Ingénierie Financière

Pascal Sitbon

April 14, 2015

Contents

1 Introduction

Ce document est un guide d'utilisation des deux applications de finance codées en C++, le code étant disponible à cette adresse. Le projet 1 est un Pricer pour les options binaires, le second est un objet permettant de simuler des solutions d'équations différentielles, et elle contient par ailleurs un calcul d'espérance grâce à une simulation Monte Carlo. Dans l'ensemble des formules de ce papier, la fonction N désigne la fonction normale cumulée.

2 Projet 1: Pricer à options binaires

Les options binaires sont populaires dans les marchés OTC pour la spéculation par example. Elles sont également importantes en ingénierie financière dans la construction de produits dérivés complexes. Cette application permet de donner les prix des call et puts des options binaires définies ci-apreès. L'application terminale se lance ou prenant les fichiers projet1.h, projet1.cpp.

2.1 Gap Options

En notant S le stock price, le payoff d'un call est 0 si $S \leq X_1$ et $S - X_2$ si $S > X_1$. X_1 et X_2 représentant le first strike et le payoff strike. Voici les prix d'un call et d'un put pour ce type d'options:

$$c = S\mathrm{e}^{(b-r)T} N(d_1) - X_2 \mathrm{e}^{-rT} N(d_2) \tag{1}$$

$$p = -S\mathrm{e}^{(b-r)T} N(-d_1) + X_2 \mathrm{e}^{-rT} N(-d_2) \tag{2}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X_1}) + (b + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{4}$$

En prenant un stock price de 50 un first strike de 50 un payoff strke de 57, le taux d'interêt sans risque étant 0.09 par an, et la volatilité 0.2.S). $S = 50, X_1 = 50, x_2 = 57, T = 0.5, r = b = 0.09, \sigma = 0.2$). On obtient alors $c = -0.0053$. VOici un exemple d'utilisation de l'application. La première question posée est le type d'algorithme et comme vous pouvez le voir sur la figure 1 il suffit d'indiquer un chiffre entre 1 et 5 qui correspond au type de binar option choisie. Ici on selectionne 1 pour Gap options. L'application demande ensuite si c'est un call ou un put, et finalement on saisit les différents paramètres nécéssaires dans la formule de pricing. Le résultat s'affiche et il suffit d'appuyer sur une touche pour quitter l'application.

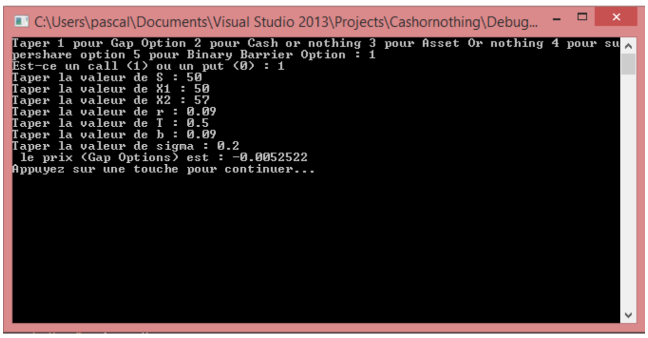

Figure 1: Cas d'utilisation pour Gap Options

2.2 Cash or nothing options

Les options cash pr nothing paye un montant K à l'expiration de l'action. Le payoff d'un call est 0 si $S \leq X$ et K si $S > X$. De même pour un put, le payoff est 0 si $S \geq X$ et K si $S < X$. On a alors les formules suivantes

$$c = K\mathrm{e}^{-rT}N(d) \tag{5}$$

$$p = K\mathrm{e}^{-rT}N(-d) \tag{6}$$

$$d = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (b - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{7}$$

En considérant la valeur d'une cash or nothing put option à 9 mois d'expiration, un prix futur S valant 100, le strike price est 80, le cash payout K vaut 10, $T = 0.75$, $r = 0.06$, $b = 0$, $\sigma = 0.35$, on obtient le prix du put $p = 2.6710$. L'utilisation est identique à celle de Gap Options, il suffit simplement de saisir 2 à la première question posée par l'application puis de dire si l'on veut le prix d'un call ou d'un pu puis d'indiquer la valeur des différents paramètres.

