Таким образом, для данных b_1, b_2 и $\alpha \neq 0$ существует счетное число коэффициентов $c_{2,m}$, для которых (3.1), (3.13), (3.14) имеют ненулевые финитные решения.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда

$$c_1 + c_2 = 0,$$
$$\lambda\left(\frac{c_1}{a}\frac{ib_1}{a} + \frac{c_2}{a}\frac{ib_2}{a}\right) = -i. \tag{3.19}$$

Положим для определенности $c_1 = 1$. При этом

$$\lambda = \frac{a^2}{b_1 - b_2}. \tag{3.20}$$

Условие (И) означает, что существует $\beta = 0$. Нули функции $\mathcal{E}(t)$ даются формулой $\beta = \frac{\operatorname{Ln} 1 \cdot a}{i(b_1 - b_2)}$, среди них 0 действительно содержится.

Для $\alpha = 0$ получаем единственное решение с $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\,dx = 1$, имеющее вид

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\prod_{j=0}^{\infty}\frac{a}{b_2 - b_1}\,\frac{e^{ib_1ta^{-j-1}} - e^{ib_2ta^{-j-1}}}{ta^{-j}}\,\mathrm{dt}. \tag{3.21}$$

Сделав замену $x_1 = x - \frac{b_1 + b_2}{2}$, уравнение (3.1) с условиями (3.13) и (3.14) всегда можно привести к виду

$$y'(x) + \alpha y(x) = \lambda\left(c_1 y(ax - b_1) + c_2 y(ax + b_1)\right).$$

Подставив $x_2 = \mu x$, получим

$$y'(x) + \alpha y(x) = \lambda\left(y(ax - 1) + cy(ax + 1)\right). \tag{3.22}$$

Для $\alpha = 0$ уравнение (3.22) имеет вид

$$y'(x) = \lambda\left(y(ax - 1) - y(ax + 1)\right). \tag{3.23}$$

При этом

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin ta^{-j}}{ta^{-j}}\,\mathrm{dt}; \quad \lambda = -\frac{a^2}{2}. \tag{3.24}$$

При $a = 2$ получаем $y(x) = \operatorname{up}(x)$. Обозначим функцию, определяемую формулой (3.24), $h_a(x)$. Выяснить вид носителя функции $h_a(x)$ можно, например, следующим образом. Как известно, функция $\frac{\sin t}{t}$ является характеристической функцией случайной величины, равномерно распределенной (р. р.) на отрезке $[-1, 1]$. Тогда функция

$$F_a(t) = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin ta^{-j}}{ta^{j}} \tag{3.25}$$

— характеристическая функция случайной величины

$$\xi(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{-j}\xi_j, \tag{3.26}$$

где $\{\xi_j\}$ — последовательность независимых р. р. на $[-1, 1]$ случайных величин. Функция $h_a(x)$ — плотность случайной величины $\xi(a)$. Теперь очевидно, что

$$\operatorname{supp} h_a(x) = [-b, b], \tag{3.27}$$

где $b = \sum_{j=1}^{\infty} a^{-j} = \frac{1}{a-1}$. Тогда

$$F_a(t) = \frac{\sin ta^{-1}}{ta^{-1}} F(ta^{-1}). \tag{3.28}$$

Пусть $F_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a) t^k$. Из (3.25) следует, что $c_{2k+1}(a) = 0$, так что

$$F_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(a) t^{2k}. \tag{3.29}$$

Поскольку

$$\frac{\sin ta^{-1}}{ta^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}a^{-2k}}{(2k+1)!}, \tag{3.30}$$

то (см. (3.28))

$$c_{2k}(a) = \sum_{j=0}^{k} \frac{c_{2k-2j}(-1)^j a^{-2j}}{a^{2k-2j}(2j+1)!}, \tag{3.31}$$

откуда

$$c_{2k}(a)(1 - a^{-2k}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_{2k-2j}(a)(-1)^j}{(2j+1)!} a^{-2k}$$

и, наконец,

$$c_{2k}(a) = \frac{1}{a^{2k}-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{c_{2l}(a)(-1)^{k-l}}{(2k-2l+1)!}. \tag{3.32}$$

Нетрудно заметить, что $c_0(a) = 1$. Из (3.32) следует

$$|c_{2k}(a)| \leqslant \frac{1}{a^{2k}-1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(2k-2l+1)!} \max_{j<k} |c_{2j}(a)|.$$

