$I_P = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho$$

$$2\pi \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{r^4 \pi}{2} = \frac{d^4 \pi}{32}$$

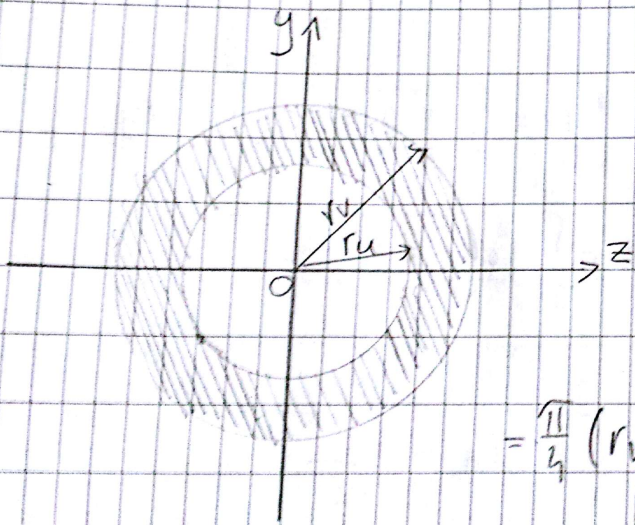
$$I_z = I_y; I_{zy} = 0$$

$$I_z = I_y = I_P \Rightarrow 2I_z = I_P \Rightarrow I_z = \frac{I_P}{2}$$

$$I_z = I_y = \frac{r^4 \pi}{4} = \frac{d^4 \pi}{64}$$



3.) PRESJEK OBLIKA KRUŽNOG PRSTENA



$$P = \frac{r_v^2 \pi}{2} = \frac{r_u^2 \pi}{2}$$

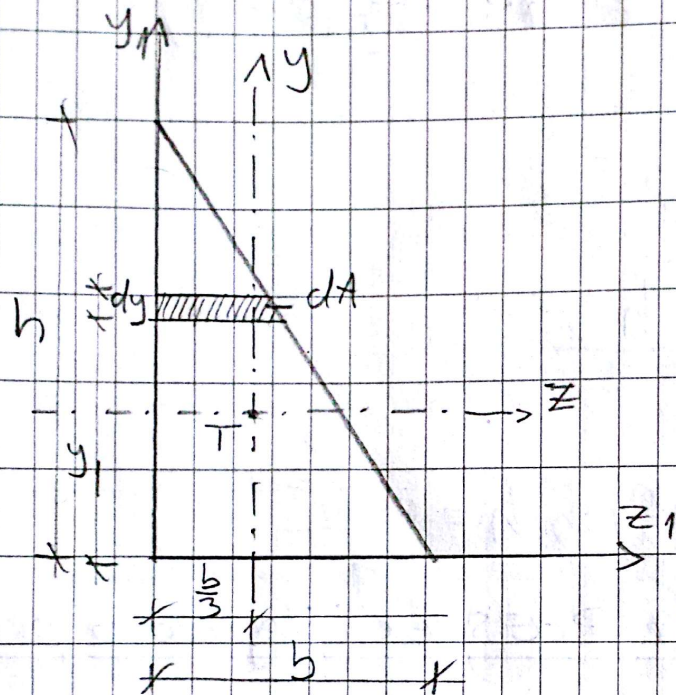
$$\frac{\pi}{2} (r_v^2 - r_u^2) = \frac{\pi}{32} (d_v^2 - d_u^2)$$

$$I_z = I_y = \frac{r_v^4 \pi}{4} - \frac{r_u^4 \pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} (r_v^4 - r_u^4) = \frac{\pi}{64} (d_v^4 - d_u^4) = \frac{d_v^4 \pi}{64} \left[1 - \left(\frac{d_u}{d_v} \right)^4 \right]$$

$$I_{zy} = 0$$

④ TROKUTNI PRESJEK



$$I_z = \frac{bh^3}{36} \quad ; \quad I_y = \frac{hb^3}{36} \quad ; \quad I_{zy} = \frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad I_{y_1} = \frac{hb^3}{12} \quad ; \quad I_{z_1y_1} = \frac{b^2h^2}{24}$$

* MOMENT OTPORA RAVNIH PRESJEKA

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad [L^3]$$

W_z - aksijalni moment otpora

$$W_p = \frac{I_p}{S_{\max}}$$

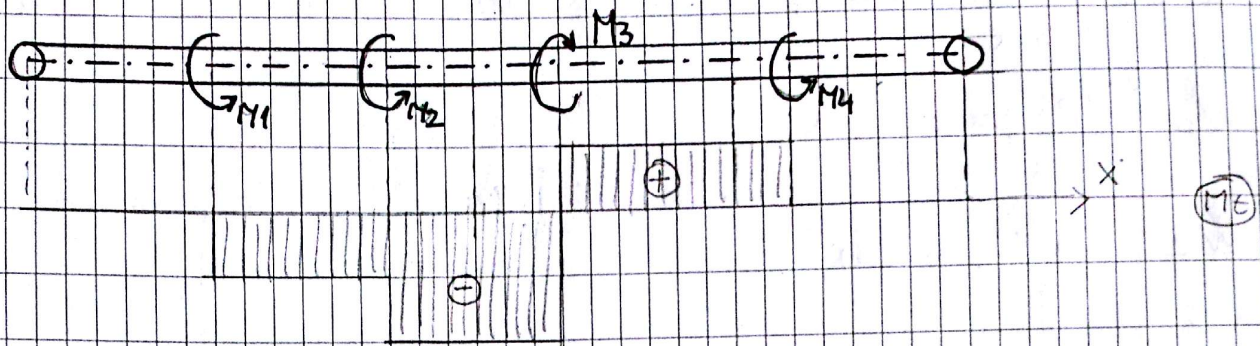
$$W_z = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{hb^3}{6} \quad - \text{kvadratni presjek}$$

$$W_z = W_y = \frac{\frac{r^4 \pi}{4}}{r} = \frac{r^3 \pi}{4} \quad - \text{aksijalni moment otpora kružnog presjeka}$$

$$W_z = W_y = \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

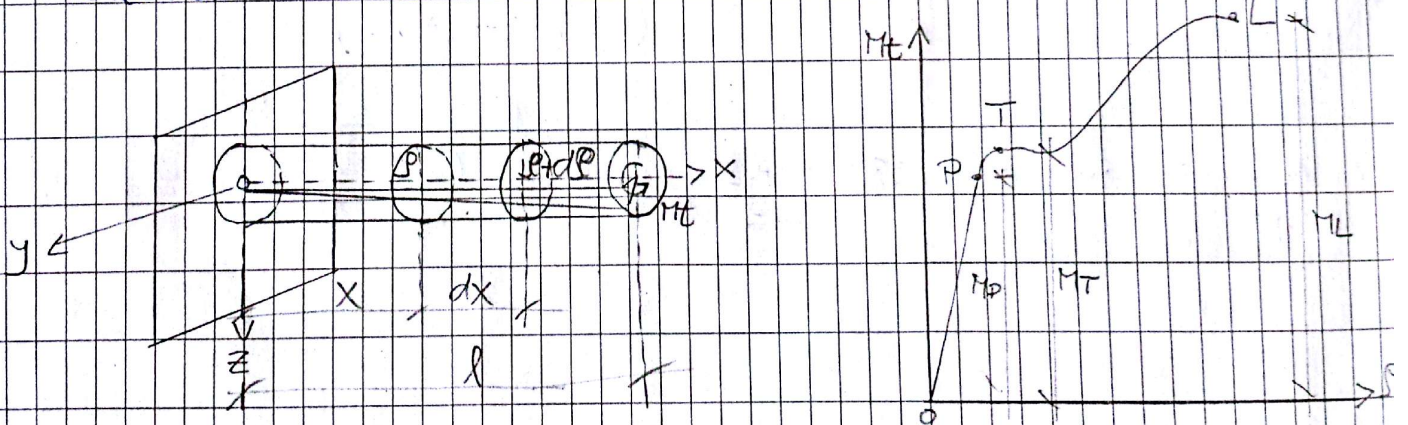
* TORZIJA RAVNIH ŠTAPOVA *



Ako je ravni štap opterećen momentom \$M_i\$, koji djeluje u ravni okomitoj na os štapa, onda u bilo kojem poprečnom presjeku štapa postoji samo MOMENT TORZIJE, a sve su ostale komponente unutarnjih sila jednake nuli.

Taj slučaj opterećenja naziva se **TORZIJA**.

* TORZIJA ŠTAPOVA KRUŽNOG PRESJEKA



Usljed torzije u poprečnom presjeku javljaju se smičuća naprezanja koja su u pravcu tangente na kružnici

$$M_t = \int_A \rho \tau dA \quad (*) \quad \tau dA - \text{sil}$$

$\rho - \text{krak}$

- Kod analize naprezanja na torziju uvale se pretpostavke:
- pri deformaciji štapa poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na os štapa (Bernulijeva hipoteza)
 - poprečni presjeci se rotiraju oko osi štapa kao kruti diskovi tj. nedeformiraju se u svojoj ravnini
 - razmak između poprečnih presjeka se ne mijenja pri deformaciji štapa (nema normalnih sila)

γ - ugao izvodnica

$d\varphi$ - ugao tačke izvodnice

ρ - poluprečnik

$$\frac{\Delta OAA'}{AA'} = \rho d\varphi - \text{apsolutno smicanje}$$

$$\gamma = \tan \gamma = \frac{AA'}{dx} \approx \frac{\rho d\varphi}{dx} - \text{relativno smicanje}$$

