1 Problème

On a des points $(a_i)_i$ et $(b_i)_i$ et on veut savoir si un des $[a_i; b_i]$ recouvre tous les autres (en prenant le segment $[a_i; b_i]$ dans le sens horaire).

Soit e_i l'évènement le segment $[a_i; b_i]$ recouvre tous les autres, on recherche la probabilité $p = \mathbb{P}(\cup_i \ e_i)$

2 Simplification au calcul de $\mathbb{P}(e_1)$

Les e_i sont incompatibles donc $p = \mathbb{P}(\cup_i \ e_i) = \sum_i \mathbb{P}(e_i)$ et les évènements sont symétriques donc $\mathbb{P}(e_i) = \mathbb{P}(e_1)$ et donc $p = 50 \times \mathbb{P}(e_1)$.

3 Reformulation de $\mathbb{P}(e_1)$ en critère sur les permutations

On parcourt le cercle dans le sens horaire en partant de 1 et on note v_i le i-ème point rencontré ; il est facile de se convaincre que $v_1 = 1$ mais que $v_2 \ldots v_{100}$ forme une permutation de $2 \ldots 100$ et qu'il y a conservation des probabilités.

L'évènement e_1 se traduit sur la suite (v_i) de la façon suivante :

— $v_{100} = 2$

— si $v_i = 2k + 1$ et $v_j = 2k + 2$ alors $i < j$ pour $1 \leq k \leq 49$

4 Calcul de $\mathbb{P}(e_1)$

Il y a 99! permutations qui laissent $v_1 = 1$. Il y a 98! permutations qui placent $v_{100} = 2$.

En partant d'une partition satisfaisant e_1 on peut intervertir les positions de $v_i = 2k + 1$ et $v_j = 2k + 2$ pour chaque $1 \leq k \leq 49$ et retrouver toutes les permutations qui placent $v_1 = 1$ et $v_{100} = 2$.

Il y a donc $\frac{98!}{2^{49}}$ permutations qui satisfont e_1 sur 99! au total donc $\mathbb{P}(e_1) = \frac{98!}{99! \times 2^{49}} = \frac{1}{99 \times 2^{49}}$.

$$\text{Conclusion } p = \frac{50}{99 \times 2^{49}}$$