Поскольку

$$\sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(2k-2l+1)!} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} = C_1 < \infty,$$

то начиная с некоторого k $c_{2k}(a) < \max_{j<k} |c_{2j}(a)|$, откуда $|c_{2k}(a)| < C$ для всех k. Поэтому

$$|c_{2k}(a)| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{a^{2j}-1}\right) C_1^k C_2$$

и, следовательно, $|c_{2k}(a)| \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из (3.32) следует

$$|c_{2k}(a)| \leqslant C_3 \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(a^{2j}-1)}, \tag{3.33}$$

так как

$$\nu_k = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{|c_{2l}(a)|}{(2k-2l+1)!} \to 0$$

при $k \to \infty$, и начиная с некоторого k $\nu_k < 1$. Из (3.33) нетрудно получить

$$|c_{2k}(a)| < c_4 a^{-\sum_{j=1}^{k} 2j} = C_4 a^{-(k+1)k}. \tag{3.34}$$

Оценку (3.34) можно еще улучшить. Скорость убывания $c_{2k}(a)$ в дальнейшем понадобится, например, для оценки остаточного члена при разложении функции up (x) в ряд специального вида.

Уточним поведение ν_k при $k \to \infty$. Из (3.34) получаем

$$\nu_k < \sum_{l=0}^{k-1} \frac{C_4 a^{-l(l+1)}}{(2k-2l+1)!} = C_4 \sum_{j=1}^{k} \frac{a^{-(k-j+1)(k-j)}}{(2j+1)!} =$$

$$= C_4 \left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{a^{-(k-j+1)(k-j)}}{(2j+1)!} + \sum_{j=\left[\frac{k}{2}\right]+1} \frac{a^{-(k-j+1)(k-j)}}{(2j+1)!} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(a^{-\frac{k^2}{4}} \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{(2j+1)!} + \sum_{j=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k} \frac{1}{(2j+1)!} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(C_5 a^{-\frac{k^2}{4}} + C_6 \frac{1}{(k+1)!} \right) \leqslant C_7 \frac{1}{(k+1)!}.$$

Поскольку (см. (3.32)) $|c_{2k}(a)| \leqslant \frac{1}{a^{2k}-1} \nu_k$, то

$$|c_{2k}(a)| \leqslant \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{a^{2j}-1} \frac{C_7^k}{\prod_{j=1}^{k} (j+1)!} \leqslant C_8 a^{-k(k+1)} \left(\prod_{j=1}^{k} j!\right)^{-1}. \tag{3.35}$$

Так как

$$c_{2k}(a) = \frac{F_a^{(2k)}(0)}{(2k)!}, \tag{3.36}$$

а

$$F_a^{(2k)}(0) = (-1)^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2k} h_a(x)\,\mathrm{dx}, \tag{3.37}$$

то

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2k} h_a(x)\,\mathrm{dx} \right| \leqslant C_8 a^{-k(k+1)} (2k)! \left(\prod_{j=1}^{k} j! \right)^{-1} \leqslant C_9 a^{-k(k+1)}. \tag{3.38}$$

Рассмотрим $h_a(x)$ при $a > 2$. Из (3.23) и (3.27) следует $h_a'(x) \equiv \equiv 0$ на $[-b_1, b_1]$, где $b_1 = b - \frac{2b}{a} = b\left(1 - \frac{2}{a}\right) > 0$, и, значит, $h_a(x) \equiv \mathrm{const}$ на $[-b_1, b_1]$. Аналогично получим, что на двух интервалах общей длины $2 \times 2b_1 a^{-1}$ функция $h_a(x)$ — многочлен первой степени, на четырех интервалах общей длины $4 \times 2b_1 a^{-2}$ $h_a(x)$ — многочлен второй степени и т. д. Мера множества Pol_a тех $x \in \mathrm{supp}\, h_a(x)$, у которых есть окрестность, где $h_a(x)$ — многочлен, составляет:

$$\mu(Pol_a) = 2b_1 + 2b_1 \frac{2}{a} + 2b_1 \left(\frac{2}{a}\right)^2 + \cdots = 2b_1 \frac{1}{1 - \frac{2}{a}} = 2b, \tag{3.39}$$

т. е. $\mu(Pol_a) = \mu(\mathrm{supp}\, h_a(x))$.