$d\varphi$ - ugao vrtanja

$\frac{d\varphi}{dx}$ - ugao vrtanja pri jedinici dužine štapa (relativni ugao vrtanja) [rad/m]

$$\frac{d\varphi}{dx} = \vartheta \quad ; \quad \gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx}$$

$$\gamma = \rho \cdot \vartheta$$

$$\tau = G \cdot \gamma - \text{ČISTO SMICANJE}$$

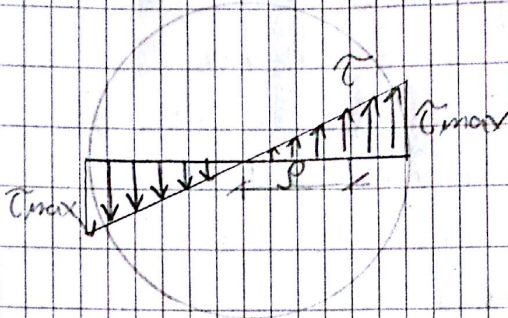
$$\gamma = \rho \cdot \vartheta$$

$$\boxed{\tau = G \cdot \rho \cdot \vartheta} \quad (**)$$

ZAKON RASPODJELE SMICUĆIH NAPREZANJA
U POPR. PRESJEKU ŠTAPA

$$\rho = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

$$\rho = r \Rightarrow \tau = \tau_{\max}$$



(**) u (*)

$$M_t = \int_A G \cdot \vartheta \cdot \rho^2 dA = G \cdot \vartheta \cdot \int_A \rho^2 dA \quad | \quad I_p$$

$$M_t = G \cdot \vartheta \cdot I_p$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (***)$$

(***) \rightarrow (**)

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot \rho$$

RASPODJELA NAPREZANJA NA SMICANJE NA
POPR. PRESJEKU OPTEREĆENOM TORZIJOM

$$W_p = \frac{I_p}{r} \quad , \quad \rho_{\max} = r$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}$$

$$W_p = \frac{r^2 \pi}{2} = \frac{d^2 \rho}{16}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \vartheta \Rightarrow d\rho = \vartheta \cdot dx$$

$$d\rho = \frac{M_t dx}{G \cdot I_p}$$

- obrotanje po jedinici dužine

$$\varphi = \int_0^l \alpha dx = \int_0^l \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_p}$$

$$M_t(x) = \text{const.} \quad ; \quad I_p(x) = \text{const.}$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad - \text{ HUKOV ZAKON ZA OPTEREĆENJE TORZIJE (konstantan moment torzije)}$$

$G \cdot I_p$ - torziona krutost presjeka štapa

EA - aksijalna krutost

Šuplji kružni presjek je RACIONALAN (srednji dio presjeka je neiskorišten)

Max. smicanje je tamo gdje je glavna ravnina smičućih naprezanja.

Usljed torzije javlja se naponsko stanje čistog smicanja.

Pravac napona je tangenta na kružnicu.

Naponsko stanje pritiska i zatezanja je ekvivalentno naponskom stanju naprezanja.

Ravnine su pod 45° od ravnina u odnosu na glavne napone smicanja. Kod štapova su uglovi od 45° od glavnih izvodnica

Lom se uvijek dešava u pravcu glavnih napona zatezanja

$$\text{Dobaz nosivosti je: } \tau_{\max} \leq \tau_{\text{dop}}$$

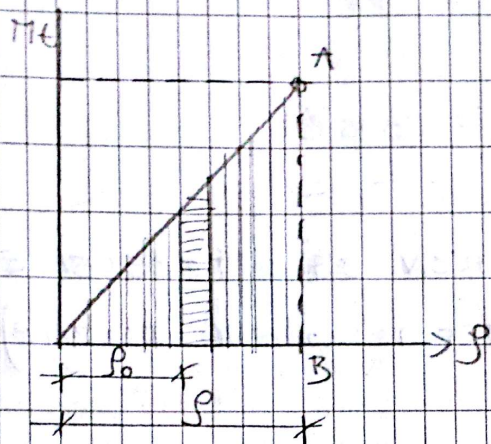
$$\frac{M_t}{I_p} \cdot S_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_{\text{dop}}$$

(**)

Dobaz krutosti:

$$\alpha_{\max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \alpha_{\text{dop}}$$

* POTENCIJALNA ENERGIJA DEFORMACIJA PRI TORZIJI *



$$\phi = \frac{M \cdot l}{G \cdot I_p} \quad \text{— Hookeov zakon}$$

$$dW = Mx \cdot d\phi$$

$$W = \int_0^{\phi} Mx \cdot d\phi = \frac{Mx \cdot \phi}{2}$$

$$W = U = \frac{Mx \cdot \phi}{2} \quad \text{Vazi u linearno elastičnom području}$$

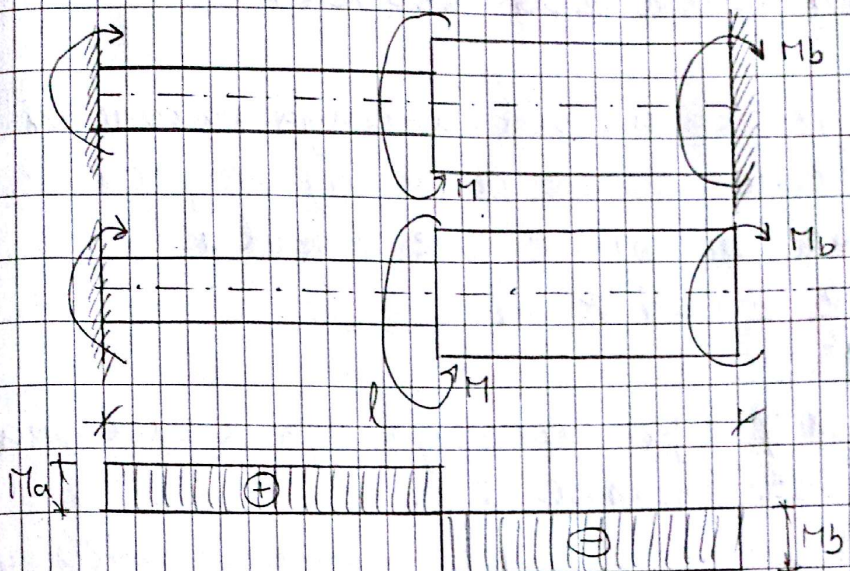
$U = \frac{Mx^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_p}$	(da su momenti torzije i momenti polarne inercije konstantni)
--	---

$$U = \frac{G \cdot I_p \cdot \phi^2}{2 \cdot l}$$

$$dU = \frac{Mx^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot I_p}$$

$$U = \int_0^{\phi} \frac{Mx^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot I_p}$$

* STATIČKI NEODREĐENI ZADACI KOD TORZIJE *



$$\sum M_x = 0$$

$$M_A + M_B = M$$

$$\rho_B = \phi \quad \text{-- USLOV}$$

$$\rho_B^{(1)} = \frac{M \cdot a}{G \cdot I_{p1}}$$

$$\rho_B^{(2)} = \frac{M_b \cdot 2a}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_b \cdot a}{G \cdot I_{p1}}$$

$$\rho_B = \rho_B^{(1)} + \rho_B^{(2)} = \phi$$

$$\frac{M \cdot a}{G \cdot I_{p1}} - \frac{M_B \cdot 2a}{G \cdot I_{p2}} - \frac{M_B \cdot a}{G \cdot I_{p1}} = \phi \quad /: \frac{G \cdot I_{p1}}{a}$$

$$I_{p2} = 3I_{p1}$$

$$M_B = \frac{3}{5} M$$

$$M_a = \frac{2}{5} M$$

Statički neodređeni zadaci su oni koji su nerješivi upotrebnama samo uslova ravnoteže. Dopunske j-ne su j-ne kompatibilnosti deformacija.

* TORZIJA ŠTAPA NEOKRUGLOG PRESJEKA *

Kod neokruglih presjeka smičuća naprezanja po konturi nisu sva ista. Problem torzije neokruglog presjeka se rješava primjenom Poisson-ove j-ne u obliku:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (*)$$

gdje je $\phi = \phi(x, y)$ f-ja naprezanja koja u tačkama konture ima konst. vrijednost f-je.

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$$

$\left. \begin{array}{l} \tau_{zy} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\}$ komponente smičućeg naprezanja usljed torzije

Ako je popr. presjek takav da je kontura zatvorena onda se može uzeti da je vrijednost f-je ϕ na konturi jednaka nuli:

$$\text{Ako je } \phi(x, y) = 0$$

$$M_t = 2 \iint_A \phi(x, y) dx dy \quad (***)$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad \tau_{zy} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \quad - \text{ ukupno naprezanje}$$

$$\tau = \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

Smjer ukupnog naprezanja se podudara sa smjerom tangente na nivo linije.

Nivo linija je linija koja spaja naprezanja istog intenziteta

$$\phi(x,y) = \text{const. } A$$

Kontura presjeka je jedna nivo linija

(**) $\phi = 0$ znači da ukupno smičuće naprezanje djeluje u smjeru konture.