2.3 Asset or Nothing Options

A maturité, le payoff d'un call est 0 si $S \leq X$ et S si $S > X$. De façon similaire, un put paye 0 si $S \geq x$ et S si $S < X$. On a alors les prix suivants:

$$c = S\mathrm{e}^{(b-r)T}N(d) \tag{8}$$

$$p = S\mathrm{e}^{(b-r)T}N(-d) \tag{9}$$

$$d = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (b + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{10}$$

En considerant une asset or nothing options à 6 mois d'expiration, le stock price est 70, le strike price est 65, le taux d'interêt sans risque $r = 0.07$ le rendement des dividendes de 0.05: $b = 0.07 - 0.05 = 0.02$, et une volatilité de $\sigma = 0.27$. On obtient la valeu d'un put $p = 20.2069$. Le cas d'utilisation reste similaire aux deux précédents. Il suffit de taper 3 à la première question posée par l'application (cf figure 2).

2.4 Supershare Options

Une supershare option assigne son détenteur à un payoff de S/X_L si $X_L \leq S \leq X_H$ et 0 sinon. Le prix d'une telle option est le suivant:

$$w = (S\mathrm{e}^{(b-r)T}/X_L)(N(d_1) - N(d_2)) \tag{11}$$

Considérons une supershare opion, à 3 mois d'expiration. Le prix futur est $S = 100$ les bornes sont $X_L = 90$ et $X_H = 110$, le taux d'interêt sans risque est $r = 0.1$, la volatilité est de 0.2 et $b = 0$, $T = 0.25$. On obtient alors un prix $w = 0.7389$.

2.5 Binary Barrier Options

Les binary barrier options que nous allons voir maintenant peuvent être divisées deux catgories. Les cash or nothing barrier options, elles payent un montant pré définit ou 0 en fonction de si la barrière a été atteinte ou non. L'autre catégorie est celle des Asset or nothing barrier options, elles payent la valeur de l'asset ou 0 en fonction de si le prix de l'asset a atteint la barrière ou non. Ces deux catégories correspondent au 28 options détaillées dans *The complete Guide to Options Princing Formula*, (p.177 - 180). La selection d'une binary barrier option se fait en tapant 5 à la première question, puis il faut indiquer un nombre entre 1 et 28 correspondant à la binary barrier option correspondante (cf Appendice 1). Voici les différentes simultations qui ont été faites. (**NB**: J'obtiens les mêmes résultats quand dans le guide sauf pour les équation 3 et 4 et pour 14 dans le cas $X < H$). Dans le tableau suivant : $r = b = 0.1$, $H = 100$, $T = 0.5$, $\sigma = 0.22$ $K = 15$ sauf pour les options 3 et 4 où $K = H$.

Option	S	$X = 102$	$X = 98$	Option	S	$X = 102$	$X = 98$
1	105	19.7264	9.7264	15	105	137.2782	45.8530
2	95	11.6553	11.653	16	95	44.5294	54.9262
3	105	64.8426	64.8426	17	105	4.4314	3.1453
4	95	177.7017	70.7017	18	95	5.3297	3.7704
5	105	9.3604	9.3604	19	105	27.5644	18.9896
6	95	11.2223	11.2223	20	95	38.7533	22.7755
7	105	64.8426	64.5826	21	105	4.8758	4.9081
8	95	77.7017	77.7017	22	95	0.0000	0.0407
9	105	4.9081	4.9081	23	105	39.9391	40.1574
10	95	3.0461	3.0461	24	95	0.0000	0.2676
11	105	40.1574	40.1574	25	105	0.0323	0.0000
12	95	17.2963	17.2963	26	95	3.0461	3.0054
13	105	4.9289	6.2150	27	105	0.2183	0.0000
14	95	5.8926	7.4519	28	95	17.2983	17.0306

3 Projet 2 - Simulation et Monte Carlo

3.1 Présentation du modèle

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la simulation de trajectoire de solutions d'équations différentielles par les schémas d'Euler et Milstein. Le modèle stipule que la détermination de la loi jointe de (λ, r),l'intensité et l'interest rate dans un CDS, nécessitent la determination de la loi jointe de deux processus stochastiques (x_t) et (y_t) qui sont solution d'une équation différentielle couplée. Les modèles pour l'intensité et le taux d'interêt sont les suivants:

$$r_t = x_t^\alpha + \phi(t, \alpha) \tag{12}$$

ϕ est une fonction intégrable sur certains inervalles (cf réference[2] pour la formule explicite). Pour x le modèle choisi est le suivant (processus de Cox-Ingersoll-Ross (1985)):

$$dx_t^\alpha = k(\theta - x_t^\alpha)dt + \sigma\sqrt{x_t^\alpha}dW_t \tag{13}$$

