

Механика

Теоретическая механика

Селенских В.Н.

ЕЩЕ РАЗ О ЧИСЛЕ ПИ

В данной статье, с помощью известной физической теории о центрах масс различных фигур, определено значение числа π , отличающееся от общепринятого.

Ключевые слова: Окружность, центр масс, число π .

Постановка задачи

Физический метод определения численного значения числа π заключается в том, что мы будем рассматривать окружность как материальное тело, например как кольцо из пружинной проволоки, обладающее массой.

Мысленно разрежем это проволочное кольцо, предоставив ему возможность развернуться, как бутон цветка относительно т.1 (см. рис.1).

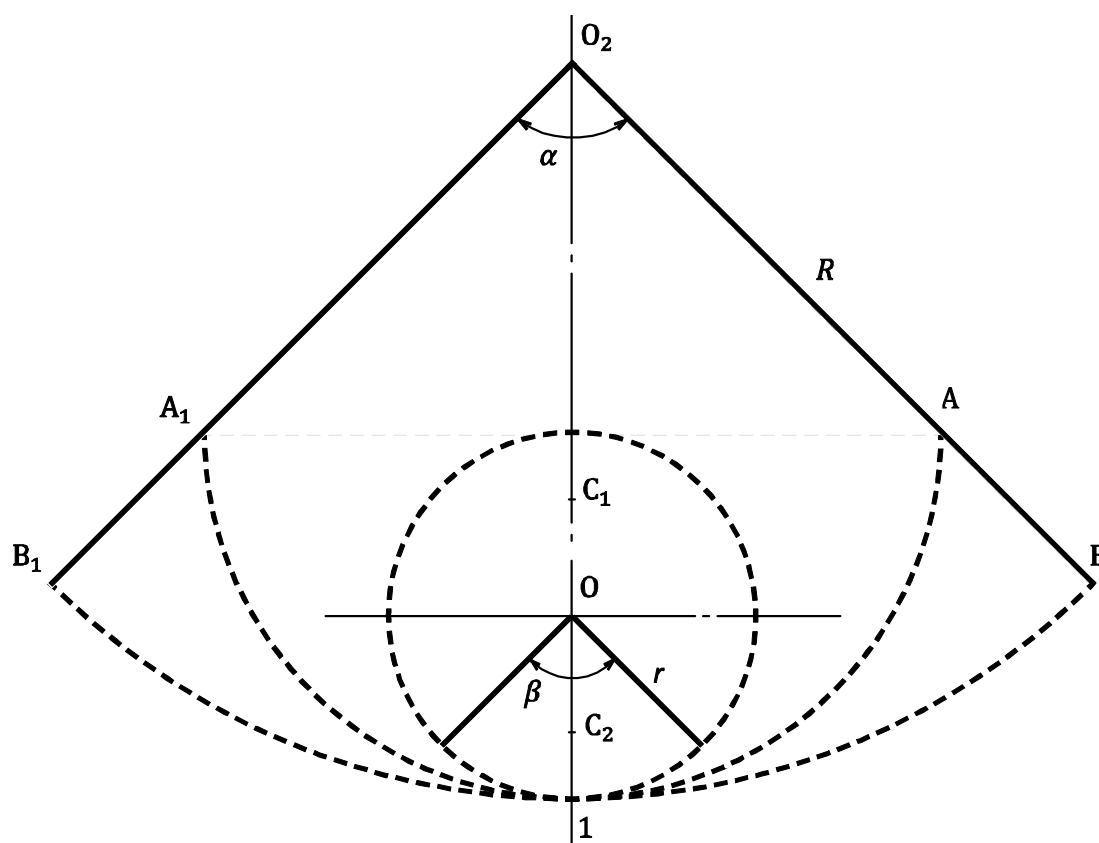


Рис.1. Схема распускания окружности относительно точки 1

На Рис 1. изображена распускающаяся относительно точки 1 окружность, единичного радиуса $r = O1 = 1$.

При распускании окружности радиус кривизны $R = O_2 1 = \frac{2\pi}{\alpha}$ увеличивается от 1 и до ∞ , а угол развертывания α уменьшается от 360° и до 0° . При этом длины развернутых дуг остаются равными длине исходной окружности, т.е. $R\alpha = 2\pi r$.

Центр масс окружности в начальный момент (при $\alpha = 2\pi$) находится в точке O .

При распускании окружности до $\alpha = 0^\circ$, центры масс дуг (точка C_2) перемещаются в сторону точки 1, к которой в пределе и стремятся.

Центр масс круга, ограниченного исходной окружностью, находится также в точке O . При распускании окружности центр масс секторов (точка C_1), ограниченных соответствующими дугами, перемещается в сторону точки O_2 , стремясь в пределе к ∞ .