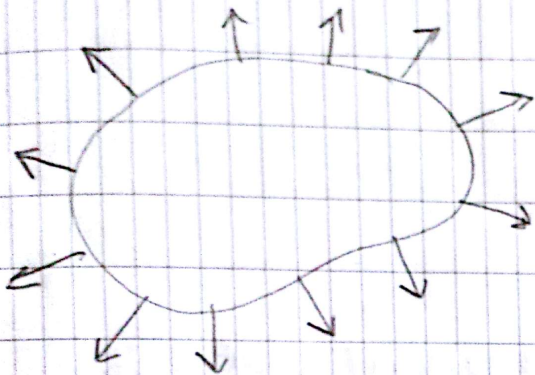
$$\tau_A = \frac{M_t}{d \cdot b^2 \cdot h}$$

$$\tau_B = n \cdot \tau_A$$

$$\alpha = \frac{M_t}{G \cdot \beta \cdot h \cdot b^3}$$

$$P = \frac{\Delta t \cdot l}{G \cdot \beta \cdot h \cdot b^3}$$

* PRANDTLOVA MEMBRANSKA ANALOGIJA



$$\frac{1}{p_1} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ZAKRIVLJENOST MEMBRANE

Ako su progibi mali onda su kvadratni članovi vrlo vrlo mali.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p_1} &= - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{1}{p_2} &= - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

$$\frac{\sigma_1}{S_1} + \frac{\sigma_2}{S_2} = \frac{b}{h}$$

S - sila rezdukcije po jedinici membrane duzine.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{P}{\sigma \cdot h} = -\frac{P}{S} \quad (11)$$

$$W = 0$$

$$\frac{b}{S} = 2G\theta$$
$$\phi(x,y) = W(x,y)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(x,y) &= 2G\theta \rho(x,y) \\ W(x,y) &= \frac{b}{S} \rho(x,y) \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\frac{\phi}{W} = \frac{2G\theta S}{P}$$

$$\phi = \frac{2G\theta S}{P} \cdot W \quad (1)$$

$$\frac{ME}{Z} = \int_A 2G\theta \rho(x,y) dx dy$$

$$= 2G\theta \int_A \rho(x,y) dx dy \quad - \text{MOMENT TORZIJE}$$

Zapremina izmota napeta membrane i ravnine otvora:

$$Z = \iint_A W(x,y) dx dy = \iint_A \frac{P}{S} \rho(x,y) dx dy$$

$$\frac{P}{S} \iint_A \rho(x,y) dx dy \Rightarrow \frac{Z \cdot S}{P}$$

$$\frac{ME}{2Z} = \frac{2G\theta}{\frac{P}{S}} \quad (2)$$

Ako je $\frac{P}{S} = 2G\alpha$ i moment torzije jednak je dvostrukoj zapremini membrane, ograničenoj plohom membrane i ravninom dvora.

$$\frac{M_t}{2Z} = \frac{\phi}{w} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{M_t}{2Z} \cdot w}$$

PRANDLOVA membransta analogija za određivanje naponskog stanja neokruglih poprečnih presjeka

$$\phi(x, y) = \frac{M_t}{2Z} \cdot w(x, y)$$

* TORZIJA ŠTAPA USKOG PRAVOKUTNOG PRESJEKA *

$$\delta = \frac{P \cdot b^2}{8 \cdot S}$$

S - sila u savitljivom štapu

$$\frac{2\delta}{\frac{b}{2}} = \tan \alpha \quad (\text{tangenta}) \Rightarrow \frac{4\delta}{b}$$

* Prva derivacija - nagib tangente na f-ju *

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{\max} = \frac{4\delta}{b} \quad - \text{Max. nagib u sredini duže stranice koni}$$

$$Z = \frac{2}{3} b \cdot \delta \cdot h$$

$$\boxed{\tau = \frac{M_t}{2Z} \cdot \frac{\partial w}{\partial n}}$$

$$M_t = \frac{4ZG \cdot Q}{P} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot b^3 \cdot G \cdot Q$$

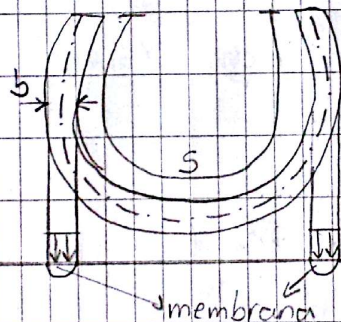
$$\tau_{\max} = \frac{Mt}{\frac{1}{3} \cdot h \cdot b^2}$$

$$\Theta = \frac{Mt}{\frac{1}{3} \cdot h \cdot b^3 \cdot G}$$

Max. naprezanje i ugao zaokreta po jedinici dužine za štapove uskog pravokutnog presjeka.

* TORZIJA ŠTAPOVA SA TANKIM STIJENKAMA OTVORENOG PROFILA *

Rješava se kao kod štapova uskog pravokutnog presjeka gdje je s - dužina luka, a b - debljina



$$\tau_{\max} = \frac{Mt}{\frac{1}{3} \cdot s \cdot b^2} \quad ; \quad \Theta = \frac{Mt}{\frac{1}{3} \cdot s \cdot b^3 \cdot G}$$

$$\tau_i = \frac{M t_i}{\frac{1}{3} \cdot s_i \cdot b_i^2} \quad ; \quad M t_i = \frac{1}{3} \cdot \Theta \cdot G \cdot b_i^3 \cdot s_i$$

$$Mt = \sum_{i=1}^n M t_i$$

Ako je popr. presjek const. po dužini štapa i ako je od homogenog materijala onda je G i $\Theta = \text{const.}$, pa je =

$$M_t = G \cdot \vartheta \cdot \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i^3 \cdot s_i \rightarrow J_t - \text{torzioni moment inercije presjeka.}$$

$$M_t = G \cdot \vartheta \cdot J_t$$

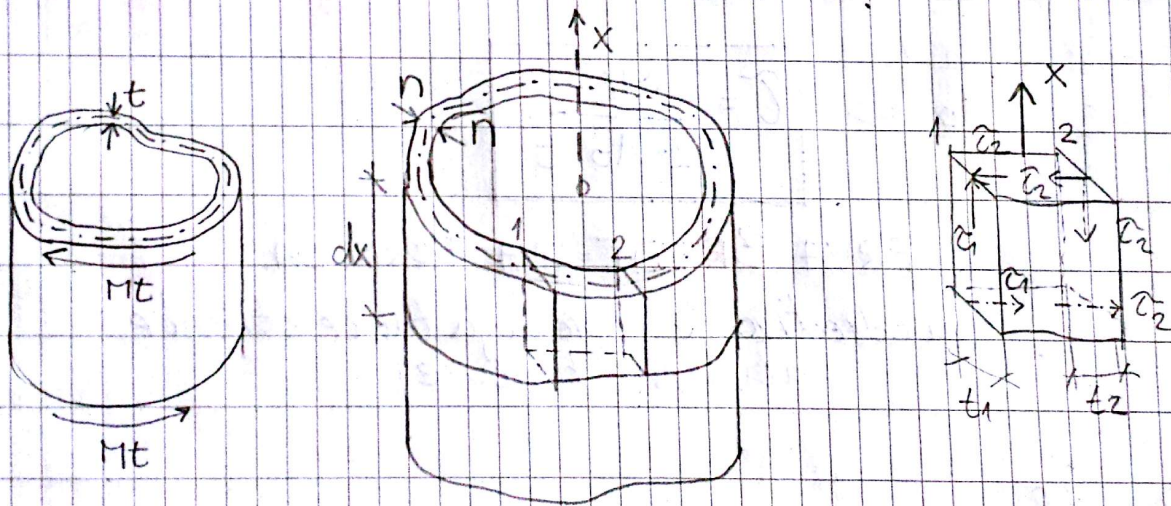
$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot J_t} \quad ; \quad \tau_i = \frac{M_t}{J_t} \cdot b_i$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_t} \cdot b_{\max}$$

$$\frac{J_t}{b_{\max}} = W_t - \text{Torzioni moment otpora presjeka}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

* TORZIJA ŠTAPOVA SA TANKIM STIJENKAMA ZATVORENOG PROFILA *



Skup tačaka, jednako udaljenih od vanjske i unutrašnje konture popr. presjeka, naziva se SREDIŠNJA LINIJA PRESJEKA

$$\sum X = 0$$

$$\tau_1 \cdot t_1 \cdot dx - \tau_2 \cdot t_2 \cdot dx = 0$$

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2$$

$$\tau \cdot t = \text{const.}$$

TOK SMIČUĆIH NAPREZANJA

Tok smičućih naprezanja po dužini zatvorene konture je uvijek const.

$$\sum M_x = 0$$

$$M_t = \int_A \rho \tau dA = \oint \tau t \rho ds$$
$$\tau dA = \tau t ds$$

$$M_t = \tau \cdot t \cdot \left(\oint \rho ds \right) = 2A_0 ; \quad A_0 - \text{površina unutar središnje linije zatvorene konture}$$

$$\oint \rho ds = 2A_0$$

$$M_t = \tau \cdot t \cdot 2A_0 \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{2 \cdot A_0 \cdot t}$$

PRVA BREDT-OVA FORMULA

(za određivanje naprezanja tanke stijenke zatvorene konture)

$$dW = \frac{n t \cdot d\rho}{2} (\Delta)$$

- SPECIFIČNA POT. ENERGIJA

$$u = \frac{\tau^2}{2G} \quad t \cdot ds \cdot dx$$

$$\frac{\tau^2}{2G} \cdot t \cdot ds \cdot dx \Rightarrow \text{pot. energija akumulirana u zapremini}$$

$$U = \oint \frac{\tau^2}{2G} t \cdot dx \cdot ds$$

$$U = \frac{\tau^2 \cdot t^2 \cdot dx}{2 \cdot G} \cdot \int \frac{ds}{t}$$

$$U = \frac{M t^2 dx}{8 A_0^2 G} \cdot \int \frac{ds}{t} (\Delta \Delta)$$

$$\frac{M t d\varphi}{2} = \frac{M t^2 dx}{8 G \cdot A_0^2} \cdot \int \frac{ds}{t}$$

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M t}{4 G A_0^2} \cdot \int \frac{ds}{t}$$