Таким образом, $h_a(x)$ при $a > 2$ на множестве полной меры — многочлен, а на оставшемся множестве sing_a (нигде не плотном, типа известного канторова множества) меры 0 — неаналитическая функция (действительно, ряд Тейлора функции $h_a(x)$ в точках множества sing_a либо состоит из конечного числа членов и не сходится, следовательно, к $h_a'(x)$, либо имеет нулевой радиус сходимости). Итак, в полученном примере функций класса $C^\infty(\mathbb{R})$ почти в каждой точке ряд Тейлора — многочлен, но функции тем не менее не являются многочленами и не аналитичны.

Поскольку кусочно-полиномиальные функции называются сплайнами, то функции $h_a(x)$ при $a > 2$ естественно причислить к сплайнам класса C^∞.

Вычислим значения $h_a(x)$ при $a > 2$. Пусть Sing_a^1 — множество тех точек из Sing_a, в которых ряд Тейлора — многочлен. Поскольку $h_a(x)$ — четная функция, рассмотрим только интервал $[-b, 0]$. Из (3.22) получаем

$$h(-b_1) = \int\limits_{-b}^{b_1} h_a'(x)\,\mathrm{dx} = -\lambda \int\limits_{-b}^{b_1} h_a(ax+1)\,\mathrm{dx} =$$

$$= -\frac{\lambda}{a} \int\limits_{-b}^{b} h_a(x)\,\mathrm{dx} = -\frac{\lambda}{a}.$$

Таким образом, на $[-b_1, b_1]$ $h_a(x) = -\frac{\lambda}{a}$, а так как (см. (3.20)) $\lambda = -\frac{a^2}{2}$, то

$$h_a(x) = \frac{a}{2}. \tag{3.40}$$

Поэтому

$$\int_{-b_1}^{b_1} h_a(x)\,\mathrm{dx} = ab_1 = \frac{a-2}{a-1} \tag{3.41}$$

и, следовательно,

$$\int_{-b}^{b_1} h_a(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{a-2}{a-1}. \tag{3.42}$$

Тогда

$$h_a\left(-b + \frac{b-b_1}{a}\right) = \int_{-b}^{-b+\frac{b-b_1}{a}} h_a'(x)\,\mathrm{dx} = -\lambda \int_{-b}^{-b+\frac{b-b_1}{a}} h_a(ax+1)\,\mathrm{dx} =$$

$$= -\frac{\lambda}{a}\int_{-b}^{b_1} h_a(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{a-2}{a-1}\right). \tag{3.43}$$

Далее,

$$h_a'\left(-b + \frac{b-b_1}{a}\right) = \int_{-b}^{-b+\frac{b-b_1}{a}} h_a''(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lambda^2 a \int_{-b}^{-b+(b-b_1)a^{-1}} h_a(a^2x + a + 1)\,\mathrm{dx} = \frac{\lambda^2}{a}\int_{-b}^{b} h_a(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a^3}{4}. \tag{3.44}$$

Поэтому на $\left[-b + \frac{b-b_1}{a},\ -b_1 - \frac{b-b_1}{a}\right]$

$$h_a(x) = \frac{a^3}{4}\left(x + b - \frac{b-b_1}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{a-2}{a-1}\right). \tag{3.45}$$

Продолжая таким же образом, можно вычислить коэффициенты всех многочленов, из которых «составлена» функция $h_a(x)$, причем эти коэффициенты будут рациональным образом выражаться через a.

Между моментами функции $h_a(x)$ $\int_{-b}^{b} x^{2n} h_a(x)\mathrm{dx}$ (а следовательно, и коэффициентами $c_{2k}(a)$) и значениями функции $h_a(x)$ в некоторых точках существует следующая связь. По формуле Тейлора

$$h_a(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h_a^{(k)}(-b)}{k!}(x+b)^k + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{-b}^{x} h_a^{(n+1)}(\tau)(x-\tau)^n \, d\tau. \tag{3.46}$$

Но $h_a^{(k)}(-b) = 0$, $k \in N$. Поэтому

$$h_a(x) = R_n(x). \tag{3.47}$$

Из (3.46) и (3.23) видно, что значения $h_a(x)$ в точках $x \in \mathrm{Sing}_a^1$ есть линейные комбинации моментов функции $h_a(x)$.