W_t est un mouvement Brownien. On notera par la suite, on notera $\alpha = (k, \theta, \sigma, x_0^\alpha)$. La condition suivante doit être vérifiée afin que le processus (x_t^α) soit positif:

$$2k\theta > \sigma^2 \tag{14}$$

De même pour l'intensité on a:

$$\lambda_t = y_t^\beta + \psi(t, \beta) \tag{15}$$

De même que précedemment y suit le modèle:

$$dy_t^\beta = \kappa(\mu - y_t^\beta)dt + \nu\sqrt{y_t^\beta}dZ_t \tag{16}$$

De même Z_t est un mouvement Brownien, on notera $\beta = (\kappa, \mu, \nu, y_0^\beta)$. La condition suivante doit être vérifiée afin que le processus (y_t^β) soit positif:

$$2\kappa\mu > \nu^2 \tag{17}$$

Le modèle suppose alors que le taux d'interêt à court terme r et l'intensité λ sont corrélés par le fait que les mouvements Browniens W et Z le sont comme suit:

$$dW_t dZ_t = \rho dt \tag{18}$$

Nous allons maintenant présenter les schémas pour simuler les trajectoires de (x_t^α) et (y_t^β).

3.2 Schéma d'Euler et Milstein

3.2.1 Schéma d'Euler

En notant $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = T$ une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$. On note $Z_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t'$, avec W' un Brownien indépendant de W. On obtient alors le schéma suivant:

$$x_{t_{i+1}}^\alpha = x_{t_i}^\alpha + k(\theta - x_{t_i}^\alpha)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{x_{t_i}^\alpha}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \tag{19}$$

$$y_{t_{i+1}}^\beta = y_{t_i}^\beta + \kappa(\mu - y_{t_i}^\beta)(t_{i+1} - t_i) + \nu\sqrt{y_{t_i}^\beta}(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) \tag{20}$$

3.2.2 Schéma de Milstein

Avec les mêmes notations que précedemment on simule les trajectoires de x_t^α et y_t^β comme suit:

$$x_{t_{i+1}}^\alpha = x_{t_i}^\alpha + k(\theta - x_{t_i}^\alpha)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{x_{t_i}^\alpha}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{1}{4}\sigma^2[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)] \tag{21}$$

$$y_{t_{i+1}}^\beta = y_{t_i}^\beta + \kappa(\mu - y_{t_i}^\beta)(t_{i+1} - t_i) + \nu\sqrt{y_{t_i}^\beta}(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) + \frac{1}{4}\nu^2[(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)] \tag{22}$$

3.3 Cas d'utilisation

Pour l'utilisation il est possible de rentrer les paramètres T (taille de l'intervalle $[0, T]$), n le pas de la subdivision, la valeur de la correlation ρ, le type de schéma souhaité. La fonction algorithme() s'appliquant à la classe paramètre se chargera alors de faire la simulation renvoyant un double* de taille 2n+2 contenant les valeurs de x puis celles de y. La classe Error héritant de paramètre permet de faire une simulation montecarlo des deux termes suivant:

$$LHS13 = \mathbb{E}[\exp(-\int_0^T (x_s^\alpha + y_s^\beta)ds)] \tag{23}$$

$$LHS14 = \mathbb{E}[\exp(-\int_0^T (x_s^\alpha + y_s^\beta)ds)y_T^\beta] \tag{24}$$

Il s'agit de la fonction LHS1314() s'appliquant à un élément de la classe er-

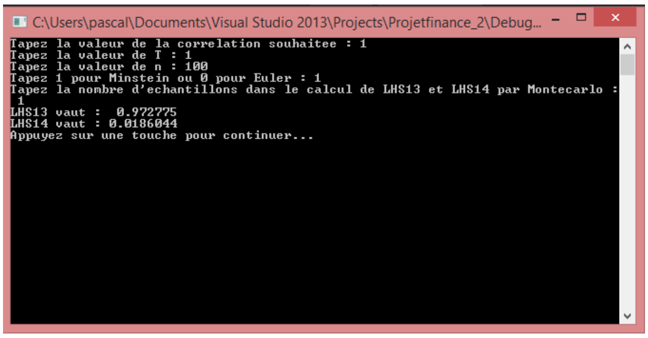

Figure 2: Cas d'utilisation

reur qui lui même hérite de la classe paramètre. Afin de lancer l'algorithme il suffit de lancer l'application qui demandera la valeur de T, la valeur de n, la valeur de la corrélation ρ ainsi que la méthode de simulation souhaitée. Elle demandera également le nombre de simulations N souhaitées dans les calculs de montecarlo. Les paramètres α et β sont fixés conformément au papier de Brigo et AL. (reférence [2]):

$$k = 0.528905, \sigma = 0.130035, \theta = 0.0319904, x_0 = 0.0000832349 \tag{25}$$

$$\kappa = 0.354201, \nu = 0.0238186, \mu = 0.00121853, y_0 = 0.0181 \tag{26}$$

Si l'utilisateur souhaite les modifier il le peut en ouvrant Source1.cpp et en modifiant la valeur des constantes.