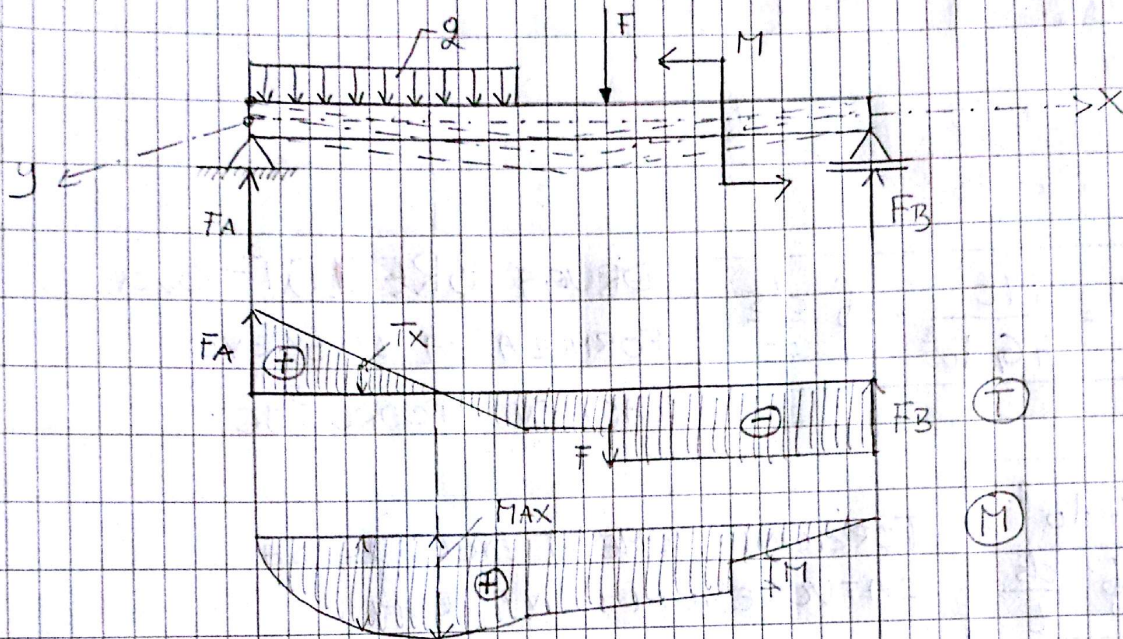
DRUGA BREMINT-OVA
FORMULA ZA LINEARNO
ELASTIČNO PODRUČJE

$$I_t = \frac{4 A_0^2}{\int \frac{ds}{t}}$$

TORZIONI MOMENT INERCIJE SA
ZATVORENOM KONTUROM

$$\Theta = \frac{M t}{G \cdot I_t}$$

* SAVIJANJE RAVNIH ŠTAPOVA *



ODŠTI SLUČAJ SAVIJANJA SILAMA
ILI POPR. SAVIJANJE

To je savijanje oko y i z osi.

Dvije su komponente oko osi z - transferzalne sile
Moment oko y = M_y

$$\sum F_z = 0$$

$$F_A - q \cdot x - T_z = 0$$

$$T_z = F_A - q \cdot x$$

$$\sum M_z = 0$$

$$F_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - M_y = 0$$

$$M_y = F_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$-Tz + (Tz + dTz) + q \cdot dx = 0$$

$$\sum M_{02} = 0$$

$$My + Tz \cdot dx - q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (My + dMy) = 0$$

$$\frac{dTz}{dx} = -q \quad (1) \text{ odnos sile vanjskog opterećenja}$$

$$\frac{dMy}{dx} = -Tz \quad (2)$$

$$\frac{d^2 My}{dx^2} = -q \text{ veza između vanjskog opterećenja}$$

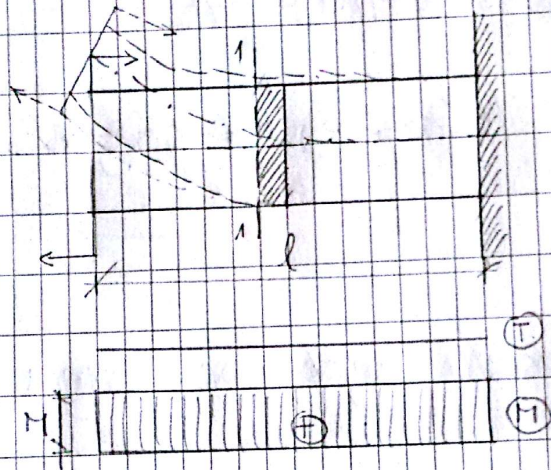
DIF. J-NC
PRI
SAVIJANJU

Ako se u poprečnim presjecima štapa pojavljuje samo moment savijanja, to se naziva ČISTO SAVIJANJE.

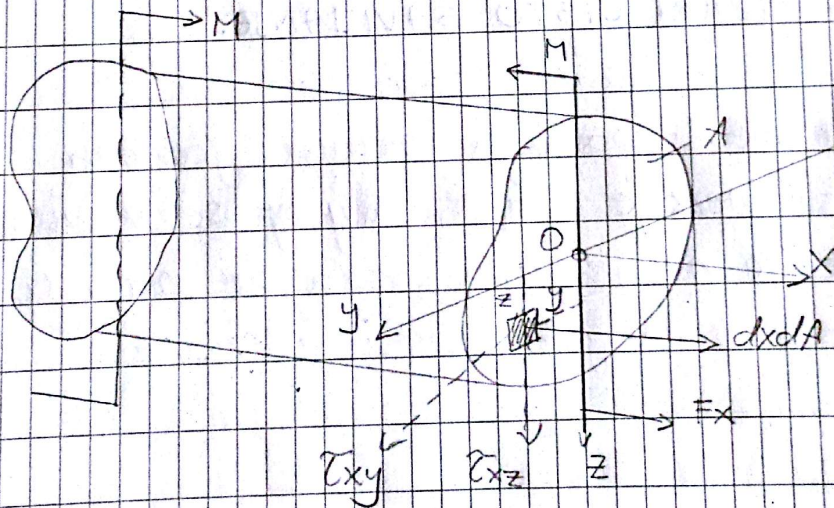
Ako se ravnina djelovanja momenta savijanja poklapa s jednom od glavnih središnjih osi inercije štapa, savijanje se naziva RAVNO SAVIJANJE, a ako se ne poklapa onda se naziva KOSO SAVIJANJE.

* ČISTO RAVNINSKO SAVIJANJE *

Razmotrimo čisto savijanje ravnoy štapa konstantnog poprečnog presjeka od homogenog, izotropnog i elastičnog materijala.



PRESJEK 1-1



$$\sum F_x = 0 \quad N = \int_A \sigma_x dA = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad T_y = \int_A \tau_{xy} dA = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad T_z = \int_A \tau_{xz} dA = 0$$

$$\sum M_x = 0, \quad M_x = M_H = \int_A (\tilde{\sigma}_x z \cdot y - \tilde{\sigma}_x y \cdot z) dA = 0$$

$$\sum M_y = 0, \quad M_y = M_S = \int_A \tilde{\sigma}_x \cdot dA \cdot z = M$$

$$\sum M_z = 0, \quad M_z = M_S = \int_A \tilde{\sigma}_x dA \cdot y = 0$$

Ako djeluje samo moment, onda nema unutrašnjih sila

$$\int_A \tilde{\sigma}_x dA = 0 \quad (\text{I})$$

$$\int_A \tilde{\sigma}_x dA \cdot z = M \quad (\text{II})$$

$$\int_A \tilde{\sigma}_x dA \cdot y = 0 \quad (\text{III})$$

Za konst. moment deformacija štapa je kružni luk.
Pri čistom savijanju svaki presjek ostaje ravan i elamir
na os štapa.

Pri čistom savijanju vrijedi BERNULIJEVA hipoteza.

Vlakna čija dužina za vrijeme naprezanja ostaje ista
zove se NEUTRALNI SLOJ.

$$\text{Neutralna osa } N.O. \cdot \epsilon_x = 0 \Rightarrow \tilde{\sigma}_x = 0$$

NEUTRALNA OSA JE LINIJA U KOJOJ JE $\tilde{\sigma}_x = 0$

Pod djelovanjem momenta presjeci se zadržecu i zadržec
dva presjeka je ρ a poluprečnik zakrivljenosti
je ρ (neutralne osi)

Relativno područje vlakna od neutralne osi je

$$\epsilon_{xx} = \frac{A_1 B_1 - \overline{AB}}{\overline{AB}}$$

Za nedeformisano stanje:

$$\overline{AB} = \overline{A_0 B_0} = dx = \overline{A_0' B_0'} = S dl$$

$$\overline{A_1 B_1} = (S+z) dl$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{(S+z) dl - S dl}{S dl}$$

$$\boxed{\epsilon_{xx} = \frac{z}{S}}$$

Sve što smo dalje od neutralne osi, izduženje je veće.

$$\overline{\sigma}_x = \epsilon_{xx} \cdot E \quad \text{— HUKOV ZAKON}$$

$$\overline{\sigma}_x = \frac{z}{S} \cdot E \quad \text{(IV)}$$

$$\text{(IV)} \rightarrow \text{(I)}$$

$$\int_A \frac{z}{S} \cdot E \, dA = \phi$$

$$\frac{E}{S} \int_A z \, dA = \phi \quad ; \quad \frac{E}{S} \neq 0$$

$$\int_A z \, dA = 0 \quad \text{STATIČKI MOMENT } S_y$$

Statički moment je jednak nuli za težišnu os presjeka
neutralna osa je ; težišna osa presjeka.

$$\text{(IV)} \rightarrow \text{(III)}$$

$$\int_A \overline{\sigma}_x \, dA \cdot y = \frac{E}{S} \int_A z y \, dA = 0$$

$\int_A z y \, dA \rightarrow$ centritugalni moment inercije
(simetričan presjek)

y i z - glavne središnje osi inercije popr. presjeka.

(III) \rightarrow (II)

$$\frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA = M$$

$$\frac{E}{\rho} \cdot I_y = M \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_y}}$$

ZAKRIVLJENOST NEUTRALNE OSI NOSAČA ILI
ELASTIČNA LINIJA ILI PROGIBNA LINIJA ŠTAPA

$E \cdot I_y$ = KRUTOST PRESJEKA NA SAVIJANJE
(fleksijska krutost)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{E \cdot I_y}$$

$$M = \text{const.}$$

$$E = \text{const.}$$

$$I_y = \text{const.}$$

$$\left. \begin{array}{l} M = \text{const.} \\ E = \text{const.} \\ I_y = \text{const.} \end{array} \right\} \frac{1}{\rho} = \text{const.} \Rightarrow \text{KRUŽNI LUK}$$

$$\rho = \frac{E \cdot I_y}{M_y} \quad (\text{V})$$

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} \cdot z \quad (\text{VI})$$

(V) \rightarrow (VI)

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z}$$

IZRAZ ZA NAPREZANJE NA SAVIJANJE

Normalna naprezanja primaju ekstremne vrijednosti u krajnjim vlaknima, koja su najudaljenija od neutralne osi. Na neutralnoj je osi $\sigma_x = 0$.