Найдем выражения для $h_a^{(n)}(x)$ и опишем точки $x \in \mathrm{Sing}_a^1$. Из (3.23) следует

$$h_a''(x) = \lambda^2 a \left(h_a'(ax + a + 1) - h_a(a^2x + a - 1)\right) -$$
$$- h_a(a^2x - a + 1) + h_a(a^2x - a - 1)). \tag{3.48}$$

В итоге, продолжая дифференцировать $h_a(x)$ с использованием (3.23), получаем

$$h_a^{(n)}(x) = |\lambda|^n a^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k h_a \left(a^n x + \sum_{j=1}^{n} a^{j-1} (-1)^{p_j(k-1)}\right), \tag{3.49}$$

где $p_j(k)$ — число, состоящее в j-м разряде двоичного разложения числа k (т. е. числа k, записанного в двоичной системе счисления). Числа δ_k определяются следующим рекуррентным соотношением: $\delta_{2k} = -\delta_k$, $\delta_{2k-1} = \delta_k$, $\delta_1 = 1$.

Теперь опишем точки множества Sing_a^1. Точка $x_0 \in \mathrm{Sing}_a^1$ в том и только в том случае, если существует натуральное n и набор знаков $+$ или $-$ такой, что

$$a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k) = \pm b,$$

т. е.

$$x_0 = \left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k)\right) a^{-n}. \tag{3.50}$$

Пусть $x_0 \in \mathrm{Sing}_a^1$. Величины $h_a^{(l)}(x_0)$ согласно (3.49) выражаются через значения $h_a(x)$ в точках вида

$$x_1 = a^l x_0 + \sum_{j=0}^{l-1} (\pm a^j).$$

Подставим вместо x_0 его значение из (3.50):

$$x_1 = a^{l-n}\left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k)\right) + \sum_{j=0}^{l-1} (\pm a^j) =$$

$$= a^{l-n}\left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k) + \sum_{k=n-l}^{n-1} (\pm a^k)\right).$$

Достаточно считать, что $0 < l < n$, поскольку при $n \leqslant l$ $h_a^{(l)}(x_0) = 0$. Покажем, что для тех наборов знаков в сумме $\Sigma_{\rm I} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\pm a^k)$, для которых при $n - l \leqslant k < n - 1$ хотя бы один из знаков при той же степени a в сумме

$$\sum\nolimits_{\rm II} = \sum_{k=n-l}^{n-1} (\pm a^k)$$

не противоположен, выполняется неравенство $|x_1| \geqslant b$ и, следовательно, $h_a(x_1) = 0$. Действительно, пусть k_1, $k_1 \geqslant n - l$,— наибольшее из тех k, для которых у данных наборов знаков в $\Sigma_{\rm I}$ и $\Sigma_{\rm II}$ знаки при a^k одинаковы. Тогда

$$\left|\sum\nolimits_{\rm I} + \sum\nolimits_{\rm II}\right| > 2a^{k_1} - 2\sum_{k=n-l}^{k_1} a^k - \sum_{k=0}^{n-l-1} a^k = \frac{2(a^{k_1+1} - 2a^{k_1})}{a-1} +$$
$$+ \frac{a^{n-l}}{a-1} + \frac{1}{a-1} \geqslant \frac{a^{n-l}}{a-1} + b$$

(так как $a > 2$). Поэтому

$$\left|a^{l-n}\left(\pm b + \sum\nolimits_{\rm I} + \sum\nolimits_{\rm II}\right)\right| > \frac{1}{a-1} = b.$$

Для того (единственного) набора знаков в $\Sigma_{\rm II}$, у которого знаки при $k \geqslant n - l$ противоположны знакам $\Sigma_{\rm I}$,

$$x_1 = a^{l-n}\left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-l-1} (\pm a)\right)$$

и в силу (3.50) $x_1 \in \mathrm{Sing}_a^1$. Следовательно, и производные функции $h_a(x)$ в точках Sing_a^1 рациональным образом выражаются через a и $c_{2k}(a)$ (т. е. в конце концов через a).