3.4 Résultats obtenus

Il est intéressant de comparer nos résultats au papiers de Brigo et AL. afin de voirs si notre calcul de $LHS13$ et $LHS14$ sont proches de leur calcul. En prenant les paramètres α et β définis en (25) et (26). En prenant le schéma d'Euler, $T = 5$, $n = 100$, $N = 10$ on obtient les résultats suivant:

ρ	$LHS13$	$LHS14$
1	0.869602	0.00329043
-1	0.86811	0.0040667

On obtient des résultats similaires avec le schéma de Milstein, $T = 5$, $n = 200$, $N = 10$ on obtient les résultats suivant:

ρ	$LHS13$	$LHS14$
1	0.840403	0.0035885
-1	0.840453	0.00429616

Voici un des écrans de commande correspondant: Voici les résultats obtenus par

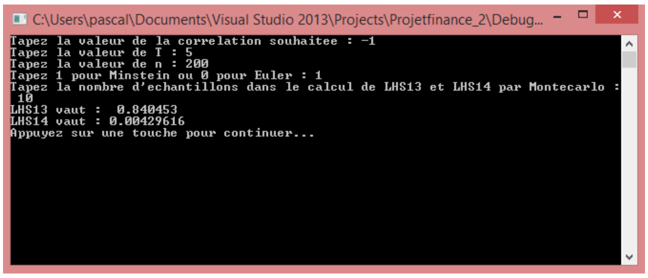

Figure 3: Cas d'utilisation, $\rho = -1$,$T = 5$, $n = 200$, Schéma de Milstein, $N = 10$

Brigo et Al.:

ρ	$LHS13$	$LHS14$
1	0.8624	0.0034485
-1	0.86191	0.0035848

Nous obtenons donc des résultats assez proches, par ailleurs comme eux nous obtenons un $LHS13$ plus élevé dans le cas $\rho = -1$, et un $LHS13$ plus elevé pour $\rho = 1$.

4 Appendice

4.1 Tableau récapitulatif des binary barrier options

Numéro	Action correspondante
1	Down-and-in cash-(at-hit)-or-nothing ($S > H$)
2	Up-and-in cash-(at-hit)-or-nothing ($S < H$)
3	Down-and-in asset-(at-hit)-or-nothing $K = H$
4	Up-and-in asset-(at-hit)-or-nothing ($K = H$)
5	Down-and-in cash-(at-expiration)-or-nothing($S > H$)
6	Up-and-in cash-(at-expiration)-or-nothing($S < H$)
7	Down-and-in asset-(at-expiration)-or-nothing($S > H$)
8	Up-and-in asset-(at-expiration)-or-nothing($S < H$)
9	Down and out cash or nothing ($S > H$)
10	Up and out cash or nothing ($S < H$)
11	Down and out asset or nothing ($S > H$)
12	Up and out asset or nothing ($S < H$)
13	Down and in cash or nothing call ($S > H$)
14	Up and in cash or nothing call ($S < H$)
15	Down and in asset or nothing call ($S > H$)
16	Up and in asset or nothing call ($S < H$)
17	Down and in cash or nothing put ($S > H$)
18	Up and in cash or nothing put ($S < H$)
19	Down and in asset or nothing put ($S > H$)
20	Up and in asset or nothing put ($S < H$)
21	Down and out cash or nothing call ($S > H$)
22	Up and out cash or nothing call ($S < H$)
23	Down and out asset or nothing call ($S > H$)
24	Up and out asset or nothing call ($S < H$)
25	Down and out cash or nothing put ($S > H$)
26	Up and out cash or nothing put ($S < H$)
27	Down and out asset or nothing put ($S > H$)
28	Up and out asset or nothing put ($S < H$)

5 Références

[**1**] The Complete Guide for Option Pricing Formula
[**2**] Credit Defaut Swap and Option Pricing with the SSRD stochastic intensity and Interest rate Model, Brigo et AL.