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{h}{2} ; \quad \sigma_{x \min} = -\frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{h}{2}$$

↓
Najveće naprezanje
na zatezanje

↓
Najveće naprezanje
na pritisak

$$\frac{I_y}{\frac{h}{2}} = W_y$$

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_y}{W_y} ; \quad \sigma_{x \min} = -\frac{M_y}{W_y}$$

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot h_1$$

$$\sigma_{x \min} = -\frac{M_y}{I_y} \cdot h_2$$

$$|\sigma_{x \max}| \geq |\sigma_{x \min}|$$

$$h_1 > h_2$$

$$\sigma_{x \max} > \sigma_{x \min}$$

$$A_0 B_0 = dx = A_0' B_0' = S d\varphi$$

$$dx = S d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dx}{S}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_y}{E \cdot I_y} \Rightarrow \boxed{d\varphi = \frac{M_y \cdot dx}{E \cdot I_y}}$$

PROMJENA UGLA ZAOKRETA
PO DUŽINI NEKOG ŠTAPA

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_y \cdot dx}{E \cdot I_y} \quad (A)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{M \cdot l}{E \cdot I_y}} \rightarrow \text{ČISTO SAVIJANJE}$$

* PRORAČUN ČVRSTOĆE I IZBOR PRESJEKA * PRI ČISTOM SMICANJU

$\sigma_{x \max} \leq \sigma_{\text{dop}} \rightarrow$ dotaz nosivosti čvrstoće

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{z \text{dop}}$$

$$\sigma_{p \max} = -\frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{p \text{dop}}$$

Moguća su 3 slučaja:

a.) zadan moment savijanja i popr. presjeka a treba kontrolisati naprezanja

$$\frac{M_y}{W_y} = \sigma_{\text{dop}}$$

b.) zadan moment savijanja a treba dimenzionirati presjek štapa

$$W_y = \frac{M_y}{\sigma_{\text{dop}}}$$

c.) zadan presjek štapa i naprezanje a treba odrediti dopušteno opterećenje

$$M \leq \sigma_{\text{dop}} \cdot W_y$$

Dotaz racionalnosti (veća površina što smo dalje od ose)

$$I_{y \text{d}} = 2 \cdot \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$I_{y \text{d}} = \frac{A h^2}{4}$$

$$W_{y \text{d}} = \frac{I_{y \text{d}}}{\frac{h}{2}} = \frac{A \cdot h}{2}$$

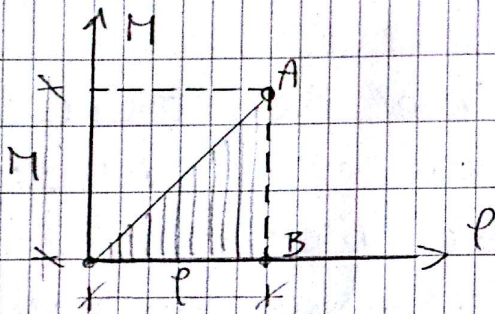
$$; \quad W_y \approx (0,31 \div 0,35) \cdot A \cdot h$$

$$\eta = \frac{W_y}{W_y^d} < 1 \rightarrow \text{STEPEN NEISKORIŠTENOSTI PRESJEKA}$$

Puni presjeci su najmanje iskorišteni.

Kruti materijali (beton) imaju pritisnu čvrstoću puno veću nego na zatezanje.

* POTENCIJALNA ENERGIJA DEFORMACIJA *
* PRI ČISTOM SAVIJANJU *



$$\rho = \frac{M \cdot L}{E \cdot I_y} ; W = \frac{M \cdot \rho}{2}$$

$$U = W$$

$$U = \frac{M \cdot \rho}{2}$$

$$U = \frac{M^2 \cdot L}{2 \cdot E \cdot I_y}$$

ili

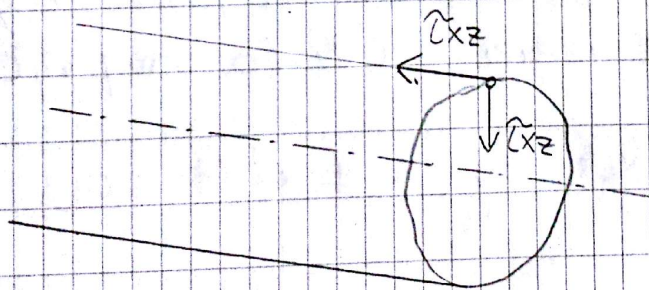
$$U = \frac{E \cdot I_y \cdot \rho^2}{2 \cdot L}$$

* OPŠTI SLUČAJ SAVIJANJA *
(savijanje silama)

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad \int_A \bar{\sigma}_x dA = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad \int_A \bar{\tau}_{xy} dA = 0 \\ \sum F_z = 0 & \quad \int_A \bar{\tau}_{xz} dA = \bar{T}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 & \quad \int_A (\bar{\tau}_{xy} \cdot z - \bar{\tau}_{xz} \cdot y) dA = 0 \\ \sum M_y = 0 & \quad \int_A \bar{\sigma}_x dA \cdot z = M_y \\ \sum M_z = 0 & \quad \int_A \bar{\sigma}_x dA \cdot y = 0 \end{aligned}$$

Pošto nema opterećenja u smjeru osi štapa, prema zakonu o uzajamnosti smičućih naprezanja u tačkama gornjeg i donjeg ruba popr. presjeka, posmično naprezanje $\bar{\tau}_{xz} = 0$, a time i smičuće deformacije $\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = 0$



Po visini popr. presjeka opterećenje nejednolike raspodjele ($\bar{\sigma}_x$)

Posljedica je da se pri savijanju silama dešava iskrivljenje ili vitoperenje popr. presjeka.

U vertikalnoj osi je slučaj čistog smicanja. Tamo gdje je \bar{T}_z const., i vitoperenje će biti const.
 $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$

σ_x naponi neće zavisiti od vitoperenja.

Kada je transl. sila konst. vrijede isti izrazi naprezanja kao za čisto savijanje.

Ako se sila mijenja duž nosača onda je $\tilde{\sigma}_x$ različita pa je i vitoperenje različito, te se zbog razlike $\tilde{\sigma}_x$ u uzdužnim presjecima štapa javljaju normalna naprezanja koja predstavljaju međusobno djelovanje uzdužnih vlakana.

Ako je dužina štapa mnogo veća od visine, i ako je $\frac{h}{l} \leq \frac{1}{5}$ može se dokazati da su pomjeranja zbog vitoperenja mnogo manja od pomjeranja koja nastaju zbog rotacije popr. presjeka oko neutralne osi pri čistom savijanju.

Sa dovoljnom tačnošću u ovom slučaju pretpostaviti je da vrijedi Bernulijeva hipoteza ravnih popr. presjeka i pretpostavimo da važe izrazi za čisto savijanje

$$\sum F_x = 0 \quad - \int_{A_1} \sigma_x dA_1 - \int_{A_3} \tilde{\sigma}_x dA_3 + \int_{A_2} (\sigma_x + d\sigma_x) dA_2 = 0$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$- \int_{A_1} \frac{M_y}{I_y} \cdot z dA_1 - \tilde{\sigma}_{zx} \cdot b \cdot dx + \int_{A_2} \frac{M_y + dM_y}{I_y} \cdot z dA_2 = 0$$

$$A_1 = A_2$$

$$\tilde{\sigma}_{zx} \cdot b \cdot dx - \frac{dM_y}{I_y} \int_{A_2} z dA_2 = 0$$

$$\tau_{zx} = \frac{dM_y}{I_y \cdot b \cdot dx} \cdot \int_{A_2} z \, dA_2$$

$$\frac{dM_y}{dx} = T_z, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \int_{A_2} z \, dA_2 = S_y$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}$$

IZRAZ KOJI POVEZUJE POPR. SILU T_z
I SMICUĆE NAPREZANJE τ_{xz}

$$\frac{d\tau_{xz}}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot b} \right) - \frac{T_z}{I_y} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{S_y}{b} \right)$$

$$T_z = \text{const.}$$

$$I_y = \text{const.}$$

Ako je $b = \text{const}$, onda

$$\frac{T_z}{I_y \cdot b} \cdot \frac{d}{dz} \cdot S_y = 0$$

$$\frac{d}{dz} \cdot \int_{A_2} z \, dA_2 = \frac{d}{dz} \cdot \int_z z \cdot b \cdot dz = b \cdot z_0 = 0$$

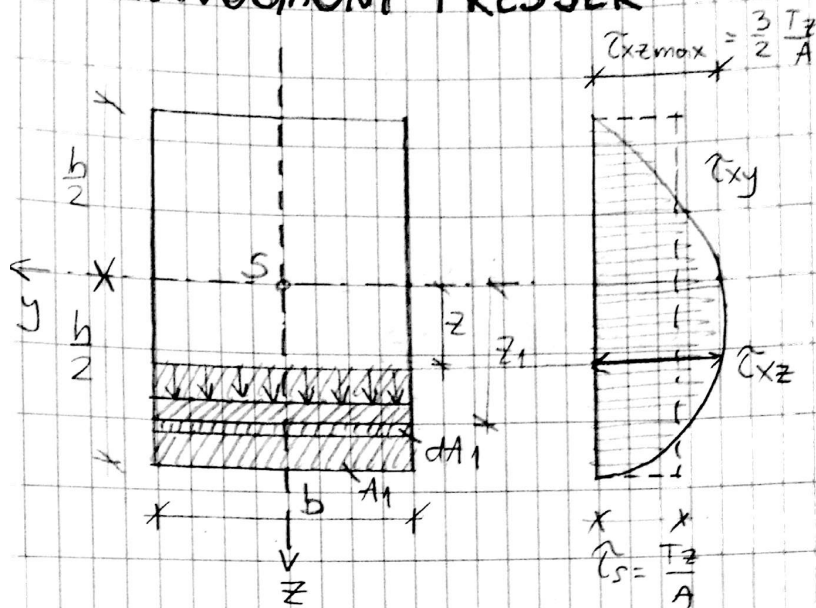
$|z_0 = 0|$

Max posmično naprezanje je u neutralnoj osi.