Пусть $1 \leqslant m \leqslant 2^n$, а $x_m^{(n)} \in \mathrm{Sing}_a^1$ имеет вид

$$x_m^{(n)} = \left(b - \sum_{k=0}^{n-1} a^k (-1)^{p_{k+1}(m-1)}\right) a^{-n}. \tag{3.51}$$

Тогда согласно (3.47) и (3.49)

$$h_a(x_m^{(n)}) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-b}^{x_m^{(n)}} h_a^{(n)}(\tau)(x_m^{(n)} - \tau)^{n-1}\, d\tau =$$
$$= \frac{|\lambda|^n a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!} \int_{-b}^{x_m^{(n)}} \sum_{k=1}^{m} \delta_k h_a\left(a^n\tau + \sum_{j=1}^{n} a^{j-1}(-1)^{p_j(k-1)}\right) \times$$
$$\times (x_m^{(n)} - \tau)^{n-1} d\tau = \frac{|\lambda|^n a^{\frac{(n-1)n}{2}}}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{m} \delta_k \int_{-b}^{x_m^{(n)}} h_a\Bigg(a^n\tau +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} a^{j-1}(-1)^{p_j(k-1)}\Bigg)(x_m^{(n)} - \tau)^{n-1}\, d\tau. \tag{3.52}$$

Сделаем в k-м интеграле в (3.52) замену

$$t = a^n\tau + \sum_{j=1}^{n} a^{j-1} (-1)^{p_j(k-1)}.$$

Получим

$$h_a(x_m^{(n)}) = \frac{|\lambda|^n a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!} a^{-n} \sum_{k=1}^{m} \delta_k \int_{-b}^{b} h_a(t)\Bigg(x_m^{(n)} - \Bigg(t + \sum_{j=0}^{n-1} a^j (-1)^{p_{j+1}(k-1)}\Bigg) a^{-n}\Bigg)^{n-1} dt. \quad (3.53)$$

Отсюда $\left(|\lambda| = \frac{a^2}{2}\right)$

$$h_a(x_m^{(n)}) = \frac{a^{2n} a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!\,2^n} a^{-n} a^{-n(n-1)} \sum_{k=1}^{m} \delta_k \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1}^{2l} \beta_{m,k,n}^{n-1-2l} \int_{-b}^{b} h_a(t)\, t^{2l} dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!\,2^n} a^{-\frac{n(n-3)}{2}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1}^{2l} (-1)^l (2l)!\, c_{2l}(a) \sum_{k=1}^{m} \delta_k \beta_{m,k,n}^{n-1-2l}, \quad (3.54)$$

где

$$\beta_{m,k,n} = b + \sum_{j=0}^{n-1} a^j \left((-1)^{p_{j+1}(k-1)} - (-1)^{p_{j+1}(m-1)}\right).$$

Например, для $m = 1$, т. е. $x_1^{(n)} = -b + 2ba^{-n}$,

$$h_a(x_1^{(n)}) = \frac{a^{-\frac{n(n-3)}{2}}}{(n-1)!\,2^n} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1}^{2l} (-1)^l (2l)!\, c_{2l}(a)\, b^{n-1-2l}. \quad (3.55)$$

Выведем формулу для $h_a^{(l)}(x_m^{(n)})$. Из (3.49) следует

$$h_a^{(l)}(x_m^{(n)}) = |\lambda|^l a^{\frac{l(l-1)}{2}} \delta_s h_a\left(a^l x_m^{(n)} + \sum_{j=0}^{l-1} a^j (-1)^{p_{j+1}(s-1)}\right), \quad (3.56)$$

где s определяется из формулы $p_l(s-1) = p_{j+n-l}(m-1)$: $s = [m2^{l-n}]$. Таким образом,

$$h_a^{(l)}(x_m^{(n)}) = |\lambda|^l a^{\frac{l(l-1)}{2}} \delta_s h_a\Bigg(a^{l-n}\Bigg(b - \sum_{k=0}^{n-1} a^k (-1)^{p_{k+1}(m-1)} + \sum_{j=0}^{l-1} a^j (-1)^{p_{j+1}(s-1)}\Bigg)\Bigg) = \frac{a^{\frac{l(l+3)}{2}}}{2^l} \delta_s h_a(x_r^{(n-l)}), \quad (3.57)$$

где $r = m - [m2^{l-n}]\,2^{n-l} + 1$. Окончательно получаем

$$h_a^{(l)}(x_m^{(n)}) = \frac{a^{-\frac{(n-l)(n-l+3)}{2} + \frac{l(l+3)}{2}}}{2^n\,(n-l-1)!}\,\delta_s \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-l-1}{2}\right]} C_{n-l-1}^{2j}\,(-1)^j\,(2j)!\,c_{2j}(a) \sum_{k=1}^{r} \delta_k \beta_{r,k,n-l}^{n-l-1-2j}. \qquad (3.58)$$

Итак, на интервале $[x_m^{(n)}, x_m^{(n)} + 2b_1 a^{-n+1}]$ функция $h_a(x)$ — многочлен степени $n-1$ вида

$$h_a(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{h_a^{(l)}(x_m^{(n)})}{l!}\,(x - x_m^{(n)})^l, \qquad (3.59)$$

где $h_a^{(l)}(x_m^{(n)})$ вычисляются по формуле (3.58).