При каком-то угле развертывания и притом только одном, (в чем не трудно убедиться графически) наступит случай, когда $OC_1 = OC_2$

Задача заключается в том, чтобы найти этот случай, т.е. найти угол альфа

Решение задачи

Из рис. 1 имеем [1]

$$OC_1 = O_2 O - O_2 C_1$$

$$O_2 O = O_2 1 - O 1 = \frac{2\pi}{\alpha} - 1 \quad (2)$$

$$O_2 C_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2\pi}{\alpha} \times \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{8\pi}{3\alpha^2} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

$$OC_1 = \left(\frac{2\pi}{\alpha} - 1 \right) - \frac{8\pi}{3\alpha^2} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

$$OC_2 = O_2 C_2 - O_2 O$$

$$O_2 C_2 = \frac{2\pi}{\alpha} \times \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\pi}{\alpha^2} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (5)$$

$$OC_2 = \frac{4\pi}{\alpha^2} \sin \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{2\pi}{\alpha} - 1 \right) \quad (6)$$

В случае $OC_1 = OC_2$ имеем:

$$\alpha^2 - 2\pi\alpha + \frac{10\pi}{3} \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \quad (7)$$

Однако при $OC_1 = OC_2$ будем иметь [1]:

$$O_2 C_1 = \frac{2}{3} O_2 C_2,$$

тогда:

$$OC_1 = OC_2 = \frac{1}{4} O_2 C_1 = \frac{1}{5} O_2 O = \frac{1}{6} O_2 C_3 \quad (8)$$

что дает:

$$OC_1 = OC_2 = \frac{2\pi}{3\alpha^2} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (9)$$

В постановочной части задачи имеются два обязательных условия ее решения, а именно: при $OC_1 = OC_2$ должно выполняться: 1- равенство $R\alpha = 2\pi r$ и 2- касание развернутых дуг и исходной окружности в т.1(см. Рис.1).

При $OC_1 = OC_2$ имеем:

$$\frac{2\pi}{3\alpha^2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{3\alpha} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

где: $\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{1}{4} R$, причем по второму условию должно соблюдаться $\frac{1}{4} R = r$, иначе касание нарушится.

Но тогда:

$$\begin{cases} R\alpha = 2\pi r \\ \frac{1}{4} R = r \end{cases}$$

И простое решение этой системы уравнений дает: $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

Следовательно:

$$OC_1 = OC_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} = \frac{3}{5}$$

т.к. $O_2 O = \frac{2\pi}{\alpha} - 1$, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $O_2 O = 3$, $OC_1 = OC_2 = \frac{1}{5} O_2 O$ а в итоге:

$$\pi = \frac{20\sqrt{2}}{9} = 3,14269680 \dots !!!$$

Обязательным условием касания исходной окружности и развернутых дуг в т.1 (см. рис.1) является и следующее равенство (см. рис.2):

$$\frac{\sin a/2}{a/2} = \frac{9}{10}$$

	$\pi/3 = \alpha < \pi/2$ $KN < 0$	$\alpha = \pi/2$ $KN = 0$	$2\pi/3 = \alpha > \pi/2$ $KN > 0$
	$r = 1; R = 4r; OC_1 = OC_2$	$r = 1; R = 4r; OC_1 = OC_2$	$r = 1; R = 4r; OC_1 = OC_2$
При любом α имеем:	$OC_1 = OC_2 = 1/4 AC_1 = 1/5 AO = 1/6 AC_2; \quad AO = OB; \quad AC_1 = BC_2 = 2/3 R \sin \alpha / (\alpha/2); \quad AC_2 = BC_1 = R \sin \alpha / (\alpha/2); \quad AB = R 5/3 \sin \alpha / (\alpha/2)$ $OC_1 = OC_2 = 1/6 R \sin \alpha / (\alpha/2); \quad KN = 3/4 R - 5/6 R \sin \alpha / (\alpha/2); \quad BC_2 = 2/5 AB; \quad AC_3 = 3/5 AB$		
При $KN=0$ имеем:	$KN = KC_2 - NC_2; \quad KC_2 = OK - OC_2 = R - 5/6 R \sin \alpha / (\alpha/2) = R (1 - \sin \alpha / (\alpha/2)); \quad AC_1 / (OC_1 + 1) = 3/2;$ $NC_2 = 1/4 R - OC_2 = 1/4 R (1 - 2/3 \sin \alpha / (\alpha/2)); \quad KN = R (1 - \sin \alpha / (\alpha/2)) - 1/4 R (1 - 2/3 \sin \alpha / (\alpha/2)) = 0; \quad 3/4 - 5/6 \sin \alpha / (\alpha/2) = 0;$		$(4\sqrt{2})/3\pi = 3/5$ $\sin \alpha / (\alpha/2) = 9/10$

Рис.2. Обоснование условия касания исходной окружности и развернутой дуги

Следовательно: одновременно - при $OC_1 = OC_2$ и при касании должно выполняться:

$$a^2 - 2\pi a + \frac{10\pi}{3} \sin \frac{a}{2} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin a/2}{a/2} = \frac{9}{10} \end{array} \right.$$

Решая эту систему уравнений получим тот же результат: $\alpha = \frac{\pi}{2}$

4. Заключение.

1. При $OC_1 = OC_2$:

Точка **C₁** (см.рис.1) одновременно является центром масс сектора **B₁O₂B** и центром масс сектора с тем же центральным углом α и радиусом $r = \frac{1}{4} R$.

Точка C_2 одновременно является центром масс дуги BB_1 и центром масс сектора с тем же центральным углом α и радиусом $r = \frac{1}{4} R$.

2. Найденное число $\pi = 3,14269680 \dots$ физического происхождения.

$$\pi = \frac{VT}{2R}$$

где:

V — скорость движения материальной точки вокруг силового центра (м/с),

T — период обращения (с),

R — радиус орбиты (м).

Если для земных дел всё это большой роли не играет, то для понимания природы числа π и для орбитальных расчётов имеет важное значение.

Литература

1. *Никитин Е.М.* Теоретическая механика для техникумов / Е.М. Никитин. – М.: Наука, 1972. – С. 184–186.