Na rubovima σ_x su ekstremna.

* Primjeri proračuna naprezanja na smicanje

① PRAVUGAONI PRESJEK



$$\tau_{xz} = \frac{Tz \cdot S_y}{I_y \cdot b}, \quad b = \text{const. po visini}$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$S_y = \int_{A_1} z_1 dA_1 = \int_z^{h/2} z_1 b dz_1$$

$$S_y = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

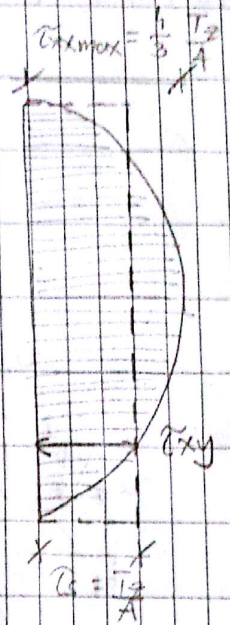
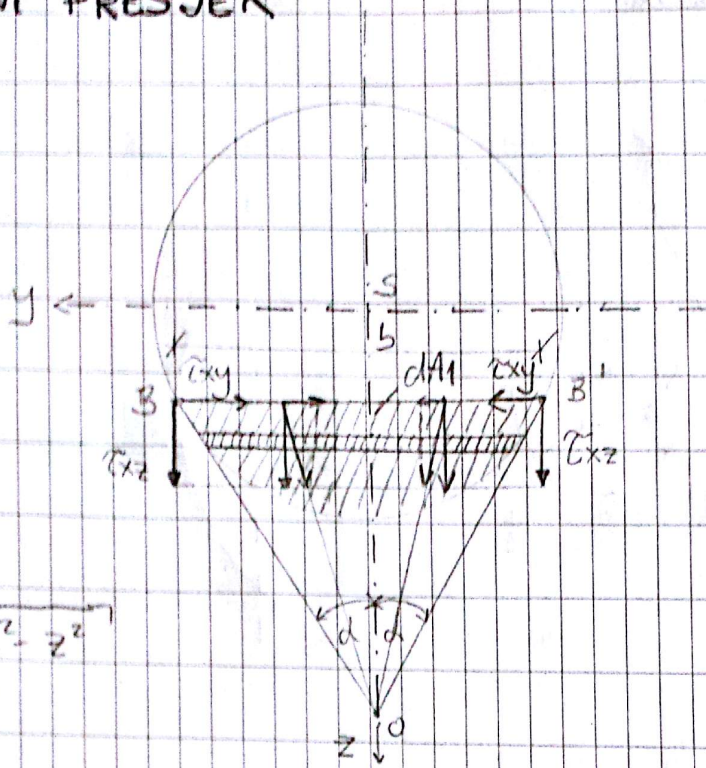
$$\tau_{xz} = \frac{Tz \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)}{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot b}$$

$$\tau_{xz} = \frac{6Tz}{bh^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$z = 0$$

$$\tau_{xz} = \frac{6Tz}{bh^3} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3}{2} \frac{Tz}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \frac{Tz}{A}$$

② KRUŽNI PRESJEK



$$b(z) = 2\sqrt{r^2 - z^2}$$

$$I_y = \frac{r^4 \pi}{4}$$

$$S_y = \int_{A_1} z dA_1$$

$$dA_1 = b(z) dz_1 = 2\sqrt{r^2 - z_1^2} dz_1$$

$$S_y = \int_{A_1} z_1 dA_1 = 2 \int_z z_1 \sqrt{r^2 - z_1^2} dz_1 = \frac{2}{3} \sqrt{(r^2 - z^2)^3}$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{I_y} \cdot \frac{\frac{2}{3} \sqrt{(r^2 - z^2)^3}}{2\sqrt{r^2 - z^2}}$$

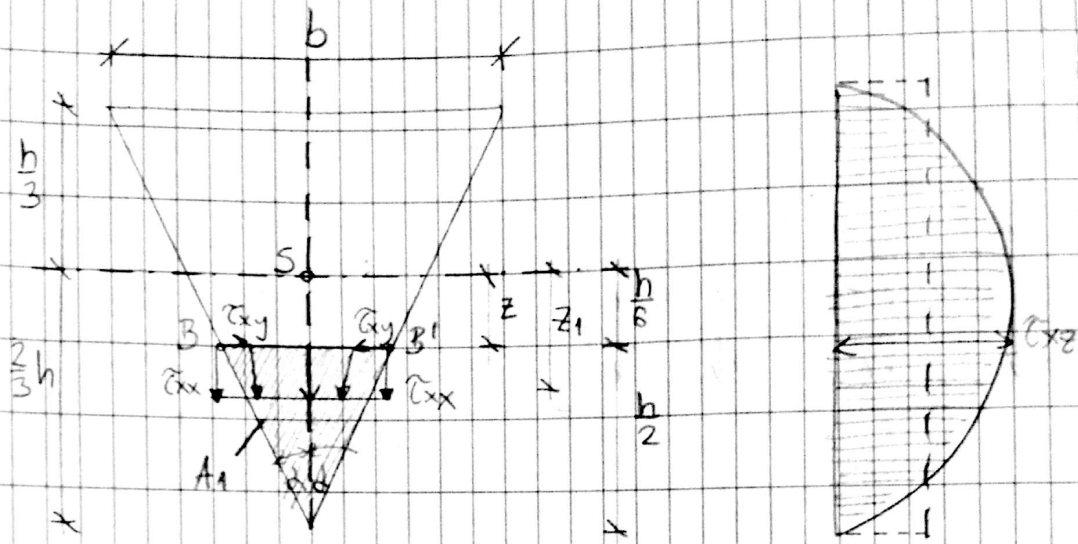
$$\frac{T_z}{3I_y} \cdot (r^2 - z^2) = \frac{T_z}{3 \cdot \frac{r^4 \pi}{4}} \cdot (r^2 - z^2)$$

$$\tau_{xz} = \frac{4}{3} \frac{T_z}{r^4 \pi} (r^2 - z^2)$$

$$z = 0$$

$$\tau_{xz, \max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_z}{r^4 \pi} \cdot r^2 = \frac{4}{3} \frac{T_z}{A}$$

③ TROKUTASTI PRESJEK



$$A_1 = \frac{b(z)}{2} \left(\frac{2}{3}h - z \right)$$

$$z_1 = z + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}h - z \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{h}{3} + z \right)$$

$$S_y = A_1 \cdot z_1 = \frac{b(z)}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}h - z \right) \cdot \left(\frac{h}{3} + z \right)$$

$$I_y = \frac{bh^3}{36}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot b(z)} = \frac{12 T_z}{bh^3} \left(\frac{2}{3}h - z \right) \left(\frac{h}{3} + z \right)$$

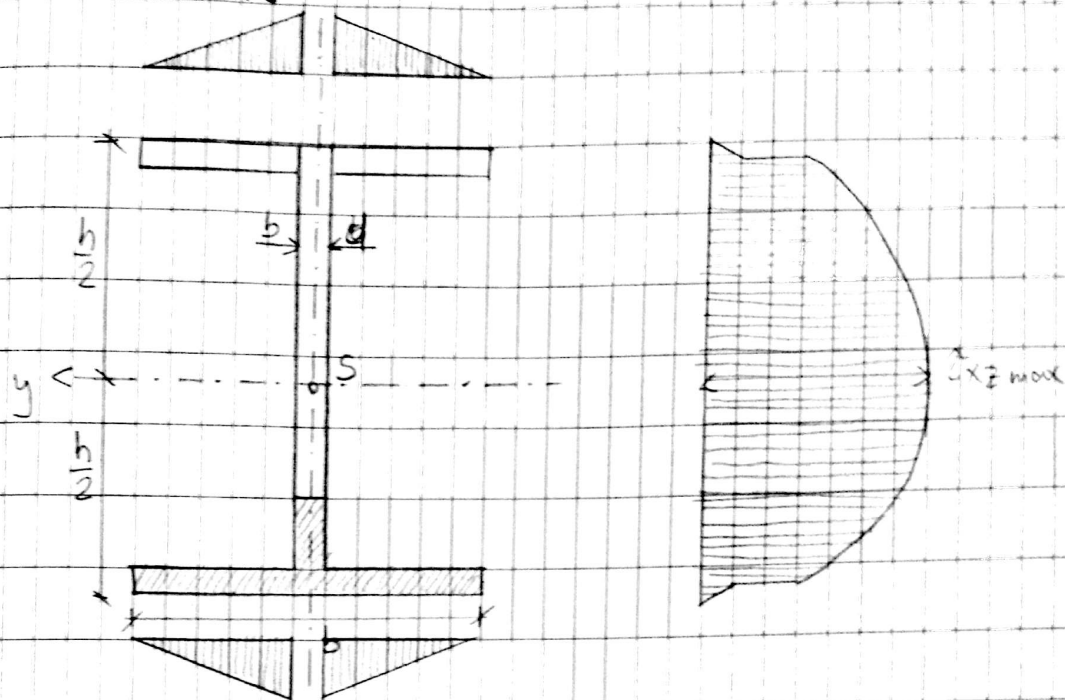
$$\frac{d}{dz} \left(\frac{S_y}{b(z)} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}h - z \right) \left(\frac{h}{3} + z \right) \right) = 0$$

$$z = \frac{h}{6}$$

$$\sigma_{xz \max} = \frac{3}{2} \frac{T_z}{A}$$

④ I PRESJEK



$$S_y = \int_{A_1} z \, dA_1 = \frac{b \cdot t \cdot (h-t)}{2} + d \left(\frac{h}{2} - t - z \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t + z \right)$$

$$= \frac{b t (h-t)}{2} + \frac{d}{2} \left[\left(\frac{h}{2} - t \right)^2 - z^2 \right]$$