§ 3. ФУНКЦИЯ up(x)

Рассмотрим $h_a(x)$ при $a = 2$. По определению $h_2(x) = \mathrm{up}(x)$. Функция up (x), введенная в работе [52], исследовалась в работах [53—57, 59, 60, 66]. Из (3.24) следует

$$\mathrm{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}}\,\mathrm{dt}. \qquad (3.60)$$

Функция up (x) — решение уравнения

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1), \qquad (3.61)$$

причем

$$\mathrm{supp}\,\mathrm{up}(x) = [-1, 1]. \qquad (3.62)$$

Производная n-го порядка функции up (x) вычисляется по формуле

$$\mathrm{up}^{(n)}(x) = 2^{C_{n+1}^2} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k\,\mathrm{up}(2^n x + 2^n + 1 - 2k). \qquad (3.63)$$

Легко заметить, что

$$\|\mathrm{up}^{(n)}(x)\|_{C[-1,1]} = \|\mathrm{up}^{(n)}(x)\|_{L_1[-1,1]} = 2^{C_{n+1}^2}. \qquad (3.64)$$

В точках вида $k2^{-n}$ (т. е. двоично-рациональных) ряд Тейлора функции up (x) — многочлен степени n. Нетрудно убедиться, что в остальных точках носителя up (x) — отрезка $[-1,1]$ — ряд Тейлора этой функции имеет нулевой радиус сходимости. Таким образом, в то время как функции $h_a(x)$ при $a > 2$ аналитичны на множестве полной меры, функция up (x) неаналитична ни в одной точке носителя. Повторяя рассуждения § 2, можно вычислить значения функции up (x) в двоично-рациональных точках, выразив их через моменты функции up (x). Приведем формулы для этих моментов:

$$2b_{2k} = a_{2k} = \int_{-1}^{1} x^{2k}\,\mathrm{up}\,(x)\,\mathrm{dx} = (-1)^k c_{2k}(2)\,(2k)!; \qquad (3.65)$$

$$b_{2k+1} = \int_{0}^{1} x^{2k+2}\,\mathrm{up}\,(x)\,\mathrm{dx} = -\int_{0}^{1} \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\,\mathrm{up}'\,(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\int_{0}^{1} x^{2k+2}\,\mathrm{up}\,(2x-1)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2k+2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{u+1}{2}\right)^{2k+2}\mathrm{up}\,(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{2^{2k+2}\,(2k+2)}\sum_{j=0}^{k+1} C_{2k+2}^{2j} a_{2j}. \qquad (3.66)$$

Теперь по формуле Тейлора получаем

$$\mathrm{up}\,(-1+k2^{-n}) = \frac{1}{n!}\int_{-1}^{-1+k2^{-n}} \mathrm{up}^{(n+1)}(\tau)\,(-1+k2^{-n}-\tau)^n\,d\tau =$$

$$= \frac{2^{C_{n+2}^2}}{n!}\sum_{j=1}^{k}\delta_j\int_{-1}^{-1+k2^{-n}} \mathrm{up}\,(2^{n+1}\tau+2^{n+1}+1-2j)\,(-1+k2^{-n}-\tau)^n\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{2^{C_{n+2}^2-(n+1)}}{n!}\sum_{j=1}^{k}\delta_j\int_{-1}^{1}\mathrm{up}\,(t)\,(-1+k2^{-n}-(t-2^{n+1}-1+2j)\times$$

$$\times 2^{-n-1})^n\,\mathrm{dt} = \frac{2^{C_{n+2}^2-n-1-n^2}}{n!}\sum_{j=1}^{k}\delta_j\int_{-1}^{1}\mathrm{up}\,(t)\left(k-j+\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)^n\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{2^{-n^2-n-1+C_{n+2}^2}}{n!}\sum_{j=1}^{k}\delta_j\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2l}\left(k-j+\frac{1}{2}\right)^{n-2l} a_{2l}2^{-2l}. \qquad (3.67)$$