- U POJASU -

$$S_y = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

- U REBRU

$$\hat{\tau}_{xz} = \frac{T_z \cdot h \cdot t (h-t)}{2 \cdot d \cdot I_y} + \frac{T_z}{2 I_y} \left[\left(\frac{h}{2} - t \right)^2 - z^2 \right]$$

- U POJASU

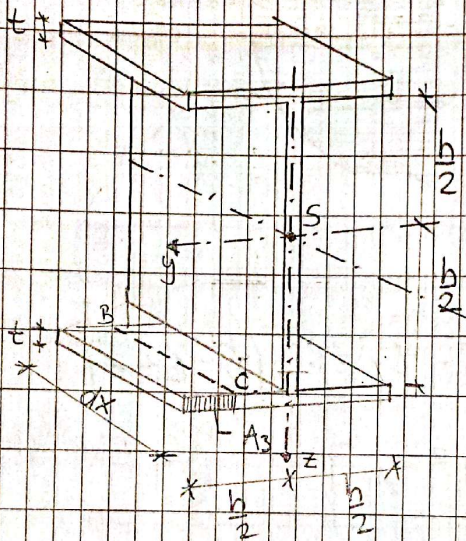
$$\hat{\tau}_{xz} = \frac{T_z}{2 I_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$\hat{\tau}_{xz \max} = 0$$

Rebra preuzima oko 95% smičućih naprezanja pa se obično proračunskim analizama zanemaruje nosivost rebara na smičuće naprezanje i uzima se da je

$$\tau_{xz} \approx \frac{T_z}{A}$$

(A) površina rebara.



$$\sum F_x = 0 \quad \int_{A_3} (\sigma_x + d\sigma_x) dA_3 - \int_{A_4} \sigma_x dA_4 - \tau_{yx} \cdot t \cdot dx = 0$$

$$\int_{A_3} \frac{M_y + dM_y}{I_y} z dA_3 - \int_{A_4} \frac{M_y}{I_y} z \cdot dA_4 - \tau_{yx} \cdot t \cdot dx = 0$$

$A_3 = A_4$

$$\tau_{yx} = \frac{dM}{dx I_y \cdot t} \cdot \int_{A_3} z dA_3$$

$$\frac{dM}{dx} = T_z, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \int_{A_3} z dA_3 = S_y$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot t}$$

$$S_y = \int_{A_3} z dA_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} - y \right) \cdot t \cdot (h - t)$$

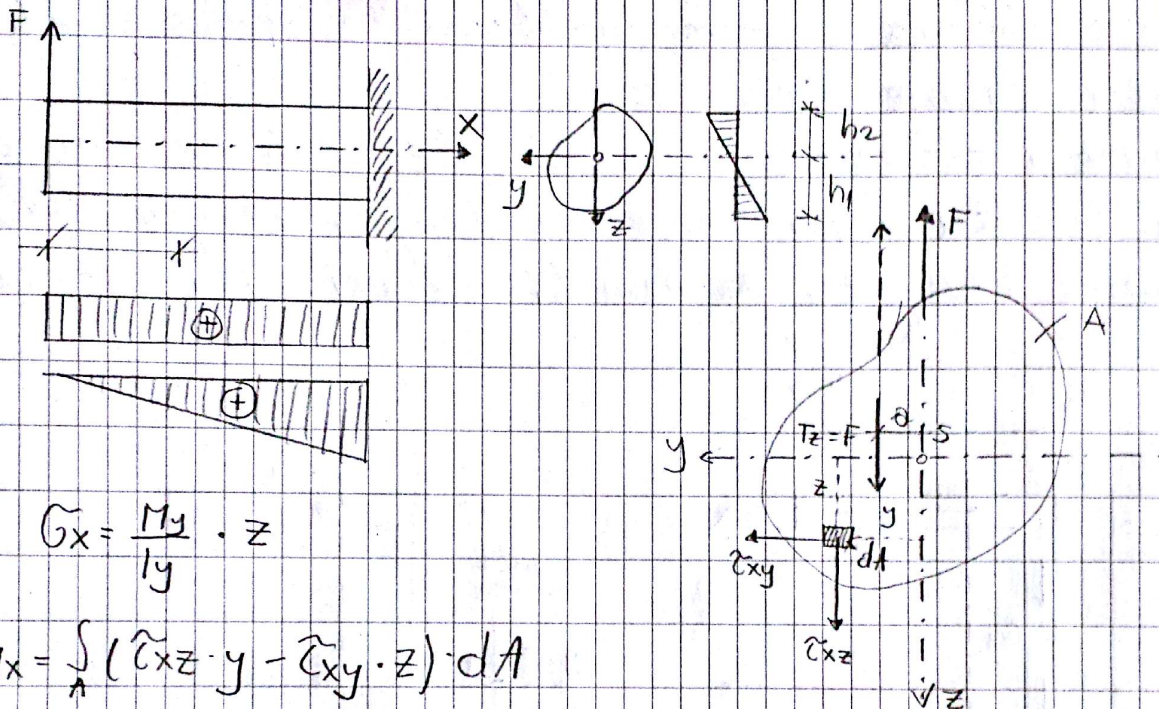
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T_z}{2 I_y} \left(\frac{b}{2} - y \right) (h - t)$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{2 I_y} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right)$$

* **POSMIČNA NAPREZANJA U SIMETRIČNIM TANKOSTIČENIM ŠTAPOVIMA**

NESIMETRIČNOG

- **SAVIJANJE SILAMA NESAVIJENOG ŠTAPA** -
(**SREDIŠTE SMICANJA**)



$$\tilde{\sigma}_x = \frac{M_x}{I_y} \cdot z$$

$$M_x = \int_A (\tilde{\sigma}_x z \cdot y - \tilde{\tau}_{xy} \cdot z) \cdot dA$$

U popr. presjeku odredimo tačku gdje će prolaziti rezultanta svih unutrašnjih smičućih popr. sila.

Tačka gdje prolaze sve sile zove se središte smicanja, središte uvijanja.

Stup središta smicanja pojedinih popr. presjeka čini osu koju zovemo OS SMICANJA.

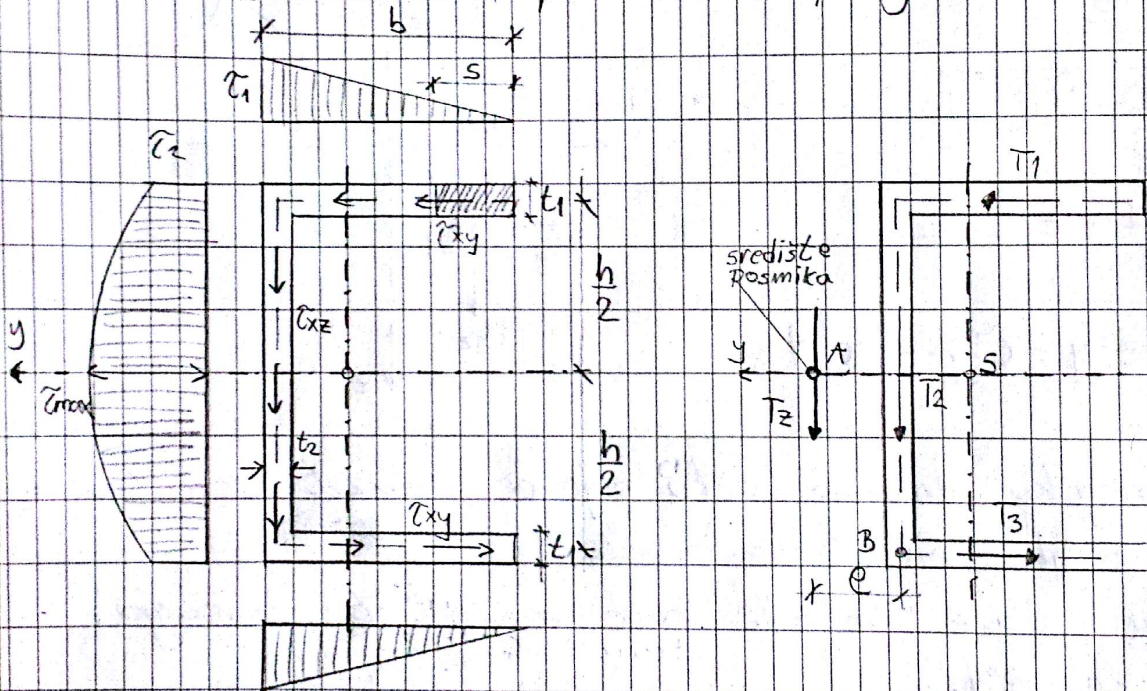
$$T_z \cdot e = M_x$$

$$e = \frac{M_x}{T_z} \rightarrow \text{ekstremcitet položaja središta smicanja.}$$

Središte smicanja kod štapa nesimetričnog presjeka štapa
 ako sila djeluje u središtu smicanja popr. presjeka
 će biti izložen samo savijanja, a ne torziji.

Središte smicanja je geom. karakteristika nezavisna od
 smjera i veličine popr. sile.

Za pune i zatvorene šuplje presjeke, središte smicanja
 je u težištu, a pri tome ti presjeci imaju veliku
 torzionu krutost, pa nam ti presjeci nisu interesantni



$$\tilde{\tau}_{xy} = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}$$

HORIZONTALNI PODAS

$$\tilde{\tau}_{xy} = \frac{T_z}{I_y \cdot t_1} \cdot \frac{t_1 \cdot h}{2} \cdot s = \frac{T_z}{I_y \cdot t_1} \cdot t_1 \cdot s \cdot \frac{h}{2}$$

$$s = b$$

$$\tilde{\tau}_{xy \max} = \tilde{\tau}_1 = \frac{T_z \cdot h \cdot b}{2 I_y} \quad (*)$$

VERTIKALNO REBRO

$$\bar{\sigma}_{xz} = \frac{T_z}{I_y \cdot t_2} \cdot \left[\frac{t_1 \cdot b \cdot h}{2} + \frac{t_2}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]$$

pojasnica

→ Položaj rebra

$$\bar{\sigma}_{xz \min} = \bar{\sigma}_2 = \frac{T_z \cdot b \cdot h \cdot t_1}{2 I_y \cdot t_2}$$

$$\bar{\sigma}_{xz \max} = \frac{T_z}{I_y \cdot t_2} \cdot \left[\frac{t_1 \cdot b \cdot h}{2} + \frac{t_2 \cdot h^2}{8} \right]$$

$$T_1 = \int_0^b \bar{\sigma}_{xy} \cdot t_1 \cdot ds = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1 \cdot b \cdot t_1 \quad (**)$$

(*) → (**)

$$T_1 = \frac{T_z \cdot h \cdot b^2 \cdot t_1}{4 I_y} \quad , \quad T_1 = T_3$$

T_z = ukupna popr. sila

$$T_2 = T_z$$

$$T_z \cdot e = T_1 \cdot h \Rightarrow e = \frac{T_1 \cdot h}{T_z}$$

$$e = \frac{h^2 \cdot b^2 \cdot t_1}{4 I_y} \Rightarrow \text{Položaj središta smicanja zavisi od geom. karakt. presjeka}$$

$$I_y = \frac{t_2 \cdot h^3}{12} + 2 \cdot b \cdot t_1 \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2$$

$$e = \frac{3b^2 \cdot t_1}{t_2 \cdot h + 6b \cdot t_1}$$

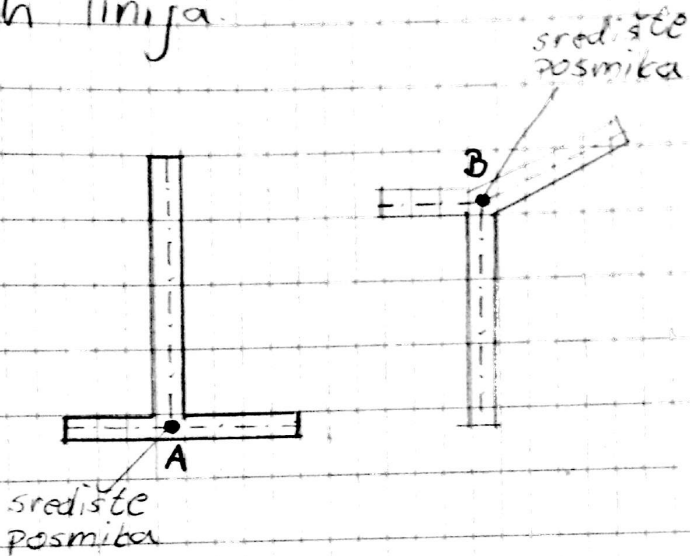
e - zavisi od dimenzija presjeka

$$b = 0 \Rightarrow e = 0$$

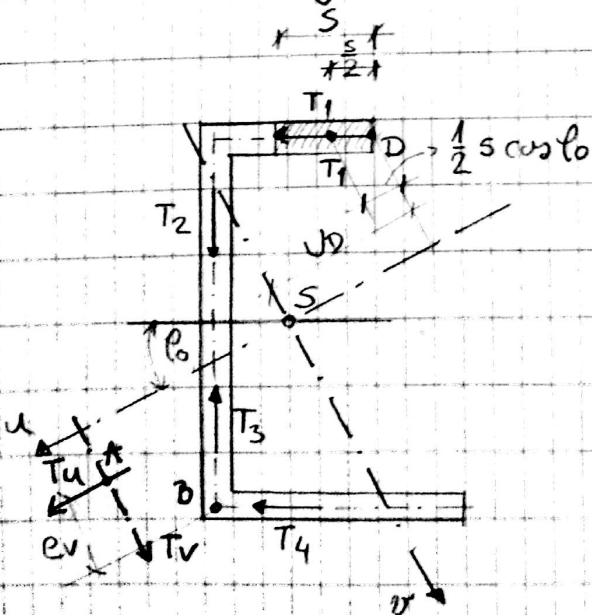
$$h \gg b \Rightarrow e \approx 0$$

$$b \gg h \Rightarrow e \approx \frac{b}{2}$$

Za sve presjeka kod kojih se središnje linije svih stijera sijeku u jednoj tački, središte smicanja je u presjecištu tih linija.



* Primjer određivanja središta smicanja kod nesimetričnog [profila.



$$\tan 2\beta_0 = \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}$$

$$|\eta_2| = \frac{|z+y|}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$$

$$I_1 = u$$

$$I_2 = v$$

$$\tilde{c} = \frac{T_v \cdot s_u}{l_u \cdot b} = \frac{T_v}{l_u \cdot t} \left[s \cdot t \cdot \left(v_D + \frac{s}{2} \sin \rho_0 \right) \right]$$

$$T_1 = \int_0^{b_1} \tilde{c} t ds = \frac{T_v \cdot t}{l_u} \int_0^{b_1} s \left(v_D + \frac{s}{2} \sin \rho_0 \right) ds$$

$$T_1 = \frac{T_v \cdot t \cdot b_1^2}{2 l_u} \left(v_D + \frac{b_1}{3} \sin \rho_0 \right)$$

$$\sum M_B = 0$$

$$T_v \cdot e_u = T_1 \cdot h$$

$$e_u = \frac{T_1 \cdot h}{T_v}$$

$$e_u = \frac{h b_1^2 t}{2 l_u} \left(v_D + \frac{b_1}{3} \sin \rho_0 \right)$$

$$\tilde{c} = \frac{T_v \cdot s_v}{l_v \cdot b} = \frac{T_v}{l_v \cdot t} \left[s \cdot t \cdot \left(v_D - \frac{s}{2} \cos \rho_0 \right) \right]$$

$$T_1 = \int_0^{b_1} \tilde{c} t ds = \frac{T_v \cdot t}{l_v} \int_0^{b_1} s \left(v_D - \frac{s}{2} \cos \rho_0 \right) ds$$

$$T_1 = \frac{T_v \cdot t \cdot b_1^2}{2 l_v} \left(v_D - \frac{b_1}{3} \cos \rho_0 \right)$$

$$\sum M_B = 0$$

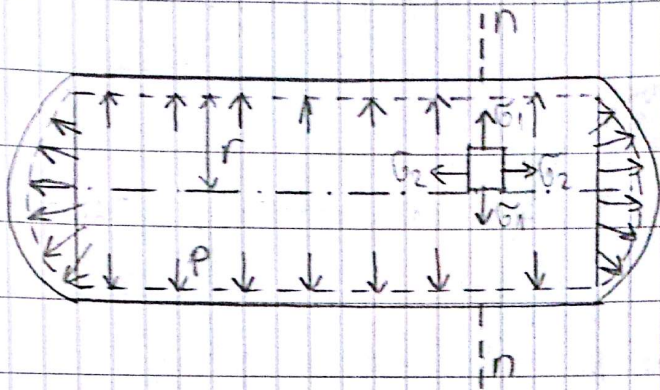
$$T_v \cdot e_v = T_1 \cdot h$$

$$e_v = \frac{T_1 \cdot h}{T_v} = \frac{h \cdot b_1^2 t}{2 l_v} \left(v_D - \frac{b_1}{3} \cos \rho_0 \right)$$

DRUGA
PARCIJALA



2) TANKA CILINDRIČNA POSUDA debljine stijenke h podvrgnuta djelovanju unutarnjega pritiska p .



$$S_1 = r$$

$$S_2 = \infty$$

$$\frac{\sigma_1}{r} + \frac{\sigma_2}{\infty} = \frac{p}{h}$$

$$\sigma_1 = \frac{p \cdot r}{h}$$

$$\sum F_x = 0$$

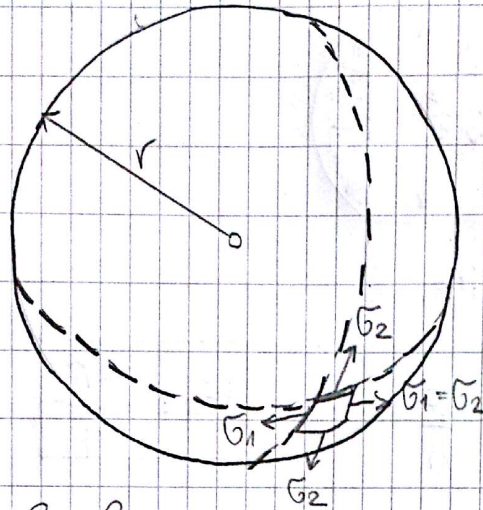
$$p \cdot r^2 \pi - \sigma_2 \cdot 2\pi r \cdot h = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{p \cdot r}{2h}$$

$$\Delta r = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \cdot \frac{p \cdot r^2}{E \cdot h}$$

* Primjeri *

- ① TANKA SFERNA POSUDA polupjera r i debljine stijenke h podvrgnuta je djelovanju unutarnjeg pritiska p .



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma; \quad \rho_1 = \rho_2 = r$$

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{p}{h} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{p \cdot r}{2h}} \text{ - IZRAZ ZA NAPREZANJE U TANKOJ SFERNOJ POSUDI.}$$

Opseg sferne posude u bilo kojoj dijametralnoj ravni prije deformacija jednak je $2\pi r$, a nakon deformacija je $2\pi (r + \Delta r)$.

Relativna deformacija opsega je:

$$\epsilon = \frac{2\pi (r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\epsilon = \frac{1}{E} (\sigma - \nu \sigma) = \frac{1 - \nu}{E} \cdot \sigma$$

$$\sigma = \frac{1 - \nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r}{2h}$$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1 - \nu}{E} \left(\frac{p \cdot r}{2h} \right)$$

$$\boxed{\Delta r = \frac{1 - \nu}{E} \cdot \frac{p \cdot r^2}{2h}}$$

PROMJENA POLUPREČNIKA TANKE SFERNE POSUDE POD PRITISKOM.