Для точек вида $-1+2^{-n}$ поступим следующим образом [59]:

$$\mathrm{up}\,(-1+2^{-n}) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{-1}^{-1+2^{-n}}\mathrm{up}^{(n)}(\tau)\,(-1+2^{-n}-\tau)^{n-1}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{2^{C_{n+1}^2}}{(n-1)!}\int_{-1}^{-1+2^{-n}}\mathrm{up}\,(2^n\tau+2^n+1-2)\,(-1+2^{-n}-\tau)^{n-1}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{2^{C_{n+1}^2-n}}{(n-1)!}\int_{0}^{1}\mathrm{up}\,(t)\,t^{n-1}\,\mathrm{dt}\cdot 2^{-n(n-1)} = \frac{b_{n-1}}{2^{C_n^2}\,(n-1)!}. \qquad (3.68)$$

По формуле (3.63) найдем

$$\mathrm{up}^{(l)}(-1+2^{-n}) = 2^{C_{l+1}^2}\,\mathrm{up}\,(-1+2^{l-n}) = \frac{2^{C_{l+1}^2-C_{n-l}^2}}{(n-l-1)!}\,b_{n-l-1}. \qquad (3.69)$$

Получим теперь формулу для вычисления функции $\mathrm{up}(x)$ при любом x. Достаточно рассмотреть случай $-1 \leqslant x \leqslant 0$, так как функция $\mathrm{up}(x)$ четная. Для функции $\varphi_n(x) = \mathrm{up}(x) + \mathrm{up}(x - 2^{-n})$ на интервале $[-1 + 2^{-n}, -1 + 2^{-n+1}]$ получаем $\varphi_n^{n+1}(x) \equiv 0$, так как $\delta_2 = -\delta_1$. Следовательно, на этом интервале

$$\varphi_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{\varphi_n^{(l)}(-1 + 2^{-n})}{l!}(x + 1 - 2^{-n})^l, \qquad (3.70)$$

причем $\varphi_n^{(l)}(-1 + 2^{-n}) = \mathrm{up}^{(l)}(-1 + 2^{-n})$, так как $\mathrm{up}^{(l)}(-1) = 0$. Таким образом, для $x \in [-1 + 2^{-n}, -1 + 2^{-n+1}]$

$$\mathrm{up}(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{\mathrm{up}^{(l)}(-1 + 2^{-n})}{l!}(x + 1 - 2^{-n}) - \mathrm{up}(x - 2^{-n}), \quad (3.71)$$

т. е. для того чтобы вычислить функцию $\mathrm{up}(x)$ на $[-1 + 2^{-n}, -1 + 2^{-n+1}]$, нужно знать ее значения на $[-1, -1 + 2^{-n}]$. Разбивая интервал $[-1, -1 + 2^{-n}]$ на интервалы $[-1, -1 + 2^{-n-1}]$ и $[-1 + 2^{-n-1}, -1 + 2^{-n}]$ и повторяя те же выкладки, можем свести вычисление функции $\mathrm{up}(x)$ на интервале $[-1 + 2^{-n-1}, -1 + 2^{-n+1}]$ к вычислению ее на $[-1, -1 + 2^{-n-1}]$. Тем самым получаем возможность записать некоторый ряд для вычисления значений функции $\mathrm{up}(x)$, причем ряд быстро сходится. Действительно, на $[-1, -1 + 2^{-n}]$

$$0 \leqslant \mathrm{up}(x) \leqslant \mathrm{up}(-1 + 2^{-n}),$$

$$\mathrm{up}(-1 + 2^{-n}) = \frac{b_{n-1}}{2^{C_n^2}(n-1)!}.$$

Следовательно, использовав оценку (3.38) для $c_{2k}(a)$, получим

$$\mathrm{up}(-1 + 2^{-n}) \leqslant \frac{a_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{2^{C_n^2}(n-1)!} < \frac{C_9}{2^{C_n^2 + 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\left(2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)}}. \quad (3.72)$$

Выпишем этот ряд для $0 \leqslant x < 1$:

$$\mathrm{up}(x-1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{s_k+1} p_k \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{C_{j+1}^2} b_{k-j-1}}{2^{C_{k-j}^2}(k-j-1)!\, j!}(x - 0, p_1 \ldots p_k)^j; \quad (3.73)$$

$$b_{-1} = 1, \quad 0! = (-1)! = 1, \quad s_k = \sum_{j=1}^{k} p_j.$$

Здесь величины b_l, $l > 0$, вычисляются по формулам (3.65), (3.66), а $x = 0, p_1 \ldots p_k \ldots$ — запись числа x в двоичной системе счисления.